

Лекция 3

Координатный метод

Нижельский С.С.,
ст. преп. каф. СИУ

Новокузнецк, 2008

Координатный метод

Координатный метод был введен в XVII веке французскими математиками Р. Декартом и П.Ферма

- каждая точка (пиксел) на экране монитора, на листе бумаги при печати задается координатами
- любой объект находится в пространстве и описывается своими координатами
- при изменении положения объекта в пространстве изменяются его координаты

Преобразование координат

Пусть задана n -мерная система координат в базисе $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)$, которая описывает положение точки в пространстве с помощью числовых значений k_i

Если задать другую, N -мерную, систему координат в базисе $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_N)$ и поставить задачу определения координат в новой системе, зная координаты в старой, то решение можно записать в таком виде (1)

$$\begin{cases} m_1 = f_1(k_1, k_2, \dots, k_n), \\ m_2 = f_2(k_1, k_2, \dots, k_n), \\ \dots \\ m_N = f_N(k_1, k_2, \dots, k_n), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} k_1 = F_1(m_1, m_2, \dots, m_N), \\ k_2 = F_2(m_1, m_2, \dots, m_N), \\ \dots \\ k_n = F_n(m_1, m_2, \dots, m_N), \end{cases} \quad (2)$$

где f_i – функция пересчета i -ой координаты

Обратная задача: по известным координатам $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_N)$ определить координаты $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)$, записывается в виде (2)

где F_i – функция обратного преобразования

Преобразование координат

По виду функции преобразования различают линейные и нелинейные преобразования

Если при всех $j=1, 2, \dots, N$ функции f_j – линейные относительно (k_1, k_2, \dots, k_n) , то есть

$$f_j = a_{j1}k_1 + a_{j2}k_2 + \dots + a_{jn}k_n + a_{jn+1},$$

где a_{ji} – константы, то такие преобразования называются

линейными, а при $n=N$ – **аффинными**

Если хотя бы при одном j функция f_j – нелинейная относительно (k_1, k_2, \dots, k_n) , тогда преобразование координат в целом является

нелинейным

Преобразование координат

Линейные преобразования наглядно записываются в матричной форме

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & \dots & a_{Nn} & a_{Nn+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_N \end{bmatrix}$$

т.е. матрица коэффициентов \mathbf{a}_{ij} умножается на матрицу-столбец \mathbf{k}_i , и в результате будем иметь матрицу-столбец \mathbf{m}_i

Аффинные преобразования на плоскости

Зададим некоторую двумерную систему координат (x, y) . Аффинное преобразование на плоскости описывается формулами

$$\begin{cases} X = Ax + By + C, \\ Y = Dx + Ey + F, \end{cases}$$

где A, B, \dots, F – константы. Значение (X, Y) можно рассматривать как координаты в новой системе координат

Обратное преобразование (X, Y) в (x, y) также является аффинным:

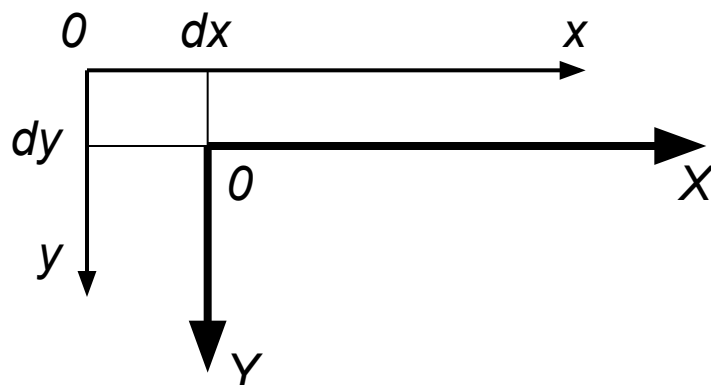
$$\begin{cases} x = A'X + B'Y + C', \\ y = D'X + E'Y + F', \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Аффинные преобразования на плоскости

1. Параллельный сдвиг координат



$$\begin{cases} X = x - dx, \\ Y = y - dy. \end{cases}$$

В матричной форме:

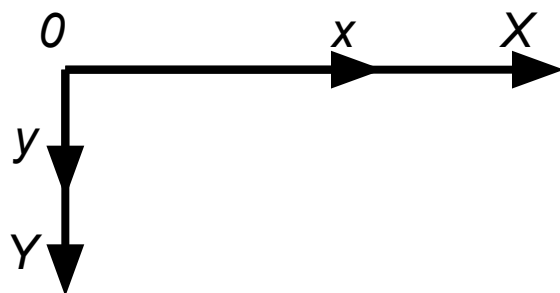
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X + dx, \\ y = Y + dy, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аффинные преобразования на плоскости

