Введение.

Предметом изучения являются системы автоматического управления (далее САУ).

Примеры: терморегулятор, системы поддержания технологических параметров, электромеханические системы регулирования скорости и угла поворота, автоматическая подстройка частоты гетеродина приёмника, регулирование в рыночной экономике, и т.д.

- Теория автоматического управления (далее ТАУ) это наука, которая изучает процессы управления и проектирования автоматических систем, работающих по замкнутому циклу. Иначе говоря, она изучает любые системы с обратной связью. Будем также пользоваться термином ТУ (Теория управления)

Принято считать, что одним из первых примеров САУ является регулятор Ползунова-Уатта (1764-65г.г.), предназначенный для автоматического регулирования-поддержания давления в паровом котле. На рис.1.1 обозначено:

1. Вал паровой машины
2. Маховик
3. Зубчатая передача
4. Шары, непосредственно управляющие заслонкой.

Задача сводится к поддержанию постоянной скорости вращения.

С принципами работы этого регулятора связана работа И.А. Вышнеградского “Регуляторы прямого действия” (1876 г.), основными тезисами которой являются:

- Увеличение массы шаров вредно влияет на устойчивость.
- Уменьшение трения вредно влияет на устойчивость.
- Уменьшение момента инерции маховика вредно влияет на устойчивость.
- Уменьшение неравномерности хода (в зависимости от нагрузки) вредно влияет на устойчивость.

Регулятор Ползунова-Уатта. 1764-65г.

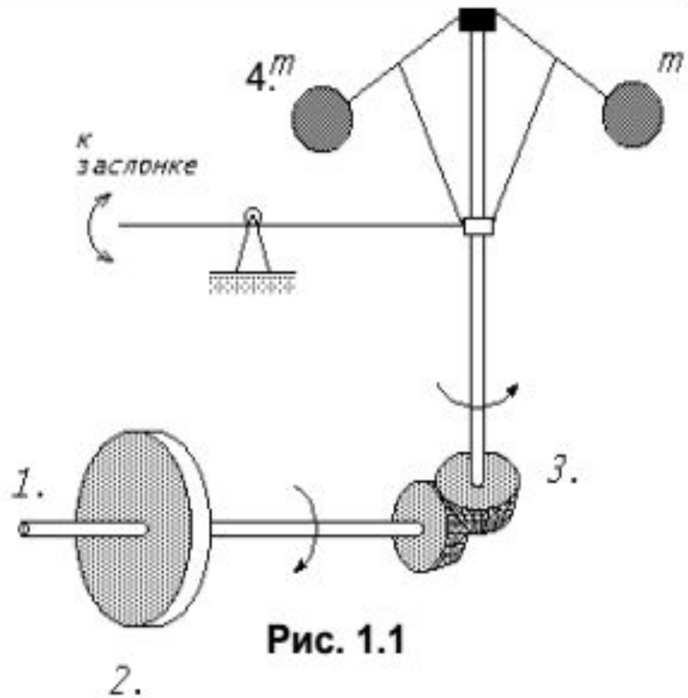


Рис. 1.1

Все эти выводы противоречат инженерному "здравому смыслу".

Развитие техники: повышение мощности машин, совершенствование обработки металла, увеличения рабочей скорости, стремление уменьшить неравномерность хода, - приводило к ухудшению работы парового регулятора. Вышнеградский в своей работе объяснил, почему улучшение параметров машины ухудшает её работу. Инженерам в то время это было совершенно неясно и никак не укладывалось в стандартные схемы.

В 1892 г. А.М. Ляпунов написал работу “Общие задачи об устойчивости движения”, в которой обосновал общий подход к исследованию устойчивости движения, из этого результаты Вышнеградского вытекали, как частный случай.

Во второй половине XX века были решены многие новые задачи об устойчивости систем. В современном виде ТАУ была создана к середине 60-х годов XX века, но развитие вычислительной техники поставило новые задачи, дало также и новые методы решения старых задач, развитие науки происходит и в настоящее время.

