

Продолжительность плавления термически массивных тел

Постановка задачи: в рабочем пространстве нагревается тело правильной формы массой M_0 , с характерным размером R_0 ; в момент времени $t = 0$ температура поверхности тела стала равной $t_{\text{пл}}$.

Определить время $t_{\text{пл}}$, в течение которого тело полностью расплавится, если:

- нагрев симметричный и плотность теплового потока $q_{\text{р.м.}}$ одинакова по всей F ;
- плотность результирующего теплового потока $q_{\text{р.м.}} = \text{const}$
- физические свойства тела известны и не зависят от температуры;
- в начальный момент времени температурное поле в теле параболическое;
- образующийся расплав непрерывно и мгновенно удаляется с поверхности тела;
- коэффициент формы тела – v

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА
краевой задачи теплопроводности

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \cdot \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right] \quad \text{– уравнение Фурье.}$$

- Геометрические условия: $\nu = -1/2$ (или 0, или $+1/2$);

$$0 \leq x \leq R; \quad R = R_0 \dots 0;$$

или

$$0 \leq x \leq R; \quad R = R_0 \dots 0; \quad \omega = 1 \dots 0.$$

- Физические условия: $a = \text{const};$
 $\lambda = \text{const};$
 $c = \text{const};$
 $\rho = \text{const}.$

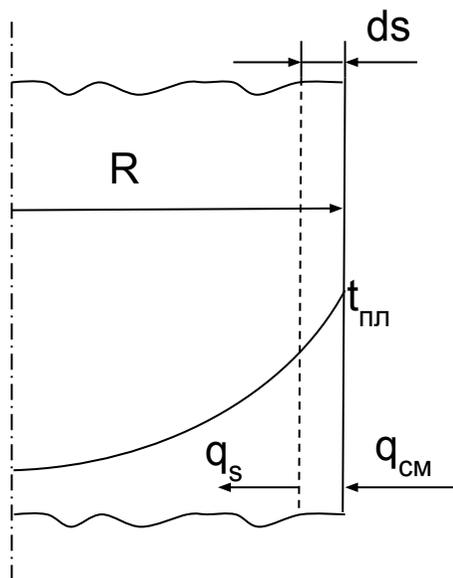
- Начальные условия: $\tau = 0;$
 $t(R_0, 0) = t_{\text{пл}};$
 $t(x, 0) = t_{\text{пл}} - \Delta t_0 (1 - X^2).$

- Граничные условия: при нагреве

$$-\lambda \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=R} = q_{p.m} = \text{const} .$$

при $x \rightarrow R$ имеет место разрыв градиента температуры

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} = \varphi(x)$$



$$(q_{p.m} - q_s) d\tau = r_{пл} \rho ds;$$



$$q_{p.m} - q_s = r_{пл} \rho \frac{ds}{d\tau} ,$$

где: ds - слой в пределах которого и происходит изменение агрегатного состояния

q_s - плотность теплового потока на выходе из слоя ds

s – толщина проплавленной части

Постулата мгновенного регулярного режима (МРР) :

$$\frac{d\bar{t}_{ds}}{d\tau} = \frac{d\bar{t}_{\omega}}{d\tau}$$

Где: \bar{t}_{ds} – средняя температура слоя ds ;

\bar{t}_{ω} – средняя температура нерасплавленной части тела.

Продолжительность инерционного периода :

$$\tau_{ин} = \frac{\rho \cdot R_0}{2\nu + 2} \cdot \frac{c}{q_{см}} [\bar{t}(\tau_{ин}) - \bar{t}(0)] \quad (1)$$

$$\bar{t}(0) = t_{пл} - \frac{q_{см} R_0}{\lambda} \cdot \frac{K_{\Delta T}}{K_q}; \quad (2)$$

$$\bar{t}(\tau_{ин}) = t_{пл} - \frac{q_S R_0}{\lambda} \cdot \frac{K_{\Delta T}}{K_q}; \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1) получим:

$$\tau_{ин} = \frac{\rho \cdot R_0}{2\nu + 2} \cdot \frac{c}{q_{см}} \cdot \frac{q_{см} R_0}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\nu + 4} \cdot \left[1 - \frac{q_S}{q_{см}} \right] = \frac{R_0^2 \left[1 - \frac{q_S}{q_{см}} \right]}{(2\nu + 2)(2\nu + 2)a}$$

