10 способов решения квадратных уравнений

1 2 3 4 5 6 7 8 9

История развития квадратных уравнений.

- Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне:

$X^2+X=3/4$ $X^2-X=14,5$

- Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения.

Отсюда уравнение:

$$(10+x)(10-x) = 96$$

или же:

$$100 - x^2 = 96$$

$$x^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$

Решение $x = -2$ для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

- Квадратные уравнения в Индии.

$$ax^2 + bx = c, \quad a>0. \qquad (1)$$

Вот одна из задач знаменитого индийского математика XII в. Бхаскары.

Задача 13.

«Обезьянок резвых стая
Власть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.

А двенадцать по лианам…
Стали прыгать, повисая…
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?»

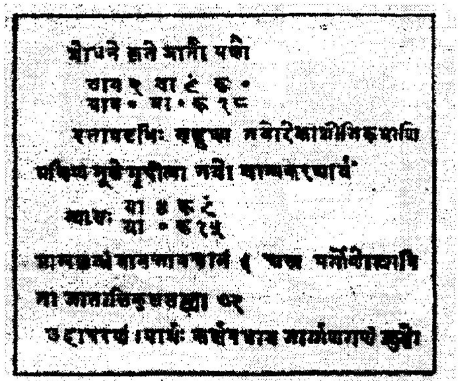

Рис. 3. Часть страницы из алгебры Бхаскары «Видиса Ганита» (вычисление корней)

- Квадратные уравнения у ал – Хорезми.

1) «Квадраты равны корнями», т.е. $ax^2 + c = bx$.

2) «Квадраты равны числу», т.е. $ax^2 = c$.

3) «Корни равны числу», т.е. $ax = c$.

4) «Квадраты и числа равны корням», т.е. $ax^2 + c = bx$.

5) «Квадраты и корни равны числу», т.е. $ax^2 + bx = c$.

6) «Корни и числа равны квадратам», т.е. $bx + c = ax^2$.

- Квадратные уравнения в Европе XIII - XVII вв.

$$x^2 + bx = c,$$

при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов b, c было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем.

- О теореме Виета.

«Если B + D, умноженное на A - A^2, равно BD, то A равно B и равно D».

Способы решения квадратных уравнений.

1. СПОСОБ: *Разложение левой части уравнения на множители.*

Решим уравнение $x^2 + 10x - 24 = 0$. Разложим левую часть на множители:

$$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0$$

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при $x = 2$, а также при $x = - 12$. Это означает, что число 2 и $- 12$ являются корнями уравнения $x^2 + 10x - 24 = 0$.

2. СПОСОБ: *Метод выделения полного квадрата.*

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$. Выделим в левой части полный квадрат.

Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3.$$

В полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x, а второе - удвоенное произведение x на 3. По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2, так как

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2.$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

прибавляя к ней и вычитая 3^2. Имеем:

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$$(x + 3)^2 - 16 = 0, \quad (x + 3)^2 = 16.$$

Следовательно, $x + 3 - 4 = 0$, $x_1 = 1$, или $x + 3 = -4$, $x_2 = -7$.

<u>3. СПОСОБ</u>: *Решение квадратных уравнений по формуле.*

Умножим обе части уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$

на 4а и последовательно имеем:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

4. СПОСОБ: *Решение уравнений с использованием теоремы Виета.*

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$$x^2 + px + c = 0. \qquad (1)$$

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

а) Если сводный член q приведенного уравнения (1) положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависти от второго коэффициента p. Если $p < 0$, то оба корня отрицательны, если $p < 0$, то оба корня положительны.

Например,

$x^2 - 3x + 2 = 0;\ x_1 = 2$ и $x_2 = 1$, так как $q = 2 > 0$ и $p = -3 < 0;$

$x^2 + 8x + 7 = 0;\ x_1 = -7$ и $x_2 = -1$, так как $q = 7 > 0$ и $p = 8 > 0.$

б) Если свободный член q приведенного уравнения (1) отрицателен ($q < 0$), то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если $p < 0$, или отрицателен, если $p > 0$.