САУ состоит из двух основных частей: объекта управления (ОУ) и регулятора (Р). Однако, это разделение достаточно условное. ОУ представляет из себя "нечто", в котором должны быть явно выражены одна или несколько входных и одна или несколько выходных величин. Так же на объект действуют помехи.

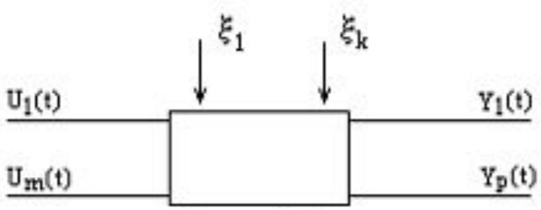


Рис. 1.2

$u(t)=(u_1(t).....u_m t))^T$ - входное, управляющее воздействие.
$y(t)=(y_1(t).....y_n(t))^T$ - выходное сигнал, состояние объекта.
$\xi(t)=(\xi_1(t).....\xi_k(t))^T$ - вектор помех.

Для поддержания заданного режима функционирования объекта, что выражается в заданном поведении выходных величин **y**, осуществляется управление входными величинами **u** в соответствии с некоторым алгоритмом управления, построенным, в свою очередь, в соответствии с принципами управления.

Устройство, вырабатывающее управление, называют регулятором.
Перед регулятором ставится задача обеспечения заданного качества работы системы во всех практически важных режимах. Регулятор создаётся разработчиком системы, исходя из знаний о свойствах объекта управления и требуемых задачах системы.

Принципы управления (регулирования)

- **Принцип разомкнутого регулирования.**

Yф - желаемый алгоритм функционирования

Рис. 1.3

Иначе говоря, принцип планового управления. Работает достаточно успешно при наличии двух условий:

а. Достаточно информации о свойствах объекта и неизменности этих свойств в процессе работы.

б. Незначительность или полное отсутствие помех.

Принципы управления (регулирования)

- **Принцип компенсации (управления по возмущению).**

Предложен Понселе (1829 г.). Принимаются меры к изучению или вычислению возмущающего воздействия ξ. Регулятор P_2 компенсирует помехи. **Именно поэтому качество работы этой системы выше качества системы работающей по принципу разомкнутого управления.**

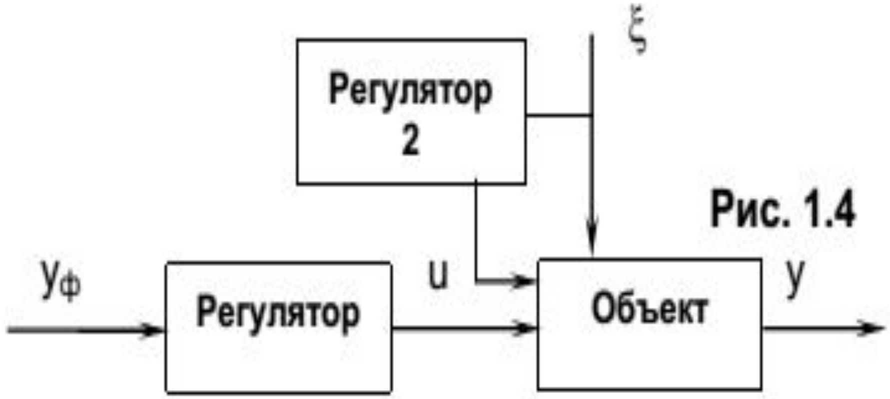


Рис. 1.4

Принципы управления (регулирования)

Главный недостаток этого принципа - необходимость измерения или априорного задания возмущения (например,его математической модели).

