Продолжительность плавления термически массивных тел

Постановка задачи: в рабочем пространстве нагревается тело правильной формы массой M_0 , с характерным размером R_0; в момент времени τ = 0 температура поверхности тела стала равной $t_{пл}$.

Определить время $\tau_{пл}$, в течение которого тело полностью расплавится, если:

- нагрев симметричный и плотность теплового потока $q_{р.м.}$ одинакова по всей F;
- плотность результирующего теплового потока $q_{р.м.}$ = const
- физические свойства тела известны и не зависят от температуры;
- в начальный момент времени температурное поле в теле параболическое;
- образующийся расплав непрерывно и мгновенно удаляется с поверхности тела;
- коэффициент формы тела – ν

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА
краевой задачи теплопроводности

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} = a\left[\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\cdot\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}\right]$$ – уравнение Фурье.

- Геометрические условия: $\nu = -1/2$ (или 0, или +1/2);

$0 \le x \le R$; $R = R_0 \ldots 0$;

или

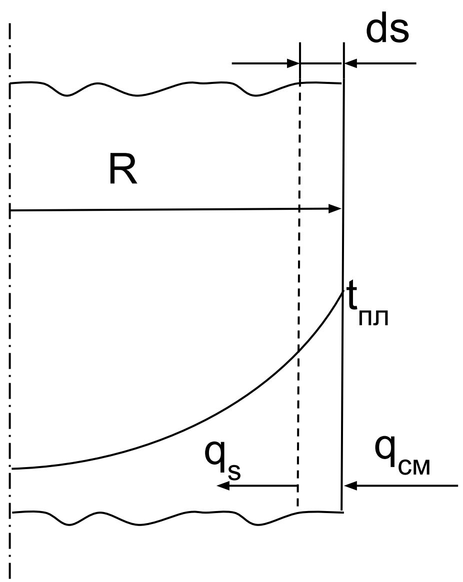
$0 \le x \le R$; $R = R_0 \ldots 0$; $\omega = 1 \ldots 0$.

- Физические условия: a = const;
  λ = const;
  c = const;
  ρ = const.

- Начальные условия: $\tau = 0$;
  $t(R_0,0) = t_{пл}$;
  $t(x,0) = t_{пл} - \Delta t_0(1 - X^2)$.

- Граничные условия: ***при нагреве***

$$-\lambda \left.\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=R} = q_{\text{р.м}} = \text{const}\,.$$



при $x \to R$ имеет место разрыв градиента температуры $\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x} = \varphi(x)$

$$(q_{\text{р.м}} - q_s)\,d\tau = r_{\text{пл}}\rho\, ds;$$

$$q_{\text{р.м}} - q_s = r_{\text{пл}}\rho \frac{ds}{d\tau}\,,$$

где: *ds* - слой в пределах которого и происходит изменение агрегатного состояния

qs - плотность теплового потока на выходе из слоя *ds*

s – толщина проплавленной части

Постулата мгновенного регулярного режима (МРР) :

$$\frac{d\bar{t}_{ds}}{d\tau} = \frac{d\bar{t}_{\omega}}{d\tau}$$

Где: $\bar{t}_{ds}$ – средняя температура слоя *ds*;

$\bar{t}_{\omega}$ – средняя температура нерасплавленной части тела.

Продолжительность инерционного периода :

$$\tau_{ин} = \frac{\rho \cdot R_0}{2\nu + 2} \cdot \frac{c}{q_{см}} \left[\bar{t}(\tau_{ин}) - \bar{t}(0) \right] \quad (1)$$

$$\bar{t}(0) = t_{пл} - \frac{q_{см} R_0}{\lambda} \cdot \frac{K_{\Delta T}}{K_q}; \quad (2)$$

$$\bar{t}(\tau_{ин}) = t_{пл} - \frac{q_S R_0}{\lambda} \cdot \frac{K_{\Delta T}}{K_q}; \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1) получим: $$\tau_{ин} = \frac{\rho \cdot R_0}{2\nu + 2} \cdot \frac{c}{q_{см}} \cdot \frac{q_{см} R_0}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\nu + 4} \cdot \left[1 - \frac{q_S}{q_{см}}\right] = \frac{R_0^2 \left[1 - \frac{q_S}{q_{см}}\right]}{(2\nu + 2)(2\nu + 2)a}$$