Например,

$x^2 + 4x - 5 = 0;\ x_1 = -5$ и $x_2 = 1$, так как $q = -5 < 0$ и $p = 4 > 0;$

$x^2 - 8x - 9 = 0;\ x_1 = 9$ и $x_2 = -1$, так как $q = -9 < 0$ и $p = -8 < 0.$

5. СПОСОБ: *Решение уравнений способом «переброски».*

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Умножая обе его части на а, получаем уравнение

$$a^2x^2 + abx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$$y^2 + by + ac = 0,$$

равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$. При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют *способом «переброски»*. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

6. СПОСОБ: *Свойства коэффициентов квадратного уравнения.*

А. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

1) Если, $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то $x_1 = 1$,

$x_2 = c/a$.

Доказательство. Разделим обе части уравнения на а ≠ 0, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + b/a \bullet x + c/a = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 x_2 = 1 \bullet c/a. \end{cases}$$

По условию $a - b + c = 0$, откуда $b = a + c$. Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a + b/a = -1 - c/a, \\ x_1 x_2 = -1 \bullet (-c/a), \end{cases}$$

т.е. $x_1 = -1$ и $x_2 = c/a$, что м требовалось доказать.

Б. Если второй коэффициент $b = 2k$ – четное число, то формулу корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

іожно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad (2)$$

В. Приведенное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}$$

принимает вид:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ или } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \qquad (3)$$

<u>**7. СПОСОБ:**</u> *Графическое решение квадратного уравнения.*

Если в уравнении

$$x^2 + px + q = 0$$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$$x^2 = -px - q.$$

Построим графики зависимости у = x^2 и у = - px - q.

График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости - прямая (рис.1). Возможны следующие случаи:

- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;
- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;
- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.

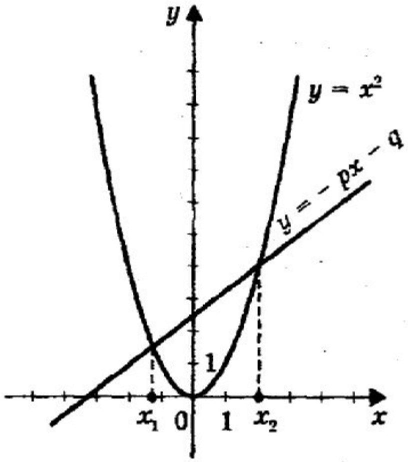

Рис. 1

• **Примеры.**

1) Решим графически уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$ (рис. 2).

Решение. Запишем уравнение в виде $x^2 = 3x + 4$.

Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3x + 4$. Прямую $y = 3x + 4$ можно построить по двум точкам $M (0; 4)$ и $N (3; 13)$. Прямая и парабола пересекаются в двух точках

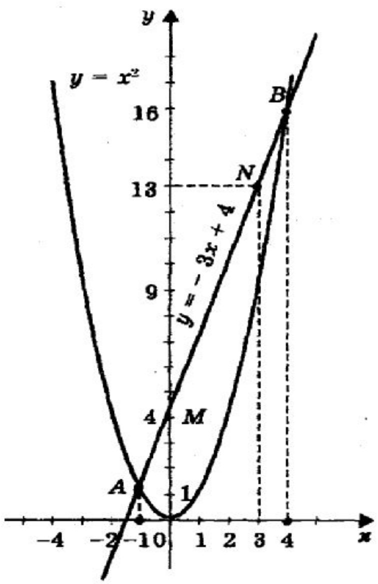

Рис. 2

8. СПОСОБ: *Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.*

Графический способ решения квадратных уравнений с помощью параболы неудобен. Если строить параболу по точкам, то требуется много времени, и при этом степень точности получаемых результатов невелика.

Предлагаю следующий способ нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки (рис. 5).