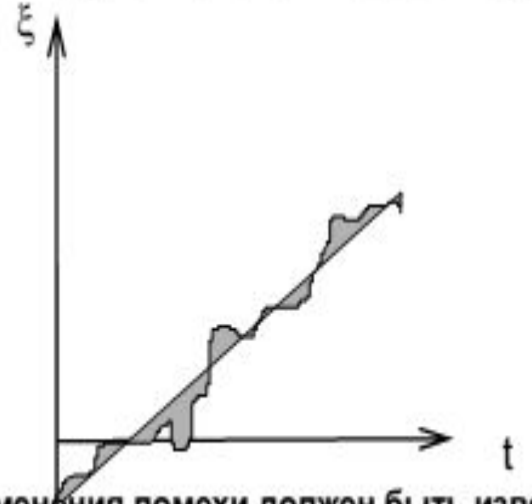


Рис. 1.5

Закон изменения помехи должен быть известен, или помеха должна измеряться, для этого должна быть известна математическая модель помехи или установлен датчик для измерения.

Принципы управления (регулирования)

- **Принцип замкнутого управления (управления с обратной связью, управления по отклонению)**

Предложен Чикалевым (1874 г.)
Этот принцип является наиболее общим, но и наиболее дорогим.

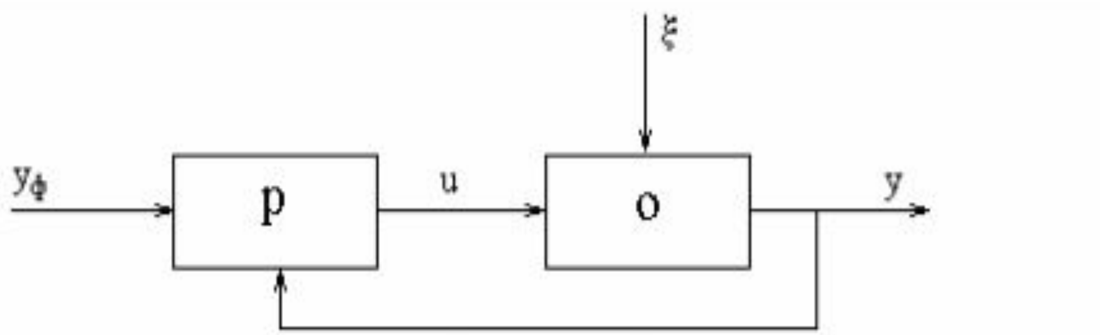


Рис. 1.6 **канал обратной связи**

Канал обратной связи является наиболее уязвимым местом. При нарушении его работы система может стать полностью неработоспособной.

Принципы управления (регулирования)

Этот общий принцип управления чаще всего реализуется в виде **управления по отклонению**, то есть с использованием **сигнала ошибки $e(t)$.**

