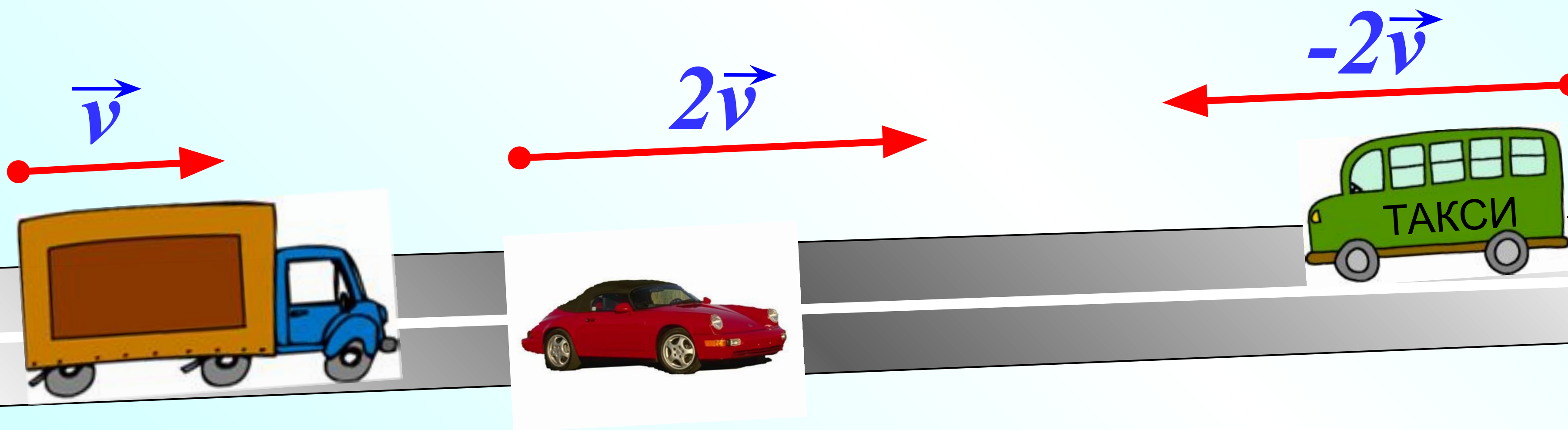
Савченко Е.М., учитель математики,
МОУ гимназия №1, г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Умножение вектора на число

Л.С. Атанасян "Геометрия 7-9"

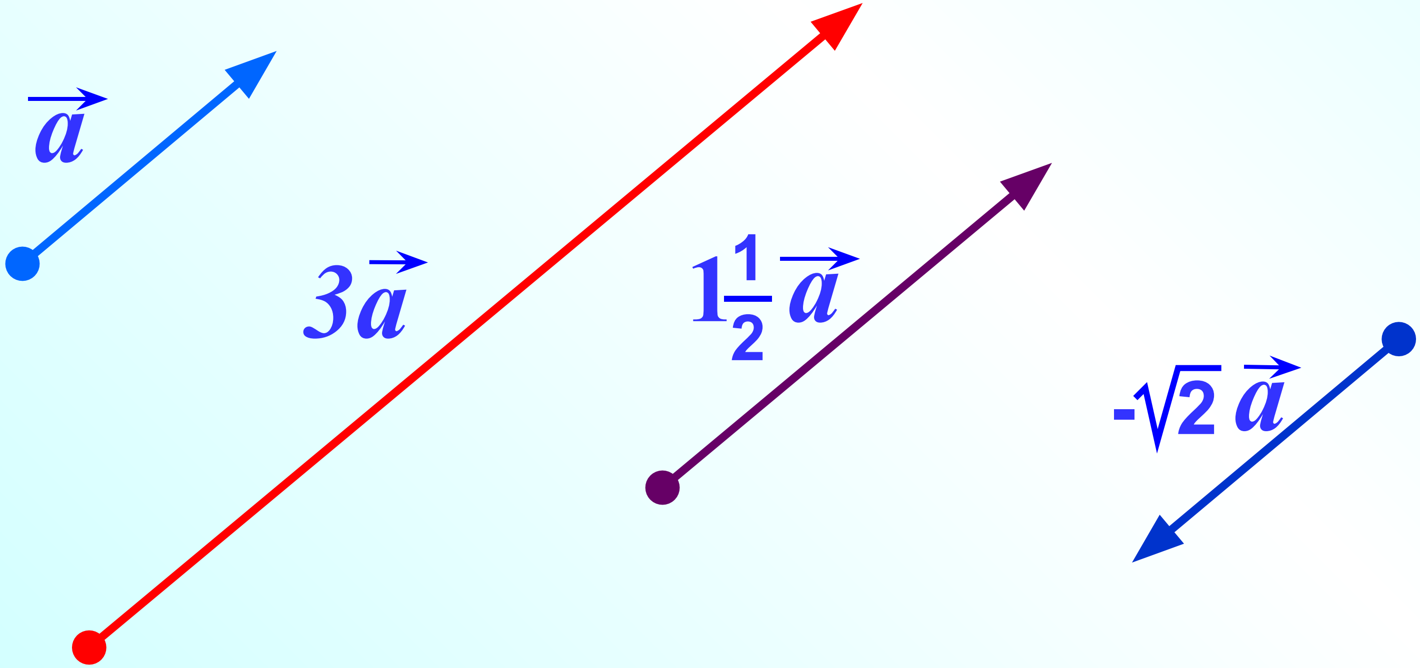
Прежде, чем ввести ещё одно действие – умножение вектора на число, обратимся к примеру. Представим себе, что один автомобиль движется прямолинейно с постоянной скоростью $\vec{v}$, второй движется в том же направлении со скоростью, вдвое большей, а третий автомобиль движется им навстречу, т.е. в противоположном направлении, и величина его скорости такая же, как у второго автомобиля.

