…Человек, не знающий математики, не способен ни к каким другим наукам.

Более того, он даже не способен оценить уровень своего невежества, а потому не ищет от него лекарства.

Роджер Бэкон (1214–1292)

Элементы комбинаторики

Комбинаторику можно рассматривать как часть теории множеств – любую комбинаторную задачу можно выразить, используя понятие конечного множества.

Характерной чертой комбинаторных задач является то, что в них речь идет всегда о конечном множестве элементов.

Комбинаторика – область математики, в которой изучают вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных ряду условий, можно составить из конечного числа заданных объектов (XVII век).
Можно сказать, что комбинаторика изучает способы выборки и расположения предметов, свойства различных конфигураций, которые можно образовать из элементов, причем элементами могут быть числа, точки, отрезки, шахматные фигуры ...

Правило суммы

Если элемент a из конечного множества можно выбрать m способами, а элемент b – n способами, причем любой выбор элемента a не совпадает с каким-нибудь способом выбора элемента b, то выбор «a или b» можно осуществить $m + n$ способами.

Правило суммы можно распространить на выбор любого конечного числа элементов.

Правило произведения

Если элемент ***a*** из конечного множества можно выбрать ***m*** способами и после этого элемент ***b*** может быть выбран ***n*** способами, то выбор «***a*** **и** ***b***» может быть осуществлен ***m·n*** способами.

Правило верно для выбора любого конечного числа элементов.

Пример: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр **2, 4, 5**, если цифры в числе не повторяются?

На месте сотен поставим любую из трех цифр - тремя способами. На месте десятков можно поставить любую из двух оставшихся цифр (двумя способами), так как цифры в числе не повторяются. На месте единиц можно поставить оставшуюся цифру. Применяя правило произведения два раза:

$3 \times 2 \times 1 = 6$ шесть трехзначных чисел.

Пример: Сколько различных «слов» (последовательностей букв) не менее чем из пяти различных букв, можно образовать из слова «**рисунок**»?

Решение: «Рисунок» состоит из семи различных букв. Применяем правило произведения:

$N1 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$ «слов» из пяти букв (выбираемых из букв слова «рисунок»),

$N2 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5040$ «слов» из шести,

$N3 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ «слов» из семи.

Тогда $N = N1 + N2 + N3 = 2520 + 5040 + 5040 = 12\,600$ «слов», состоящих не менее чем из пяти букв слова «рисунок».

Пример. В чемпионате страны по шахматам принимает участие 16 человек. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

Решение. Золотую медаль может получить один из 16 шахматистов. После того, как определен победитель, серебряную медаль может иметь один из 15-ти человек.

Общее количество способов, которыми могут быть распределены золотая и серебряная медали

$$\mathbf{16 \cdot 15 = 240.}$$

Обозначим символом: ***n*!** («**эн *факториал***») – число, равное произведению натуральных чисел от 1 до ***n***.

$1! = 1;$ $2! = 1 \times 2 = 2;$ $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6;$

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24;$ По определению $0! = 1$.

Рассмотрим некоторое множество, состоящее из ***n*** различных элементов.

Если в множестве введено отношение порядка, т.е. определено какой элемент множества за каким следует или какому предшествует, то множество называют **упорядоченным**.

Перестановки

Пример. Пусть даны три буквы: **A, B, C.** Составим все возможные

упорядоченные множества из этих букв:

ABC; BCA; CBA; ACB; BAC; CAB.

Этих множеств получилось 6 штук и они отличаются только порядком

расположения букв (т.е. упорядоченные).

Упорядоченные множества из **n** элементов наз. **перестановками из n элементов.**

Таким образом, перестановки из **n** элементов отличаются только порядком следования элементов. Число перестановок из **n** элементов обозначается: $\mathbf{P_n}$. (**P** – от английского слова «permutation» – перестановка)

Общее число различных перестановок из **n** объектов равно:

$$P_n = n!$$

Упорядоченные подмножества из **n** элементов по **k** элементов каждое наз. **размещениями из n элементов по k элементов** .

Таким образом, размещения отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число таких размещений обозначим A_n^k .

A – от англ. «arrangement» – размещение.