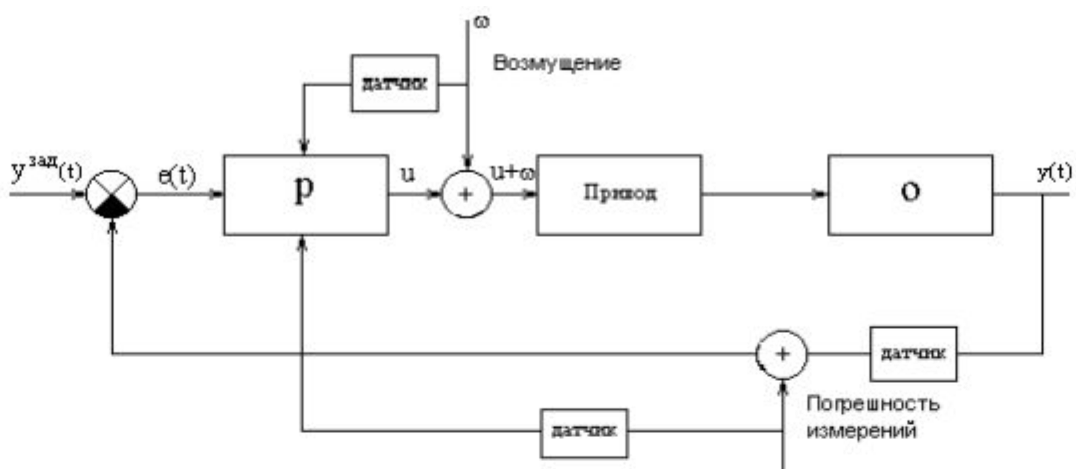
$$e(t)=y_ф(t)-y(t)$$

Рис. 1.7

Если задача заключается в управлении объектом при наличии возмущающих воздействий, неточности задания математической модели объекта, погрешности измерений и повышенных требованиях к точности, то принцип управления по отклонению является наиболее совершенным.

- **Также возможно совместное (комбинированное) использование принципов управления, например, принципа компенсации возмущения и принципа ОС.**

Ниже на рисунке приведён пример такой системы, где имеется и контур отрицательной обратной связи, и цепи компенсации погрешностей и возмущений.
Это- модель электромеханической системы, содержащей привод, объект, датчики, регулятор и формирователь (задатчик) желаемого поведения выходного сигнала Y(t).
В этой модели САУ считается, что помехи действует линейно, т.е. прибавляются к сигналу. Очевидно, что использован комбинированный принцип управления.



Типичный вид электромеханической системы.

Рис. 1.8

К подобному виду часто можно привести типовые САУ, причём не только электромеханические, но и любой другой природы.

ТИПЫ САУ

<u>Типы САУ по задачам управления (по типу задающего воздействия):</u>

Обратимся к виду задающего воздействия (“уставки”, задатчика) $\mathbf{y^{зад}(t)}$.
Это – желаемое поведение системы, желаемый алгоритм функционирования. От вида и способа формирования этого сигнала в значительной степени зависит способ построения регулятора.
В зависимости от вида $\mathbf{y^{зад}(t)}$ принято классифицировать САУ по **задачам управления:**

- **Системы стабилизации:** $\mathbf{y^{зад} = const.}$

- **Системы программного управления:** $\mathbf{y^{зад}(t)}$ - является функцией времени и заранее известна.
- **Системы следящие:** $\mathbf{y^{зад}(t)}$ - заранее неизвестно.

Типы САУ (примеры)

Типичным примером системы стабилизации может служить контур поддержания постоянной температуры в помещении (обратите внимание на наличие в системе помех в виде изменяющихся условий: в помещение входят и выходят люди и т.п.!) Ещё одним примером может служить система АПЧГ – автоматической подстройки частоты гетеродина приёмника.

Примером САУ программного управления является система поддержания заданного технологического режима, например, закона нагрева подложек микросхем, когда известна требуемая температурная кривая.

Замечание: не следует путать принцип программного управления и систему программного управления (имеется, к сожалению, неудачная сложившаяся терминология).

Наконец, примером следящей системы может являться любая система дистанционного управления перемещением, например, робот-манипулятор, управляемый специальным "джойстиком". В этом случае объект должет точно воспроизвести любые **заранее неизвестные перемещения, притом, возможно, в условиях помех.**