Естественно считать, что вектор $2\vec{v}$ получается умножением вектора $\vec{v}$ на число 2, а вектор $-2\vec{v}$ получается умножением вектора $\vec{v}$ на число -2. Этот пример показывает, каким образом следует ввести умножение вектора на число.

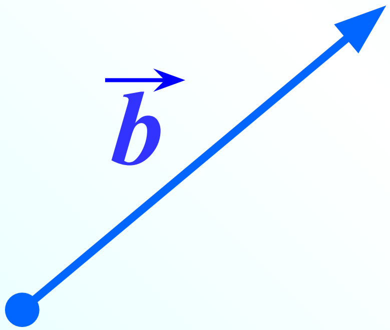


Умножение вектора на число.

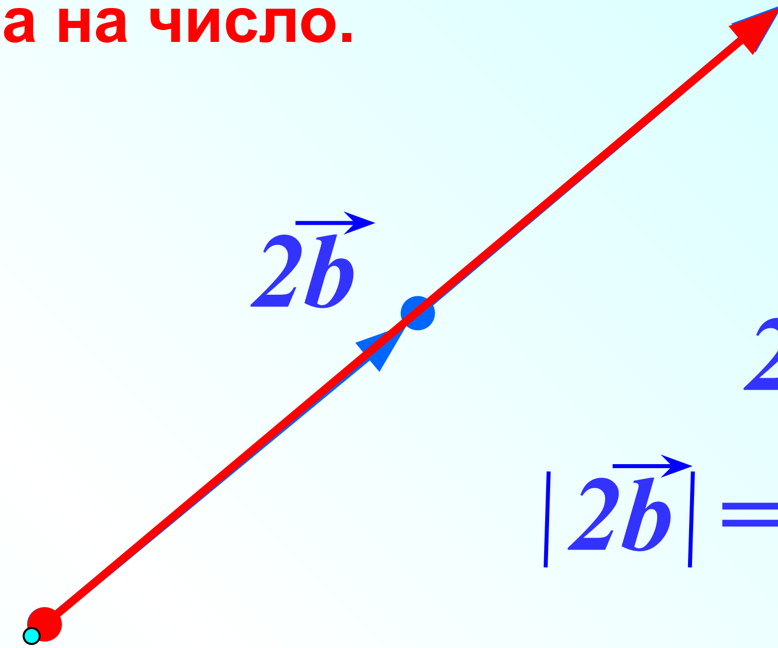
Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k<0$.



Умножение вектора на число.



$\vec{b}$



$2\vec{b}$

$$2\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

$$|2\vec{b}| = |2| \cdot |\vec{b}|$$

$\vec{a}$

$-\frac{1}{2}\vec{a}$

$$-\frac{1}{2}\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$$

$$\left|-\frac{1}{2}\vec{a}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| \cdot |\vec{a}|$$