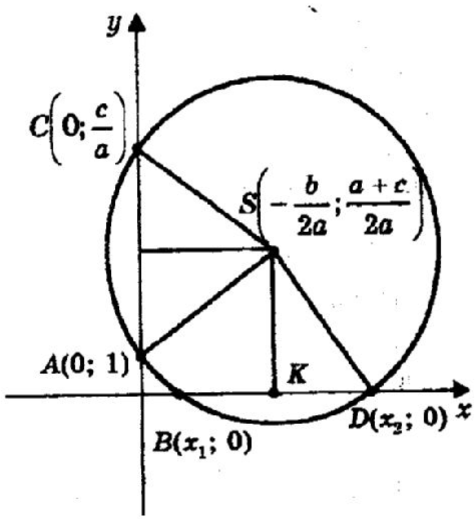

Рис. 5

Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, и проходит через точки $A(0; 1)$ и $C(0; c/a)$ на оси ординат. Тогда по теореме о секущих имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$, откуда $OC = OB \cdot OD / OA = x_1x_2 / 1 = c/a$.

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

При этом возможны три случая.

1) Радиус окружности больше ординаты центра *($AS > SK$, или $R > a + c/2a$)*, окружность пересекает ось Ох в двух точках (рис. 6,а) $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

2) Радиус окружности равен ординате центра *($AS = SB$, или $R = a + c/2a$)*, окружность касается оси Ох (рис. 6,б) в точке $B(x_1; 0)$, где x_1 - корень квадратного уравнения.

3) Радиус окружности меньше ординаты центра $\left(AS < SB, \text{ или } R < \frac{a+c}{2a}\right)$, окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис.6,в), в этом случае уравнение не имеет решения.

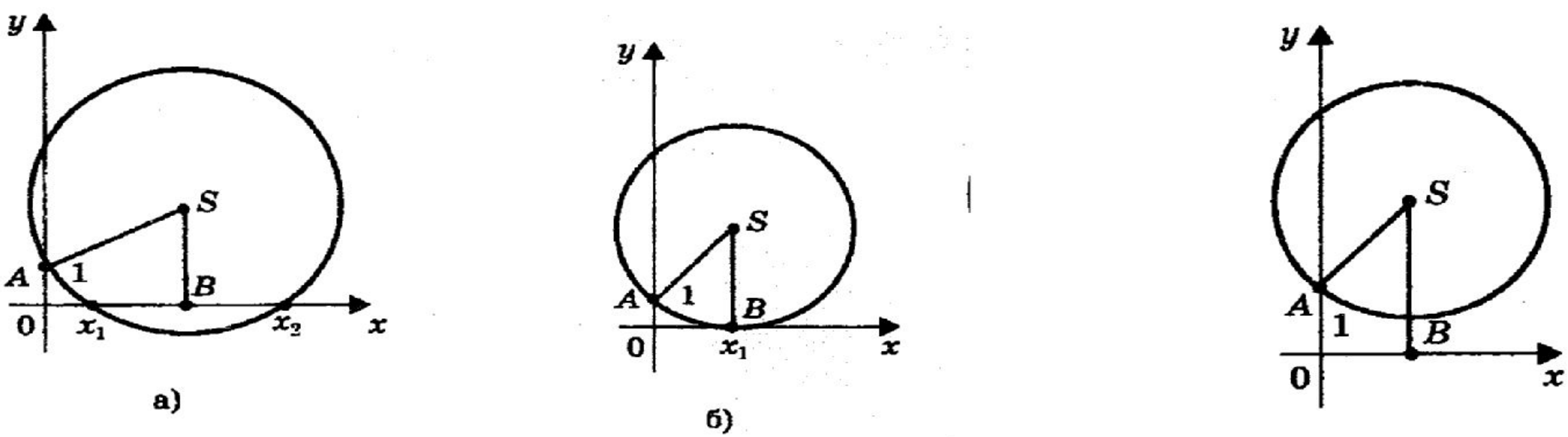

Рис. 6