Классификация САУ

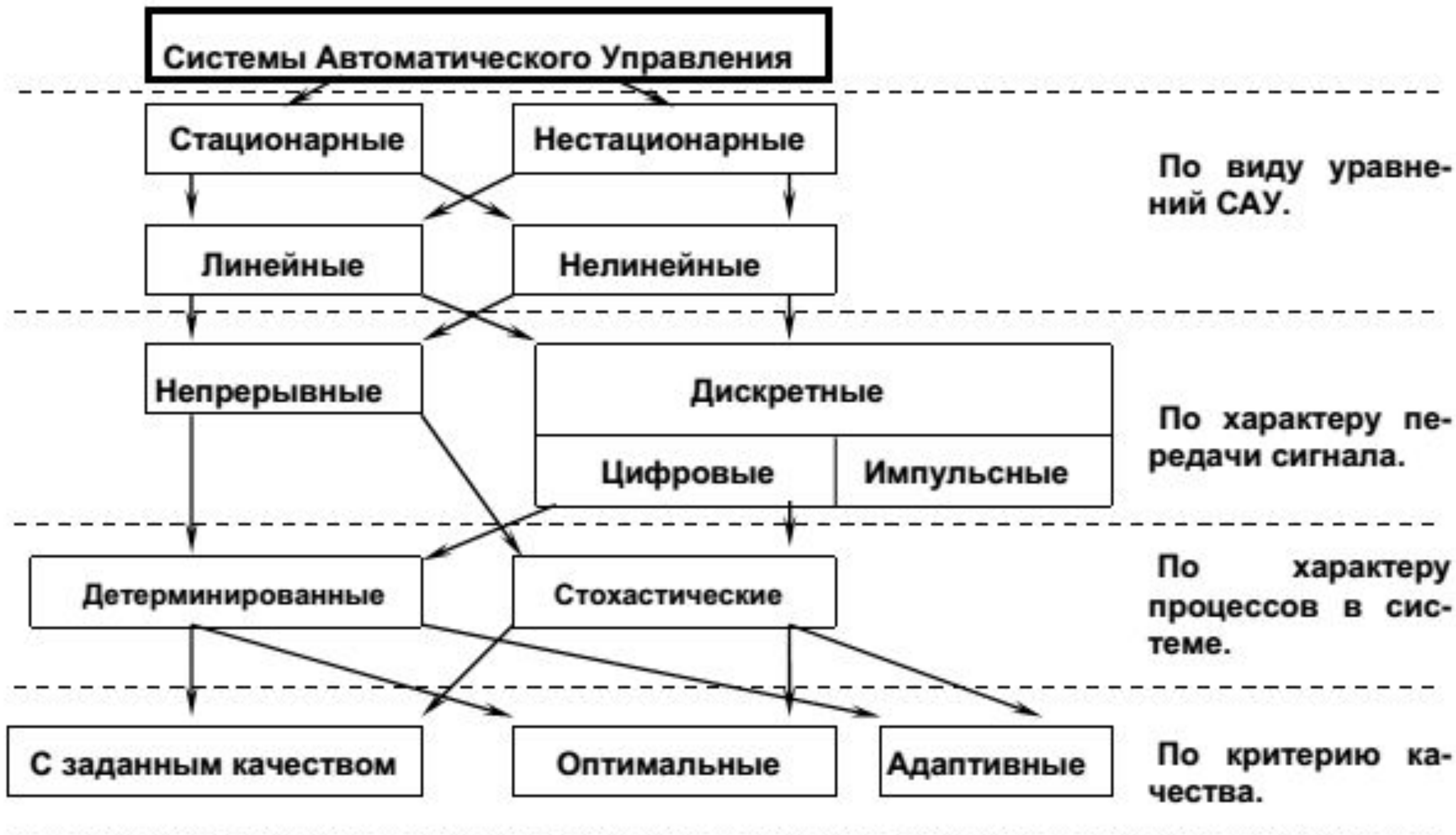


Рис.1.9

Преобразование Лапласа

Определение. *Изображением по Лапласу* комплексно-значной функции $f(t)$ называют функцию комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемую как

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt. \tag{1}$$

Для преобразования (1) используют символическую запись

$$f(t) \risingdotseq F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \fallingdotseq f(t).$$

При этом $f(t)$ называют *функцией-оригиналом* или просто *оригиналом*. Предполагается, что оригинал удовлетворяет следующим трем условиям:

(a) $f(t) \equiv 0$ для $t < 0$;

(b) $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица-Гельдера всюду на оси $t > 0$ за исключением отдельных точек, где оригинал может иметь разрывы первого рода (при этом считается, что на любом конечном интервале таких точек конечное число): для $\forall t > 0$ $\exists A > 0$, $\exists \alpha : 0 < \alpha \leq 1$ и $\exists \tau_0 > 0$ такие, что

$$|f(t+\tau) - f(t)| \leq A\,|\tau|^\alpha \tag{2}$$

для $\forall \tau : |\tau| \leq \tau_0$;