Заметим, что $\frac{q_S}{q_{см}}$ = ϕ(R) = ϕ(R_0·ω), где ω = R/R_0;

Дифференциальные уравнения нагрева: $$q_{см} \cdot F \cdot d\tau_{рег} = M_{ds} \cdot Q_{пл} + M \cdot c \cdot d\overline{t_\omega}$$

$$d\tau_{рег} = \frac{M_{ds}}{F} \cdot \frac{Q_{пл}}{q_{см}} - \frac{d\left[M \cdot c \cdot (t_{пл} - \overline{t_\omega})\right]}{F \cdot q_{см}} \qquad (4)$$

Учитывая: $\frac{M_{ds}}{F} = \rho ds;\quad \frac{\rho \cdot c}{\lambda} = \frac{1}{a};$

$$M = b \cdot \nu \cdot \rho \cdot R^{2\nu+2};$$

$$t_{пл} - \overline{t_\omega} = \frac{q_s \cdot R}{(2\nu + 4) \cdot \lambda};$$

$$F = (2\nu + 2) \cdot b_\nu \cdot R^{2\nu+1}.$$

$$d\tau_{рег} = \frac{Q_{пл}}{q_{см}} \cdot \rho ds - \frac{d\left[\left(\frac{q_S}{q_{см}}\right) \cdot R^{2\nu+3}\right]}{(2\nu + 2)(2\nu + 4) \cdot a \cdot R^{2\nu+1}} \qquad (5)$$

Постулата мгновенного регулярного режима (МРР) : $\dfrac{d\overline{t_{ds}}}{d\tau} = \dfrac{d\overline{t_{\omega}}}{d\tau}$ (6)

Используя $C_{усл}$, получим: $M \cdot c \cdot d\overline{\tau_{\omega}} = q_S \cdot F \cdot d\tau$

$$\frac{d\overline{t_{\omega}}}{d\tau} = \frac{F \cdot q_S}{M \cdot c} = \frac{(2\nu + 2)q_S}{R \cdot \rho \cdot c} \quad \text{т.к.} \quad \frac{M}{F} = \frac{R}{2\nu + 2};$$

$$\frac{q_{см} - q_S}{C_{усл} \cdot \rho ds} = \frac{(2\nu + 2) \cdot q_S}{R \cdot \rho \cdot c} \qquad (7)$$

Средняя температура слоя *ds:* $d\overline{t_{ds}} = t_{пл} - \dfrac{(2q_{см} + q_s) \cdot ds}{6\lambda}$ (8)

С учетом (8) получим: $C_{усл} = C + \dfrac{Q_{пл}}{t_{пл} - \overline{t_{ds}}} = C + \dfrac{6Q_{пл} \cdot \lambda}{(2q_{см} + q_S)ds}$ (9)

Подставим (9) в (7) : $\dfrac{q_S}{q_{см}} = \dfrac{\sqrt{(1+n)^2 + 8n^2} - (1+n)}{2n}$ (10)

где: $n = \dfrac{1}{3} N \cdot \varpi$; $N = \dfrac{c \cdot \Delta t_0}{(2\nu + 2)Q_{пл}}$; $\Delta t_0 = \dfrac{q_{см} \cdot R_0}{2\lambda}$.

Используя полученную зависимость $\dfrac{q_S}{q_{см}} = \varphi(\omega)$, найдем:

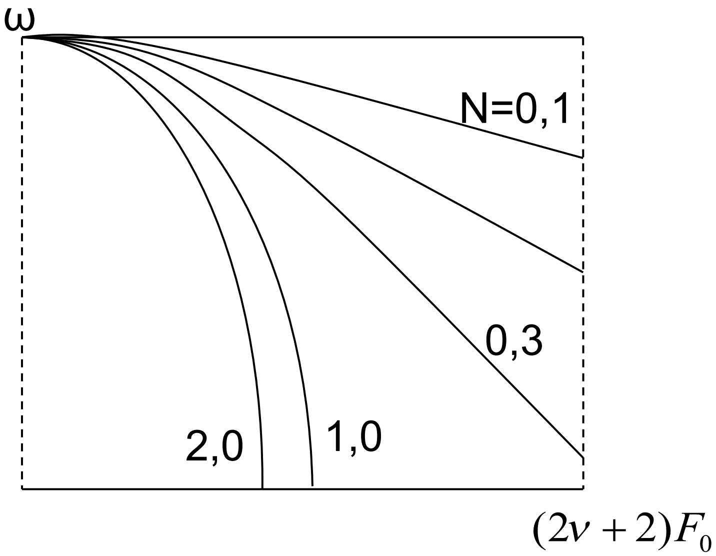
$$(2\nu+2)\cdot F_{0_{ин}} = \frac{3\left[N+1-\sqrt{(N+\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}}\right]}{2(2\nu+4)\cdot N} = \frac{3\left[N+1-Z(1)\right]}{2(2\nu+4)\cdot N};$$