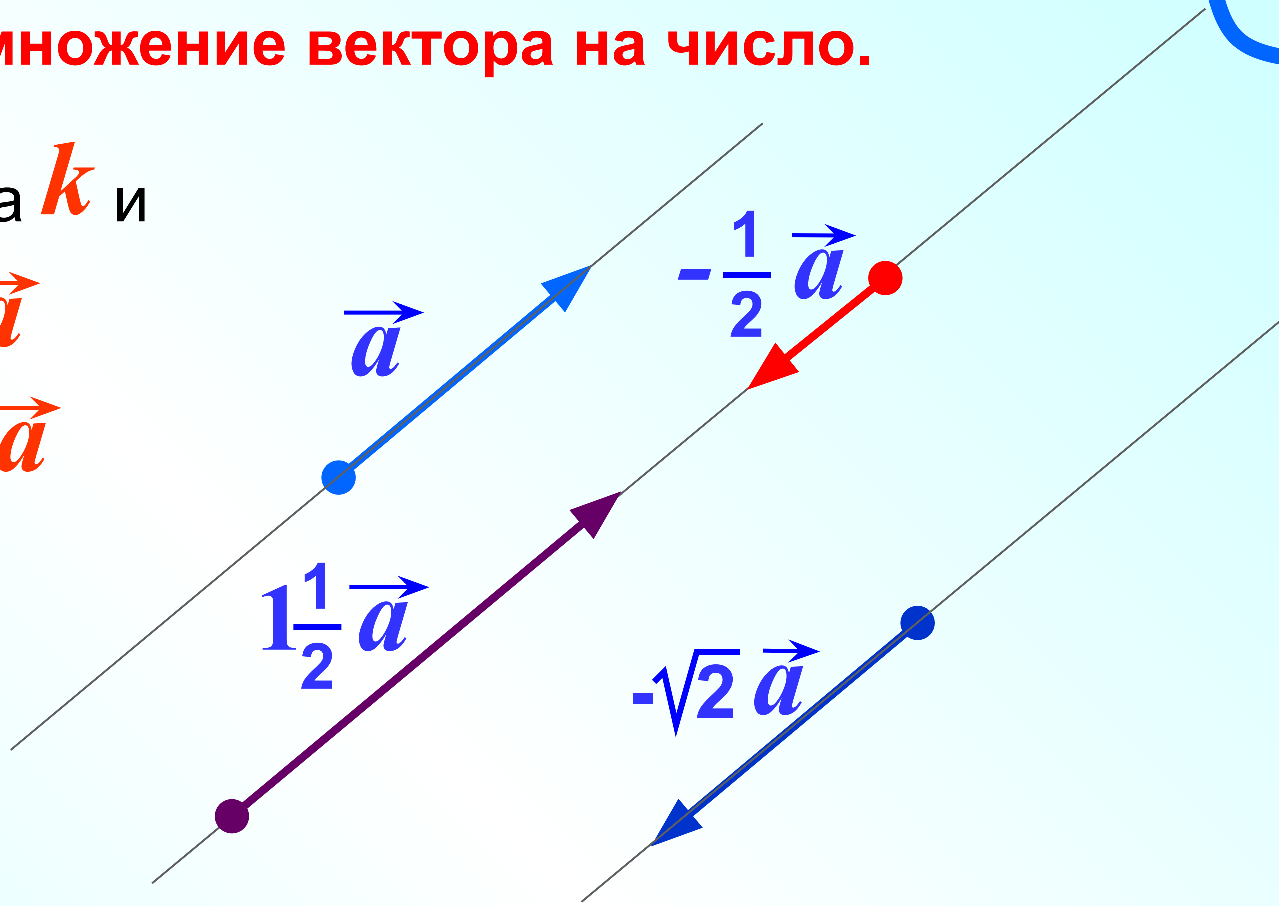
Умножение вектора на число.

Для любого числа k и

любого вектора $\vec{a}$

векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$

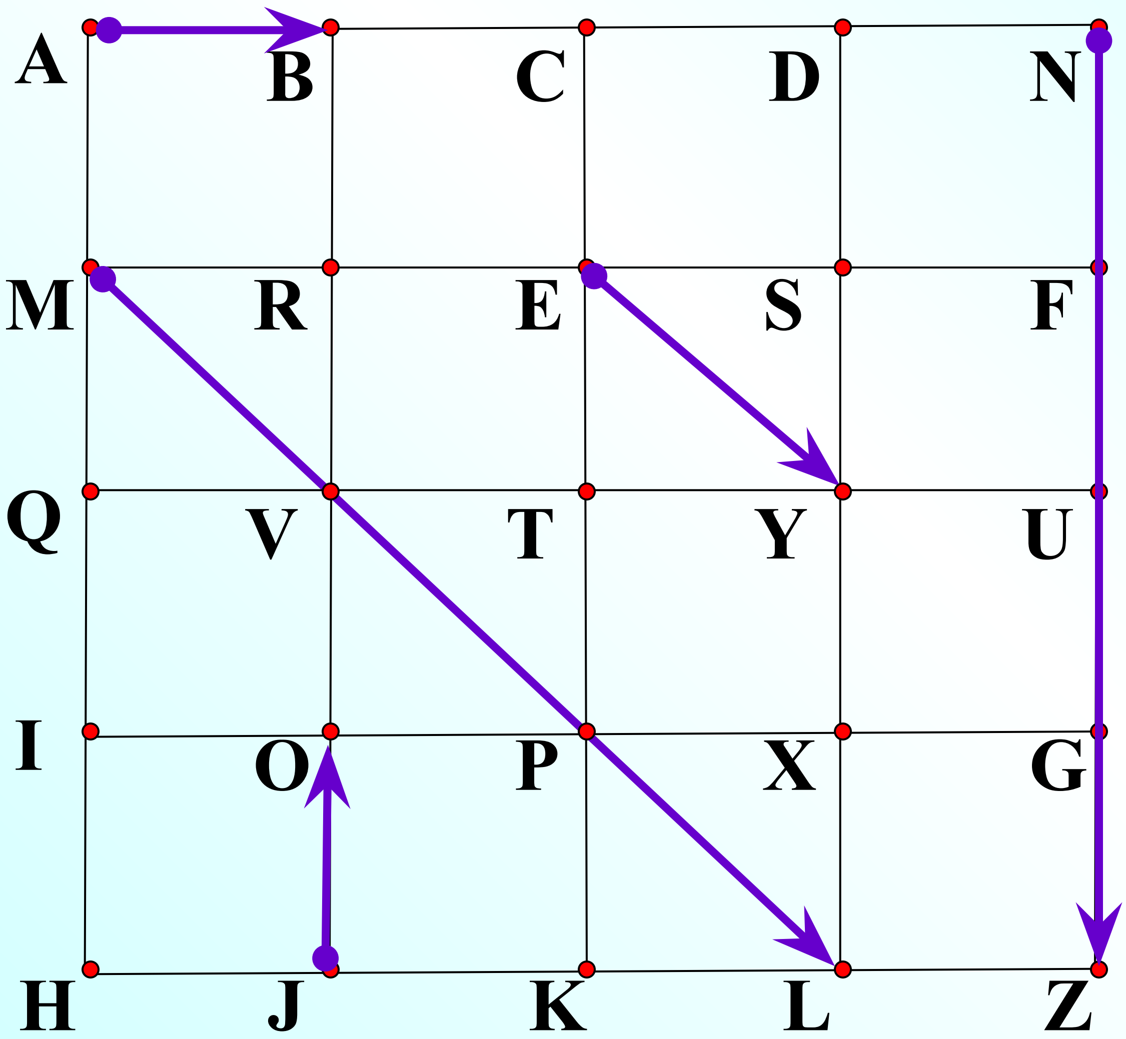
коллинеарны.