(c) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. $\exists M > 0$ и $\exists s_0 \geq 0$ такие, что для $\forall t > 0$

$$|f(t)| < M e^{s_0 t}. \tag{3}$$

Преобразование Лапласа. Основные свойства

Простейшим оригиналом является единичная функция Хэвисайда

$$1\,(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Преобразование Лапласа. Основные свойства

Приведем ряд простых соотношений, составляющих аппарат операционного метода. Будем обозначать далее через $F(p), G(p), H(p), \ldots$ изображения по Лапласу оригиналов $f(t), g(t), h(t), \ldots$ Нам также для иллюстрации свойств преобразования потребуются изображения по Лапласу простейших оригиналов, а именно, функции Хевисайда (4) и экспоненты. Из (1) легко находим

$$1(t) \risingdotseq \frac{1}{p}, \qquad e^{p_0 t} \risingdotseq \frac{1}{p - p_0}. \tag{8}$$

Перейдем к изучению основных свойств преобразования Лапласа, демонстрируя попутно на примерах технику оперирования ими.

Преобразование Лапласа. Основные свойства

1. Линейность.

Для любых комплексных чисел α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p). \qquad (9$$

Преобразование Лапласа. Основные свойства

В качестве примера найдем изображения простейших тригонометрических функций. В соответствии с формулами Эйлера и соотношениями (8), (9) получаем

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \tag{10}$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Преобразование Лапласа. Основные свойства

2. Теорема подобия.

Для $\forall \alpha > 0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \qquad (11)$$

Доказательство.

Подстановка $f(\alpha t)$ в формулу (1) и замена переменного $\alpha t = \tau$ приводит к результату (11)

$$\int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau/\alpha} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Преобразование Лапласа. Основные свойства

3. Теорема запаздывания.

Для $\forall\tau > 0$

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p). \tag{12}$$

Доказательство.

Поскольку по свойству (a) оригинала: $f(t-\tau) = 0$ для $t < \tau$ (см. Рис. 2), то

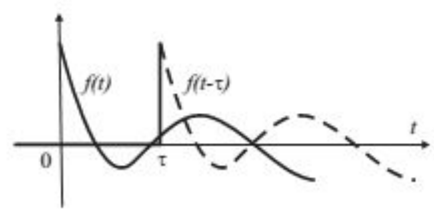


Рис. 2: Запаздывающий оригинал.

$$\int_0^\infty f(t-\tau)\,e^{-pt}dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau)\,e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(\theta)\,e^{-p(\tau+\theta)}d\theta = e^{-p\tau}F(p).$$

Преобразование Лапласа. Основные свойства

Свойство (12) удобно применять для функций, которые на разных участках задаются различными выражениями. Найдем, например, изображение по Лапласу ступенчатой функции. Как видно из Рис. 3, данный оригинал можно

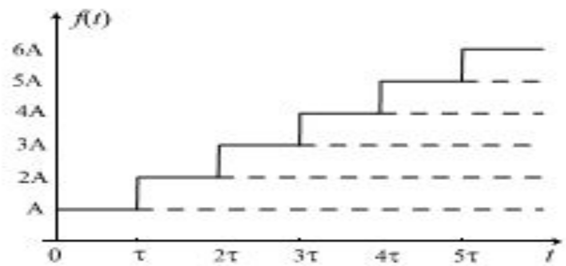


Рис. 3: Ступенчатая функция.

представить в виде суперпозиции запаздывающих функций Хевисайда

$$f(t) = A\left[1(t) + 1(t-\tau) + 1(t-2\tau) + \ldots\right] = A\sum_{n=0}^{\infty} 1(t - n\tau).$$

Тогда в соответствии с формулой (8), свойством линейности (9) и теоремой запаздывания (12), получаем

$$F(p) = A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-pn\tau}}{p} = \frac{A}{p\left(1 - e^{-p\tau}\right)}.$$

При выводе учтено, что знаменатель геометрической прогрессии $|e^{-p\tau}| < e^{-s_0\tau} < 1$.