Заметим, что $\frac{q_S}{q_{см}} = \phi(R) = \phi(R_0 \cdot \omega)$, где $\omega = R/R_0$;

Дифференциальные уравнения нагрева:

$$q_{см} \cdot F \cdot d\tau_{рег} = M_{ds} \cdot Q_{нл} + M \cdot c \cdot d\bar{t}_\omega$$

$$d\tau_{рег} = \frac{M_{ds}}{F} \cdot \frac{Q_{нл}}{q_{см}} - \frac{d[M \cdot c \cdot (t_{нл} - \bar{t}_\omega)]}{F \cdot q_{см}} \quad (4)$$

Учитывая: $\frac{M_{ds}}{F} = \rho ds$; $\frac{\rho \cdot c}{\lambda} = \frac{1}{a}$;

$$M = b \cdot \nu \cdot \rho \cdot R^{2\nu+2};$$

$$t_{нл} - \bar{t}_\omega = \frac{q_S \cdot R}{(2\nu + 4) \cdot \lambda};$$

$$F = (2\nu + 2) \cdot b_\nu \cdot R^{2\nu+1}.$$

$$d\tau_{рег} = \frac{Q_{нл}}{q_{см}} \cdot \rho ds - \frac{d \left[\left(\frac{q_S}{q_{см}} \right) \cdot R^{2\nu+3} \right]}{(2\nu + 2)(2\nu + 4) \cdot a \cdot R^{2\nu+1}} \quad (5)$$

Постулата мгновенного регулярного режима (МРР) : $\frac{d\bar{t}_{ds}}{d\tau} = \frac{d\bar{t}_{\omega}}{d\tau}$ (6)

Используя $C_{усл}$, получим: $M \cdot c \cdot d\bar{t}_{\omega} = q_S \cdot F \cdot d\tau$

$$\frac{d\bar{t}_{\omega}}{d\tau} = \frac{F \cdot q_S}{M \cdot c} = \frac{(2\nu + 2)q_S}{R \cdot \rho \cdot c} \quad \text{т.к.} \quad \frac{M}{F} = \frac{R}{2\nu + 2};$$

$$\frac{q_{см} - q_S}{C_{усл} \cdot \rho ds} = \frac{(2\nu + 2) \cdot q_S}{R \cdot \rho \cdot c} \quad (7)$$

Средняя температура слоя ds : $d\bar{t}_{ds} = t_{нл} - \frac{(2q_{см} + q_S) \cdot ds}{6\lambda}$ (8)

С учетом (8) получим: $C_{усл} = C + \frac{Q_{нл}}{t_{нл} - t_{ds}} = C + \frac{6Q_{нл} \cdot \lambda}{(2q_{см} + q_S) ds}$ (9)

Подставим (9) в (7) : $\frac{q_S}{q_{см}} = \frac{\sqrt{(1+n)^2 + 8n^2} - (1+n)}{2n}$ (10)

$$\text{где:} \quad n = \frac{1}{3} N \cdot \varpi ; \quad N = \frac{c \cdot \Delta t_0}{(2\nu + 2)Q_{нл}} ; \quad \Delta t_0 = \frac{q_{см} \cdot R_0}{2\lambda}.$$

Используя полученную зависимость $\frac{q_S}{q_{cm}} = \varphi(\omega)$, найдем:

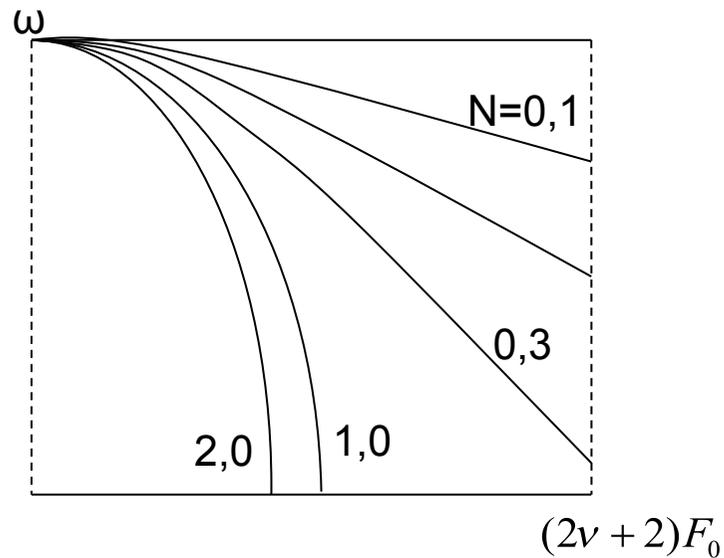
$$(2\nu + 2) \cdot F_{0_{min}} = \frac{3 \left[N + 1 - \sqrt{\left(N + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}} \right]}{2(2\nu + 4) \cdot N} = \frac{3[N + 1 - Z(1)]}{2(2\nu + 4) \cdot N};$$