Произведение нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор. $k \cdot \vec{o} = \vec{o}$

Произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор. $o \cdot \vec{a} = \vec{o}$

Назовите вектор, который получится в результате умножения.



$$\overrightarrow{JO}\cdot 3$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{ML}$$

$$4\overrightarrow{AB}$$

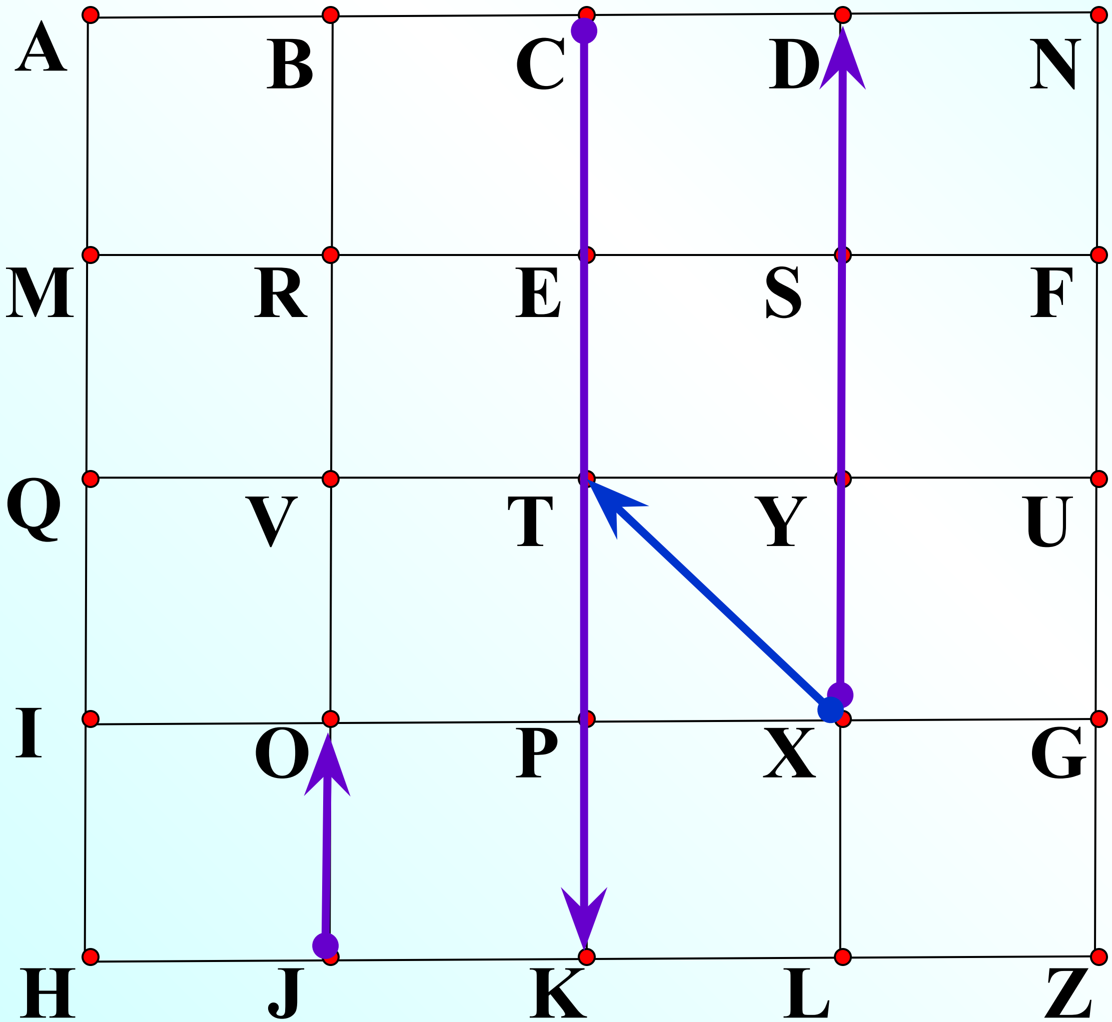
$$-4\overrightarrow{EY}$$

$$-\frac{3}{4}\overrightarrow{NZ}$$

$\overrightarrow{CK} = -4 \cdot \overrightarrow{JO}$

$\overrightarrow{JO} = -\frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{CK}$