Преобразование Лапласа. Основные свойства

4. Теорема смещения.

Для любого комплексного числа p_0

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p - p_0). \tag{14}$$

Доказывается свойство (14) элементарно путем подстановки его левой части в интеграл (1).

Преобразование Лапласа. Основные свойства

5. Дифференцирование оригинала.

Если функция $f(t)$ непрерывна при $t > 0$, и $f'(t)$, или в более общем случае $f^{(n)}(t)$, являются оригиналами, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0) \tag{15}$$

или

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0), \tag{16}$$

где под $f^{(k)}(0)$ понимается предел справа в т. $t = 0$

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \to +0} f^{(k)}(t).$$

Преобразование Лапласа. Основные свойства

6. Дифференцирование изображения.

Дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $(-t)$, т.е.

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n f(t)\,. \tag{17}$$

8. Интегрирование оригинала.

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p, т.е.

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}. \tag{23}$$

Преобразование Лапласа. Основные свойства

9. Интегрирование изображения.

Если интеграл $\int_p^\infty F(q)\,dq$ по любому пути, целиком лежащему в области $\operatorname{Re} p > s_0$, сходится, то он является изображением функции $f(t)/t$, т.е.

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(q)\,dq. \tag{25}$$

Преобразование Лапласа. Основные свойства

10. Теорема о свертке.

Эта свойство преобразования Лапласа является одним из важнейших с точки зрения практических приложений. Приведем сначала общее определение свертки двух функций.

Определение. Сверткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$ называют функцию вида

$$f(t) \otimes g(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau, \qquad (27)$$

где символ $\otimes$ является условным обозначением свертки.

Для функций-оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ с учетом того, что $f(t) \equiv 0$ и $g(t) \equiv 0$ для $t < 0$ из соотношения (27) получаем

$$f(t) \otimes g(t) \equiv \int_{0}^{t} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau. \qquad (28)$$

Теорема.

Свертке оригиналов соответствует произведение изображений

$$f(t) \otimes g(t) \risingdotseq F(p)\, G(p)\,. \qquad (29)$$

Преобразование Лапласа. Основные свойства

Рассмотрим несколько примеров на применение теоремы о свертке. В радиотехнических задачах имеют дело с линейными четырехполюсниками (см. Рис.7), задаваемыми импульсной переходной характеристикой $h(t)$. При этом

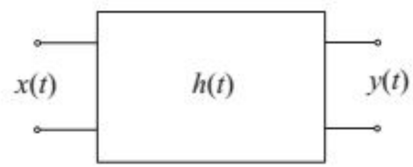


Рис. 7: Линейный четырехполюсник.

сигнал $y(t)$ на выходе четырехполюсника может быть выражен через входной сигнал $x(t)$ с помощью интеграла Дюамеля

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau, \tag{30}$$

представляющего собой свертку (28) функций $h(t)$ и $x(t)$. Как видно из (30), $h(t)$ представляет собой отклик системы на короткий δ-импульс $x(t) = \delta(t)$. В соответствии с теоремой (29) из (30) получаем простую алгебраическую связь изображений входного и выходного сигналов

$$Y(p) = K(p)\, X(p), \tag{31}$$

где $K(p) \risingdotseq h(t)$ называют коэффициентом передачи линейного четырехполюсника.

Преобразование Лапласа. Основные свойства

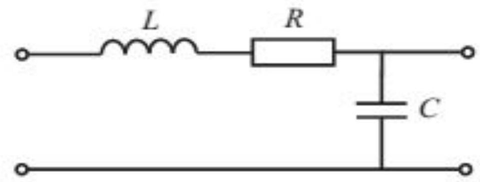


Рис. 8: Простейшая LRC-цепочка.

