Основные формулы

комбинаторики

- Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества.

Размещения с повторениями.

Кортеж-множество где каждый элемент стоит на своем месте и не повторяется.

Кортежи длины k, составленные из элементов m – элементного множества x, называют размещениями с повторениями из m элементов по k. Число этих кортежей обозначают $\bar{A}^k_m$. Рассчитывают по формуле:

$$\bar{A}^k_m = m^k.$$

Задача:

Сколько пятизначных номеров можно составить из девяти цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9?

Решение:

Такие номера являются кортежами длины 5, составляем из этих элементов множества X={ 1,2,3,4,5,6,7,8,9}. По формуле

$\bar{A}^k_m = m^k$ рассчитываем:

$\bar{A}^5_9 = 9^5 = 6561$.

Ответ: 6561.

Размещения без повторений.

Упорядоченное множество длины k, составленное из элементов m – элементного множества X, называют размещениями без повторений из m элементов множества X по k. Рассчитывают по формуле:

N!=1*2*3*…*n, где 0!=1.

$$A^k_m = \frac{m!}{(m-k)!}$$

Задача:

Сколькими способами можно выбрать из класса, насчитывающего 40 учеников, старосту, комсорга и физорга.

Решение:

Любой такой выбор является размещением без повторений из 40 элементов по 3 (он задается кортежем длины 3 без повторений, составленным из элементов множества учеников). Значит, число способов выбора равно

$$\mathbf{A^3_{40}=40!\ /\ 37! = 59280.}$$

Ответ:59280.

Перестановки с повторениями.

Перестановки с повторениями состава ($k_1,\dots,k_m$) из букв ($a_1,\dots,a_m$) называют любой кортеж длины $k= k_1+k_2+\dots+k_m$, в которой буква a_1 входит в k_1 раз, …, буква a_m – k_m раз. Число таких перестановок обозначается $P(k_1,\dots,k_m)$. Рассчитывается по формуле:

$$P(k_1,\dots,k_m) = \frac{(k1+k2+\dots kn)!}{k1!k2!..kn!}$$

Задача:

Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

Решение:

Слово «математика» является кортежем длины 10, имеющим состав (2, 3, 2, 1, 1, 1) (буква «м» входит 2 раза, буква «а» - раза, буква «т» - 2 раза, буквы «е», «и», «к» - по одному разу).

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151200.$$

Ответ: 151200

Перестановка без повторений.

Перестановка без повторений из m – элементов называют размещением без повторений из этих элементов по m. Число перестановок обозначают P_m.
Рассчитывают по формуле:

$$P_m = m!$$

Задача:

Сколькими способами 6 человек могут сесть в 6 машин?

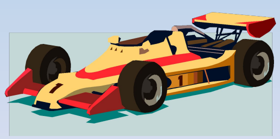
Решение:

Пронумеруем машины числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и обозначим человека, севшего в k –тую машину через X_k. Тогда $(x_1,\ldots,x_6)$ – перестановка из имен этих шести людей, причем каждой такой перестановке соответствует один и только один способ размещения в машинах, следовательно:

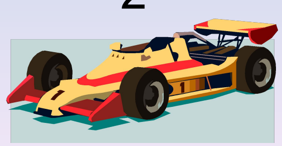
$$P_6 = 6! = 720$$

Ответ: 720.

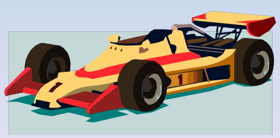
1



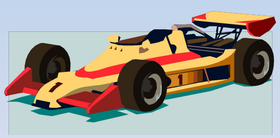
2



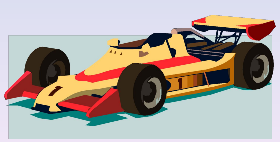
3



4



5



6

Сочетание с повторениями.

Имеются предметы m видов и из них составляется набор, содержащие k элементов. Два таких набора считаются одинаковыми в том и только в том случае, когда они имеют одинаковый состав. Такие наборы называются сочетаниями с повторениями из m элементов по k. Рассчитываются по формуле:

$$\bar{C}^k_m = C^k_{k+m-1}$$

Задача:

Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеются 4 сорта пирожных?