$\overrightarrow{XD} = -\frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{CK}$



$\overrightarrow{NN} = 0 \cdot \overrightarrow{XD}$

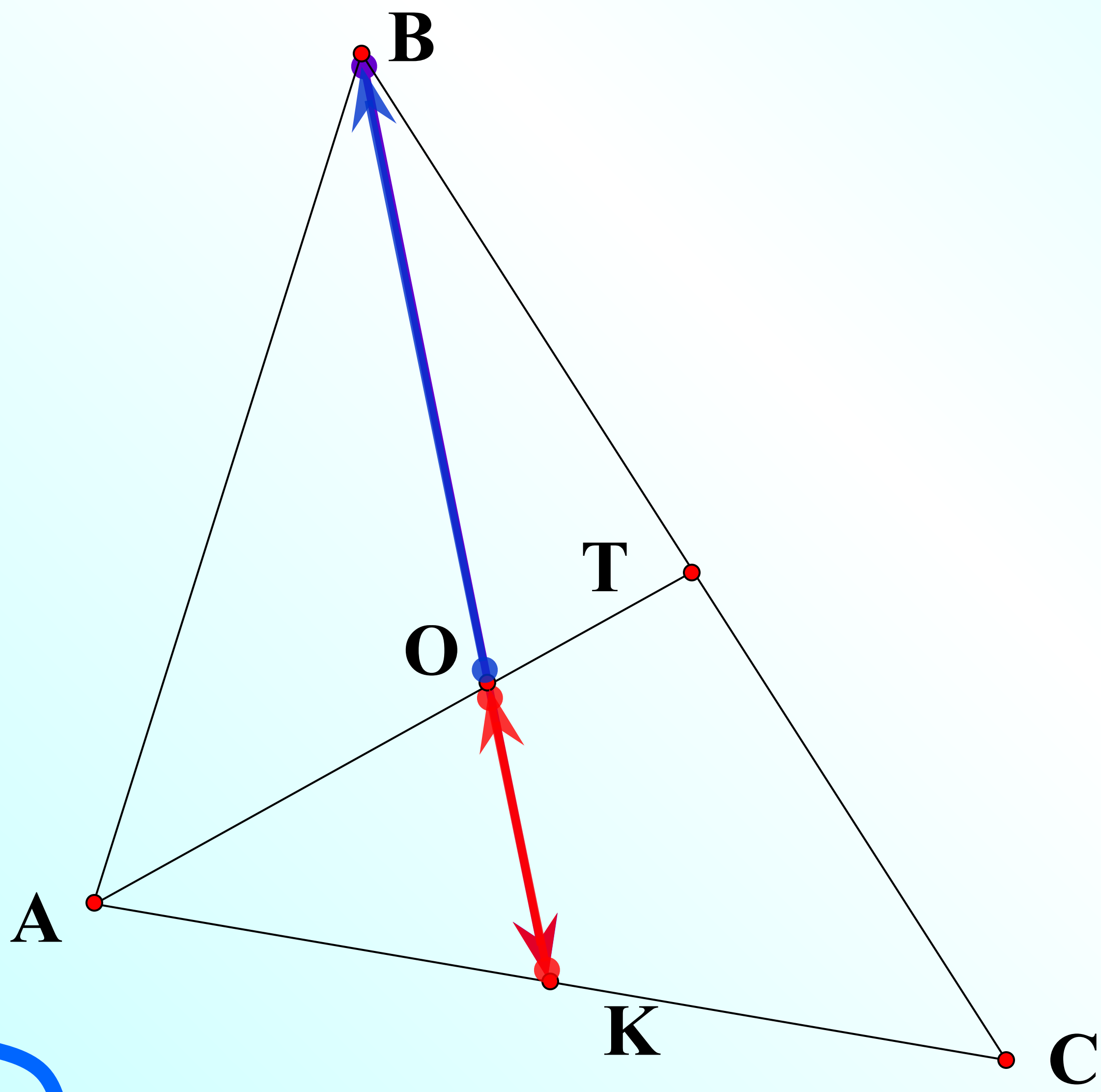
$\overrightarrow{XT} = x \cdot \overrightarrow{XD}$

x не существует

$\overrightarrow{XT} = 1 \cdot \overrightarrow{XT}$

$\overrightarrow{TX} = -1 \cdot \overrightarrow{XT}$

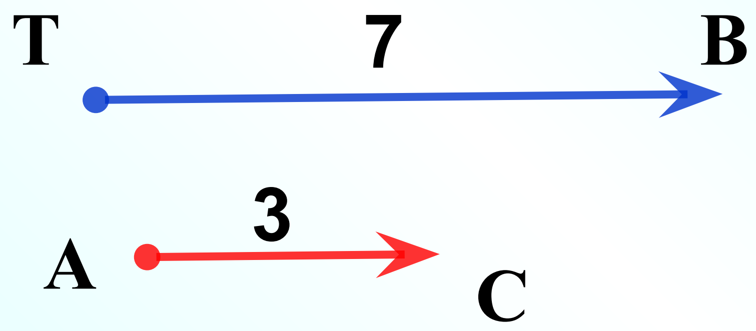
О – точка пересечения медиан треугольника.