(см. Рис.8), учитывая уравнения связи напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ на индуктивности L и емкости C

$$u = L\frac{di}{dt}, \qquad i = C\frac{du}{dt}$$

и теорему о дифференцировании оригинала (15), можно заменить указанные инерционные элементы эквивалентными комплексными сопротивлениями pL и $1/(pC)$ соответственно. В результате расчет фильтра сводится к расчету цепочки из трех сопротивлений, и мы получаем

$$K(p) = \frac{1/(pC)}{pL + R + 1/(pC)} = \frac{1}{p^2LC + RCp + 1}.$$

Преобразование Лапласа. Основные свойства

Теорема о свертке эффективно применяется и к решению интегральных уравнений вида

$$y(t) - \lambda \int_0^t g(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau = f(t),$$

называемых интегральными уравнениями Вольтерра 2-го рода с разностным ядром. Применяя к обеим частям уравнения преобразование Лапласа и учитывая теорему о свертке (29), легко находим изображение неизвестного решения

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda G(p)}.$$

Отыскание оригиналов дробно-рациональных изображений

- Для нахождения оригинала по известному изображению , где есть правильная рациональная дробь, применяют следующие приемы.
-
- $F(p)$
- **1.** Эту дробь разлагают на сумму простейших дробей и находят для каждой из них оригинал, пользуясь свойствами преобразования Лапласа.
-
- **2.** Находят полюсы этой дроби и их кратности . Тогда оригиналом для будет функция F(p),
- где сумма берется по всем полюсам функции .

$(p - p_k$

Отыскание оригиналов дробно-рациональных изображений

$$f(t) := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim \frac{d^{n_{k-1}}}{dp^{n_{k-1}}} [F(p)(p - p_k)^{n_k} e^{pt}]$$

- (16)

Отыскание оригиналов дробно-рациональных изображений

- В случае, если все полюсы функции простые, т.е. , последняя формула упрощается и принимает вид
- $$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\,e^{p_k t}.$$
- (17)

Пример 1.

- Найти оригинал функции f(t), если

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$$

Решение. Первый способ (сл1).

- Представим в виде суммы простейших дробей
- $$\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C_p + D}{p^2+4}$$
-

и найдем неопределенные коэффициенты A,B,C,D.

Решение. Первый способ (сл2).

- Имеем

$$p+2=A(p-2)(p^2+4)+B(p+1)(p^2+4)+(C_p+D)(p+1)(p-2).$$

Полагая в последнем равенстве последовательно $p=-1,\ p=2,\ p=2i$

- получим

$$-15A=1,\quad 24B=4,\quad (2Ci+D)(2i+1)(2i-2)=2+2i\,,$$

Решение. Первый способ (сл3).

- откуда

$$A = -\frac{1}{15},\ B = \frac{1}{6},\ C = -\frac{1}{10},\ D = -\frac{2}{5}$$

Решение. Второй способ. (сл1)

- Найдем полюсы p_k функции $F(p)$

Они совпадают с нулями знаменателя

$$B(p) = (p+1)(p-2)(p^2+4)$$

Таким образом, изображение $F(p)$ имеет четыре простых полюса

$$p_1 = -1, \quad p_2 = 2, \qquad p_{3,4} = \pm 2i$$

Пользуясь формулой

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\, e^{p_k t}.$$

получаем оригинал

Пример 2.

- Найти оригинал $f(t)$ если

$$F(p) = \frac{p+2}{p^3(p-1)^2}$$

Решение примера 2.

- Данная дробь $F(p)$ имеет полюс $p_1 = 0$ кратности $n_1 = 3$
- и полюс $p_2 = 1$ кратности $n_2 = 2$
- . Пользуясь формулой (16)

$$f(t) := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim \frac{d^{n_{k-1}}}{dp^{n_{k-1}}} [F(p)(p - p_k)^{n_k} e^{pt}]$$

- получаем оригинал