Решение:

Искомое число равно: $\bar{C}^7_4$ т.е. C^7_{7+4-1} следовательно:

$$\bar{C}^7_{10} = C^3_{10} = (10*9*8) / (1*2*3)=120$$

Ответ: 120.

Сочетания без повторений.

K – элементные подмножества m-элементного множества x называют сочетаниями без повторений из элементов этого множества по K. Их число обозначают C^k_m. Рассчитывают по формуле:

$$C^k_m = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

Задача:

Сколькими способами можно выбрать один цветок из 5 роз и 3 водяных лилий?

Решение:

$$C^1_5 = \frac{5!}{1!4!} = 5$$

$$C^1_3 = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

$C^1_3 + C^1_5 = 3 + 5 = 8$ способов

Ответ: 8 способов.

Бином Ньютона.

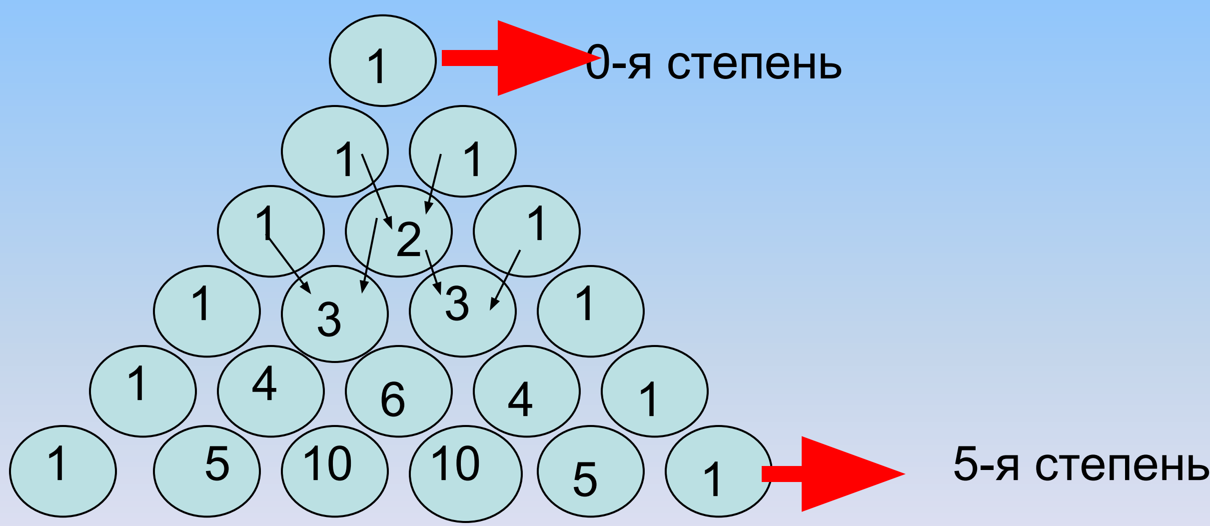
Формула: $(x-a)^n=x^n-nax^{n-1}+C^2_n a^2x^{n-2}-C^3_n a^3x^{n-3}+\ldots+(-1)^kC^k_r a^kx^{n-k}+\ldots+(-1)^na^n$.

Пример: Найдите разложения: а) $(2y^2-3y)^5$; б) $(1-\sqrt{2})^6$

Решение: а) $y^5(2y-3)^5 = y^5(32y^5 - 16y^4*5*3 + 8y^3*10*9 - 4y^2*10*27 + 2y*5*81 -$
$- 243) = 32y^{10} - 240y^9 + 720y^8 - 1080y^7 + 810y^6 - 243y^5;$

б) $1 - 6\sqrt{2} + 15*2 - 20*2\sqrt{2} + 15*4 - 6*4\sqrt{2} + 8 = 99 - 70\sqrt{2}$.

Для нахождения коэффициентов в биноме Ньютона удобно использовать треугольник Паскаля.



Коэффициент в разложении многочлена легко искать с помощью треугольника Паскаля.

$(x-a)^3=x^3-3x^2a+3a^2x-a^3$