2. Растяжение-сжатие осей координат



$$\begin{cases} X = x / k_x, \\ Y = y / k_y. \end{cases}$$

В матричной форме:

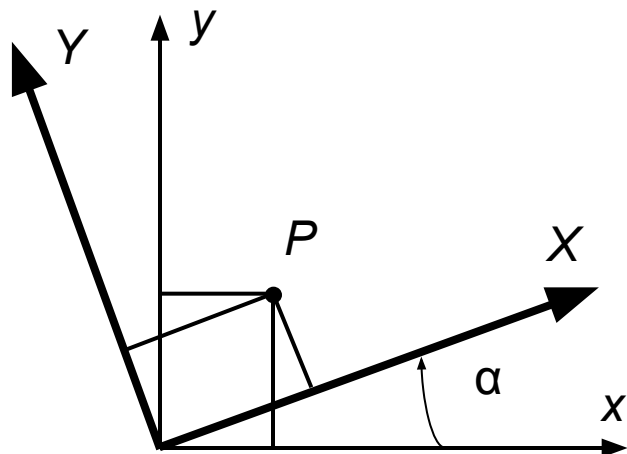
$$\begin{bmatrix} 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = Xk_x, \\ y = Yk_y, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аффинные преобразования на плоскости

3. Поворот



$$\begin{cases} X = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ Y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Трёхмерные аффинные преобразования

В общем виде записываются

$$\begin{cases} X = Ax + By + Cz + D, \\ Y = Ex + Fy + Gz + H, \\ Z = Kx + Ly + Mz + N, \end{cases}$$

где A, B, \dots, N – константы

В матричном виде

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ K & L & M & N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Трёхмерные аффинные преобразования

1. Сдвиг осей координат соответственно на dx , dy , dz :

$$\begin{cases} X = x - dx, \\ Y = y - dy, \\ Z = z - dz, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & 0 & -dy \\ 0 & 0 & 1 & -dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

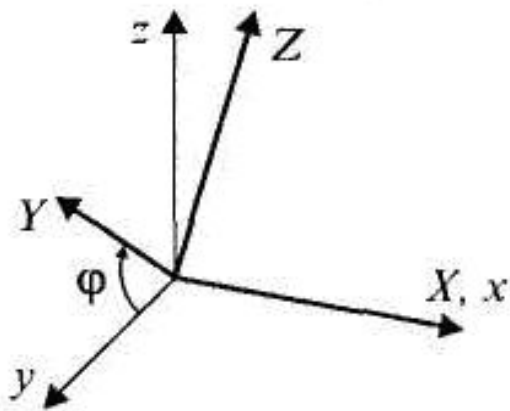
2. Растяжение/сжатие на k_x , k_y , k_z :

$$\begin{cases} X = x / k_x, \\ Y = y / k_y, \\ Z = z / k_z, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1/k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Трёхмерные аффинные преобразования

3. Повороты – в трёхмерном пространстве существует больше разновидностей поворота, сравнительно с двумерным пространством

Поворот вокруг оси x на угол ϕ



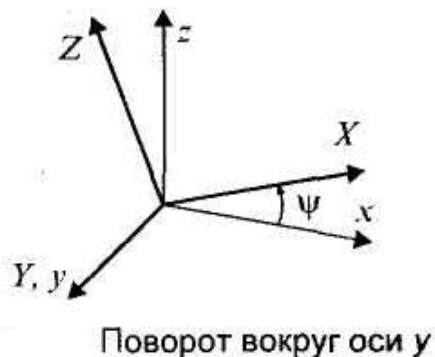
Поворот вокруг оси x

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y \cos\phi + z \sin\phi, \\ Z = -y \sin\phi + z \cos\phi, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Трёхмерные аффинные преобразования

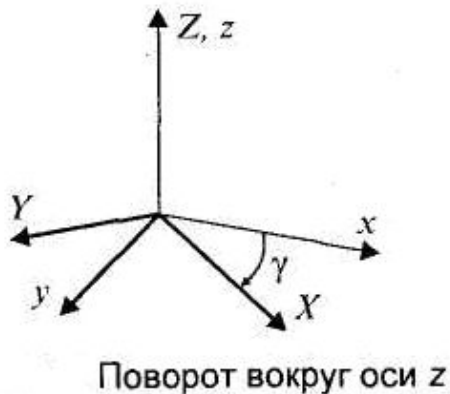
Поворот вокруг оси y на угол ψ



$$\begin{cases} X = x \cos\psi + z \sin\psi, \\ Y = y, \\ Z = -x \sin\psi + z \cos\psi, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот вокруг оси z на угол γ



$$\begin{cases} X = x \cos\gamma + y \sin\gamma, \\ Y = -x \sin\gamma + y \cos\gamma, \\ Z = z, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$