$\overrightarrow{BK} = 3 \cdot \overrightarrow{OK}$

$\overrightarrow{KO} = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BK}$

$\overrightarrow{OB} = 2 \cdot \overrightarrow{KO}$

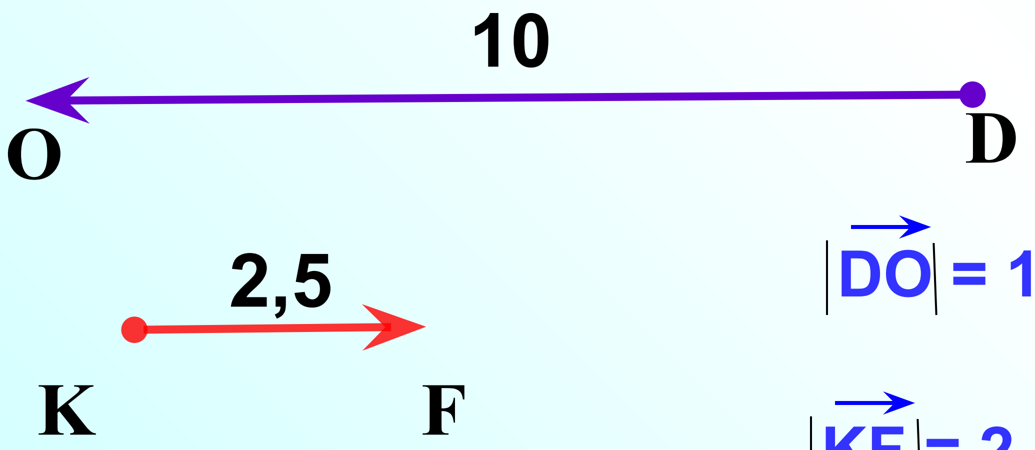


$$\left|\overrightarrow{TB}\right| = 7$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = 3$$

$$\overrightarrow{AC} = \cancel{x}\,\frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{TB}$$

$$\overrightarrow{TB} = \cancel{x}\,\frac{7}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$$



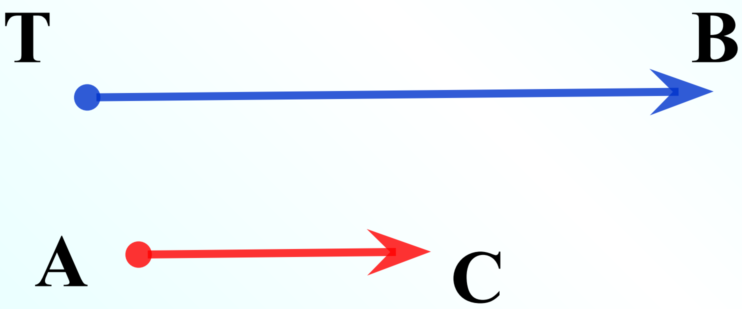
$$\overrightarrow{KF} = -\cancel{x}\,\frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{DO}$$

$$\left|\overrightarrow{DO}\right| = 10$$

$$\overrightarrow{DO} = -\cancel{x}\,4 \cdot \overrightarrow{KF}$$

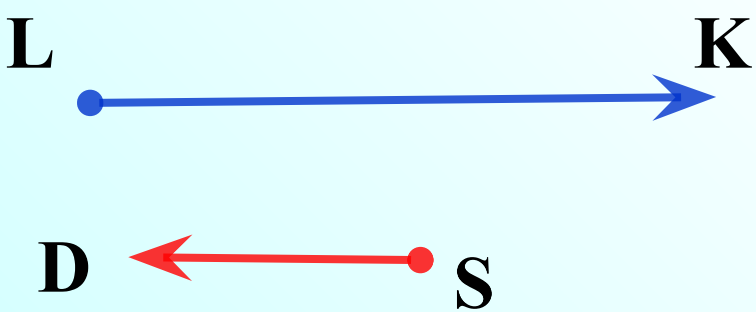
$$\left|\overrightarrow{KF}\right| = 2,5$$

Длина вектора $\overrightarrow{TB}$ на 25% больше длины вектора $\overrightarrow{AC}$