Число размещений равно:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример. В пятом классе изучают 8 учебных предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на пятницу, если в этот день недели должно быть 5 различных уроков?

Решение. Различных способов составления расписания столько, сколько существует пятиэлементных упорядоченных подмножеств у восьмиэлементного множества - число способов равно числу размещений из 8 элементов по 5, т.е. (n=8; k=5):

$$A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} =$$

$$= 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 6720$$

Пример.

Сколько сочетаний длиной в 4 буквы можно составить из 33 букв русского алфавита, при условии, что все буквы различны.

Решение.

$$A_{33}^{4}=\frac{33!}{(33-4)!}=\frac{1\cdot 2\cdot \ldots\ \cdot 29\cdot 30\cdot 31\cdot 32\cdot 33}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\ \cdot 27\cdot 28\cdot 29}=30\cdot 31\cdot 32\cdot 33$$

Пример. Сколькими способами можно рассадить 4-х студентов на 25-ти местах?

Решение.

$$A_{25}^{4} = \frac{25!}{(25-4)!} = \frac{25!}{21!} =$$

$$= 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$$

Сочетания

Пример.

Пусть даны три буквы: **А, В, С**. Составим подмножества из двух элементов:

АВ; АС;   ВС.

Изменение порядка букв внутри этих подмножеств не приводит к новому подмножеству.

Этих подмножеств получилось **3** штуки.

Подмножества из **n** элементов по **k** элементов каждое, отличающиеся хотя бы одним элементом, наз. **сочетаниями из n элементов по k элементов**.

Таким образом, сочетания <u>отличаются только составом элементов</u>.

Число сочетаний из **n** по **k** обозначается: C_n^k

C – от англ. «combination» – сочетание. Этот вид комбинаций дал название всему разделу математики. Общее число сочетаний равно:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Пример. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 3-х человек, можно образовать из 7-ми преподавателей?

Решение. Количество трехэлементных подмножеств у семиэлементного множества (n=7; k=3):

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} =$$

$$= \frac{5\cdot 6\cdot 7}{3!} = 35$$

Задание №6. (Выбрать вариант ответа)

Количество разных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 томов из 12 томного собрания сочинений Л. Толстого, равно …

Варианты ответов: **1) 24** **2) 132**

3) 66 **4) 2**

Ответ: пункт № 3, т.е. количество сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2! \cdot (12-2)!} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = \frac{11 \cdot 6}{1} = 66$$

<u>Задание №7</u> (Выбрать один вариант ответа)

Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, входящих в слово «WORD», равно …

<u>Варианты ответов:</u>

1) 16 **2) 20**

2) 24 **4) 8**

<u>Ответ:</u> пункт № 3, т.е. количество перестановок

$$\mathbf{P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.}$$

Задание №8 (Выбрать один вариант ответа)

Количество различных двузначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 (все цифры различны) равно …

Варианты ответов:

1) **6** 2) **24**

3) **4** 4) **12**

Ответ: пункт №4., т.е. количество размещений

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2} = 3\cdot 4 = 12$$

Домашнее задание:

1. Сколькими способами можно разместить на полке четыре книги?

2. Сколькими способами читатель может выбрать три книги из пяти?

3. Сколькими способами могут быть присуждены 1-я, 2-я и 3-я премии трем лицам, если в финале конкурса число соревнующихся равно шести?

Ответ на домашнее задание

1. $P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

2. $$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

3. $$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$$

<u>Задача 8</u> Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

<u>Решение:</u> для наглядности обозначим число звёздочками: ***

Комбинации будем считать по разрядам – *слева направо*:

В *разряд сотен* можно записать любую из $C_9^1 = 9$ **цифр (1, 2…9). Ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным. А вот в *разряд десятков* («посерединке») можно выбрать любую из 10 цифр:** $C_{10}^1 = 10$ **.**

По условию, число должно делиться на 5. Число делится на 5, если оно заканчивается на 5 или 0. Тогда в младшем разряде нас устраивают 2 цифры. $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2$

Итого, существует: $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2 = 9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$

трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

Или : «каждая из 9 цифр в *разряде сотен* комбинируется с каждой из 10 цифр *разряда десятков* и с каждой из 2-х цифр в *разряде единиц*».