$$(2\nu + 2) \cdot F_{0_{pez}} = \frac{1}{(2\nu + 4) \cdot N^2} \cdot \varphi_\nu(N \cdot \omega) \Big|_0^1;$$

$$\varphi_\nu(N \cdot \omega) = \frac{Z(\omega)}{4} [(2\nu + 3) \cdot N \cdot \omega + 2\nu + 1] + \frac{4\nu + 2}{3} \ln[y(\omega)] - \frac{2\nu + 2}{4} (N \cdot \omega)^2 - (2\nu + 1) \cdot N \cdot \omega;$$

$$Z(\omega) = \sqrt{\left(N \cdot \omega + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}};$$

$$y(\omega) = \left(N \cdot \omega + \frac{1}{3}\right) \cdot 6$$



Из рисунка видно, что при $N \leq 0,3$ зависимость $\omega(F_0)$ линейная и имеет вид:

$$(2\nu + 2) \cdot Fo_{\text{пл}} = \frac{1}{2\nu + 4} + \frac{1 - \omega}{2N}$$

Продолжительность плавления: $Fo_{\text{пл}} = Fo_{\text{ин}} + Fo_{\text{пер}} = \frac{1}{2\nu + 2} \left[\frac{1}{2\nu + 4} + \frac{1}{2N} \right]$ (11)

При $N \ll 1$ можно записать, что $\tau_{\text{пл}} = \frac{R_0^2}{(2\nu + 2)a} \cdot \frac{(2\nu + 2) \cdot Q_{\text{пл}}}{2c \cdot \Delta t_0} = \frac{Q_{\text{пл}}}{q_{\text{см}}} \cdot \rho R_0$ (12)

Для слоя расплава: $\frac{\partial t_p(x, \tau)}{\partial \tau} = a_p \left[\frac{\partial^2 t_p(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \cdot \frac{\partial t_p(x, \tau)}{\partial x} \right]; \nu \longrightarrow \begin{cases} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{cases}$

$$R_0 \omega \leq x \leq R_0, \quad \omega = \frac{R}{R_0};$$

где: R – характерный размер нерасплавленной части тела.

При $\tau = 0$: $\omega = 1$;

$$t_p(R_0, 0) = t_{пл},$$

$$-\lambda_p \frac{\partial t_p(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=R_0} = q_{см} = const;$$

$$-\lambda_p \frac{\partial t_p(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=R_0 \cdot \omega} = q_{S1}(\omega)$$

Для нерасплавленной части тела :
$$\frac{\partial t_T(x, \tau)}{\partial \tau} = a_T \left[\frac{\partial^2 t_T(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \cdot \frac{\partial t_T(x, \tau)}{\partial x} \right];$$

$V = -1/2, \text{ или } 0, \text{ или } + 1/2; \quad 0 \leq x \leq R_0 \omega .$

При $\tau = 0: \omega = 1;$

$$t_T(R_0 \cdot \omega; 0) = t_{пл};$$

$$t_T(X, 0) = t_{пл} - \Delta t_0 (1 - X^2):$$

$$-\lambda_T \left. \frac{\partial t_T(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=R_0 \cdot \omega} = q_{S2};$$

$$t_T(R_0 \cdot \omega, \tau) = t_{пл}.$$

Для слоя ds можно записать :
$$q_{S1} - q_{S2} = \rho \cdot Q_{пл} \cdot \frac{ds}{d\tau}.$$

Эта задача может быть решена методом МРР.

Асимптотическое приближение этого решения
(при $N \leq 0,3$) имеет вид:

$$(2\nu + 2)Fo \cong \frac{1}{2\nu + 4} + \frac{1 - \omega^{2\nu+2}}{2(2\nu + 2)N};$$

$$(2\nu + 2)Fo_{\text{пл}} \cong \frac{1}{2\nu + 4} + \frac{1}{2(2\nu + 2)N}.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!