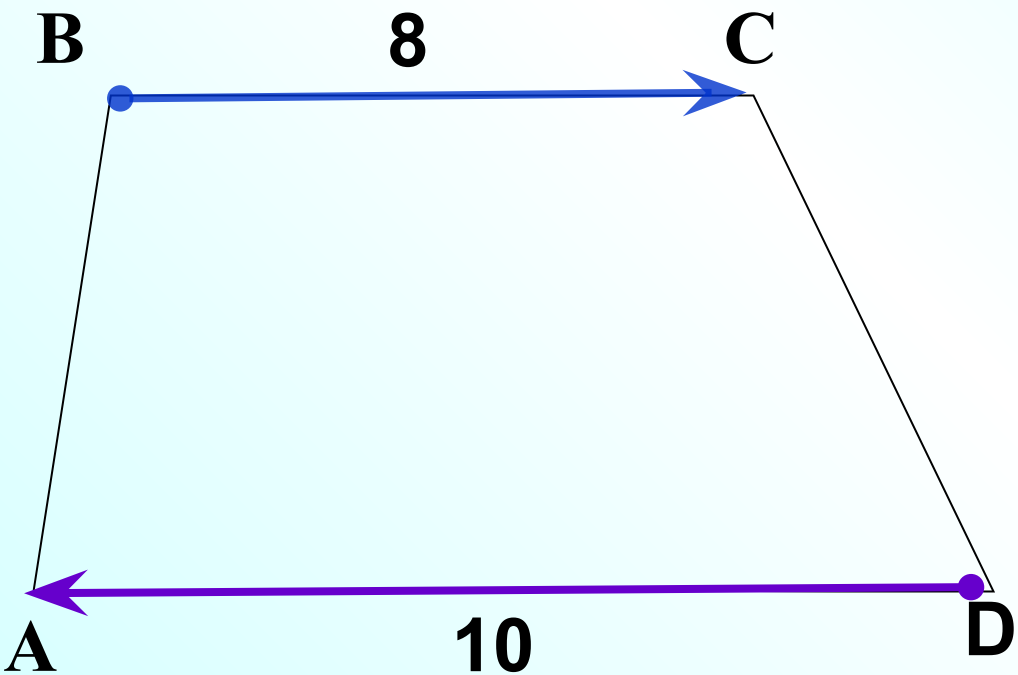
$\overrightarrow{TB} = 1{,}25 \cdot \overrightarrow{AC}$

Длина вектора $\overrightarrow{SD}$ на 25% меньше длины вектора $\overrightarrow{LK}$



$\overrightarrow{SD} = -0{,}75 \cdot \overrightarrow{LK}$

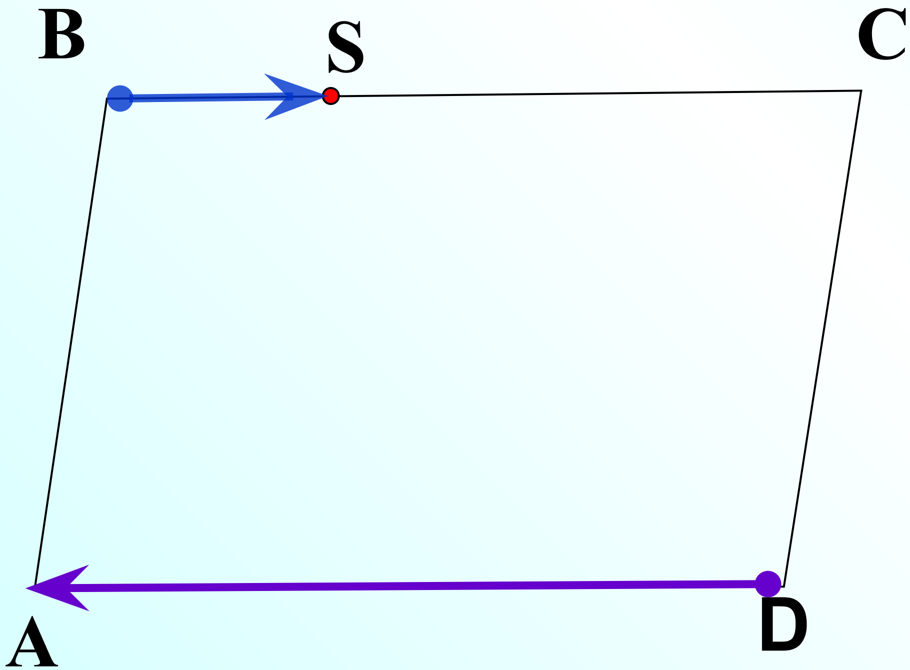
ABCD – трапеция.



$$\overrightarrow{BC} = -0{,}8 \cdot \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{DA} = -\frac{10}{8} \cdot \overrightarrow{BC}$$

ABCD – параллелограмм.   CS : SB = 5 : 3



$$\overrightarrow{BS} = -\frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{DA} = -\frac{8}{3} \cdot \overrightarrow{BS}$$

Умножение вектора на число обладает следующими основными свойствами.

Для любых $\vec{a}, \vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:

1 $$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$$ Сочетательный закон

2 $$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

Первый распределительный закон

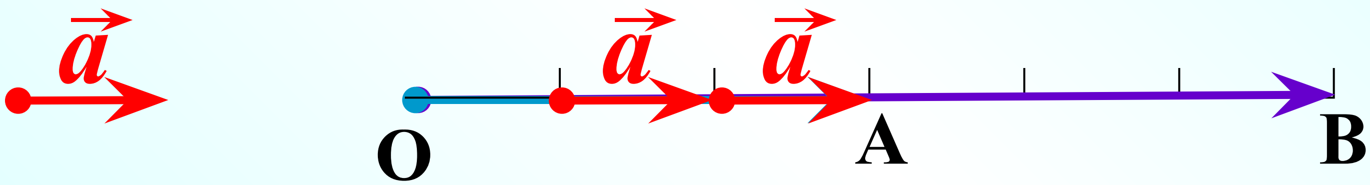
3 $$k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

Второй распределительный закон

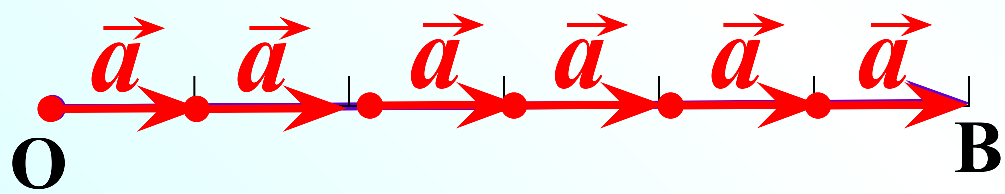
Рисунок иллюстрирует сочетательный закон.