$$(2\nu+2)\cdot F_{0_{рег}} = \frac{1}{(2\nu+4)\cdot N^2}\cdot \varphi_\nu(N\cdot\omega)\Big|_0^1;$$

$$\varphi_\nu(N\cdot\omega) = \frac{Z(\omega)}{4}\left[(2\nu+3)\cdot N\cdot\omega+2\nu+1\right]+\frac{4\nu+2}{3}\ln\left[y(\omega)\right]-\frac{2\nu+2}{4}(N\cdot\omega)^2-(2\nu+1)\cdot N\cdot\omega;$$

$$Z(\omega) = \sqrt{(N\cdot\omega+\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}};$$

$$y(\omega) = (Z+N\cdot\omega+\frac{1}{3})\cdot 6$$



Из рисунка видно, что при N ≤ 0,3 зависимость ω(F_0) линейная и имеет вид:

$$(2\nu+2)\cdot \mathrm{Fo}_{\text{пл}} = \frac{1}{2\nu+4} + \frac{1-\omega}{2N}$$

Продолжительность плавления: $\mathrm{Fo}_{\text{пл}} = \mathrm{Fo}_{\text{ин}} + \mathrm{Fo}_{\text{рег}} = \frac{1}{2\nu+2}\left[\frac{1}{2\nu+4} + \frac{1}{2N}\right]$ (11)

При N << 1 можно записать, что $\tau_{пл} = \frac{R_0^2}{(2\nu+2)a}\cdot\frac{(2\nu+2)\cdot Q_{пл}}{2c\cdot\Delta t_0} = \frac{Q_{пл}}{q_{см}}\cdot\rho R_0$ (12)

Для слоя расплава: $\frac{\partial t_p(x,\tau)}{\partial \tau} = a_p \left[\frac{\partial^2 t_p(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \cdot \frac{\partial t_p(x,\tau)}{\partial x} \right]$; $\nu \Rightarrow \begin{cases} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{cases}$

$R_0\omega \le x \le R_0$, $\omega = \frac{R}{R_0}$;

где: R – характерный размер нерасплавленной части тела.

При τ = 0: ω = 1;

$t_p(R_0,0) = t_{пл}$,

$$-\lambda_p \frac{\partial t_p(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=R_0} = q_{см} = const;$$

$$-\lambda_p \frac{\partial t_p(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=R_0 \cdot \omega} = q_{S1}(\omega)$$

Для нерасплавленной части тела : $$\frac{\partial t_T(x,\tau)}{\partial \tau} = a_T \left[\frac{\partial^2 t_T(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \cdot \frac{\partial t_T(x,\tau)}{\partial x} \right];$$

ν = -1/2, или 0, или + ½ ; $0 \le x \le R_0\omega$.

При τ = 0: ω = 1;

$t_T(R_0 \cdot \omega;0) = t_{пл}$;

$t_T(X,0) = t_{пл} - \Delta t_0(1 - X^2)$:

$$-\lambda_T \left. \frac{\partial t_T(x,\tau)}{\partial x} \right|_{x=R_0 \cdot \omega} = q_{S2};$$

$$t_T(R_0 \cdot \omega, \tau) = t_{пл}.$$

Для слоя ds можно записать : $$q_{S1} - q_{S2} = \rho \cdot Q_{пл} \cdot \frac{ds}{d\tau}.$$

Эта задача может быть решена методом МРР.

Асимптотическое приближение этого решения (при N ≤ 0,3) имеет вид:

$$(2\nu+2)\,\mathrm{Fo} \cong \frac{1}{2\nu+4} + \frac{1-\omega^{2\nu+2}}{2(2\nu+2)N};$$

$$(2\nu+2)\,\mathrm{Fo}_{\text{пл}} \cong \frac{1}{2\nu+4} + \frac{1}{2(2\nu+2)N}.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!