Представлен случай, когда $k = 2,\ l = 3.$

1 $(kl)\vec{a} = k\,(l\,\vec{a})$ **Сочетательный закон**



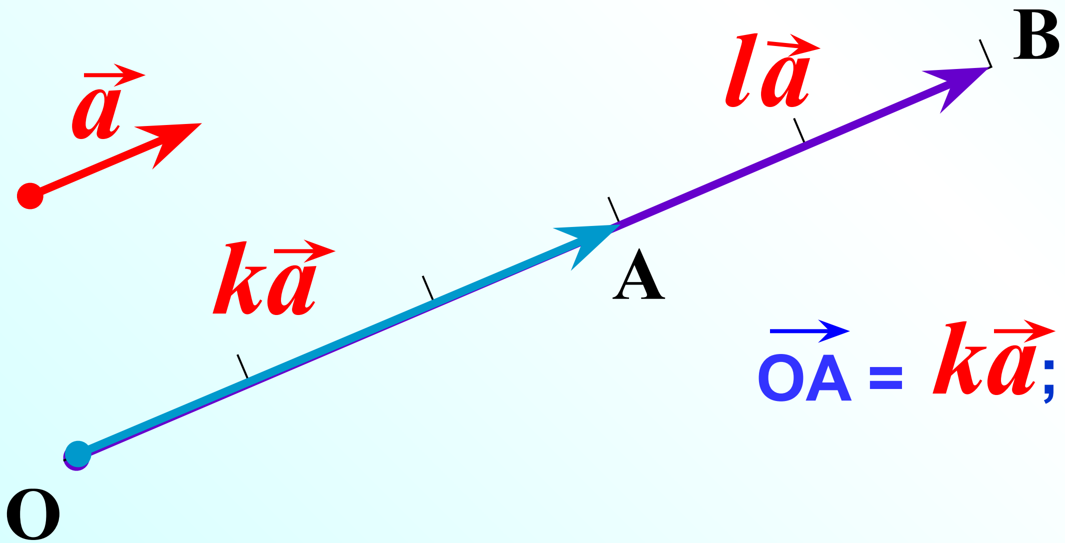
$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA} = 2(3\,\vec{a})$



$\overrightarrow{OB} = 6\vec{a} = (2 \cdot 3)\vec{a}$

Рисунок иллюстрирует первый распределительный закон. Представлен случай, когда $k = 3,\ l = 2.$

2 $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ **Первый распределительный закон**



$\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = l\vec{a}$

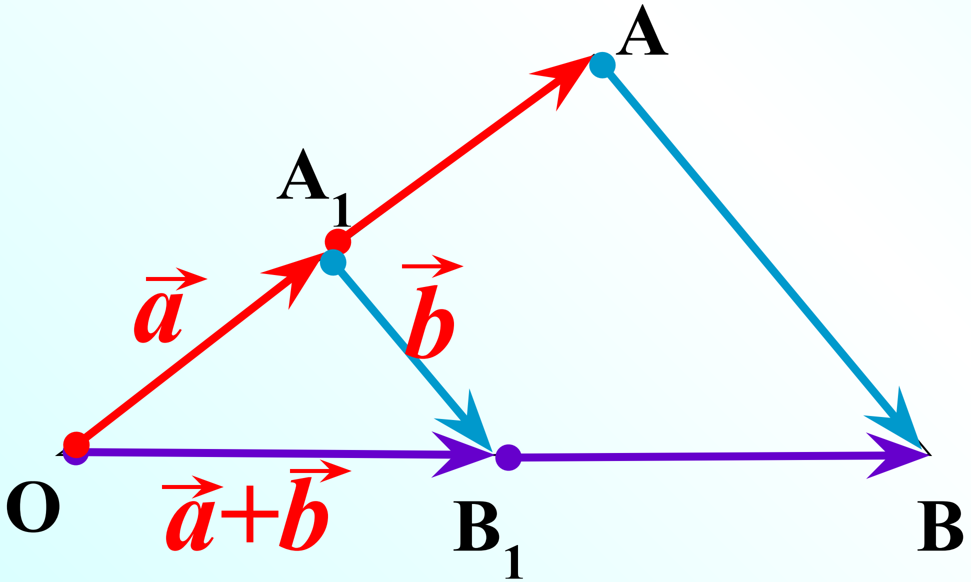
$\overrightarrow{OB} = (k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

3 $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

Второй распределительный закон

Рисунок иллюстрирует второй распределительный закон.

На рисунке $\Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1$, коэффициент подобия k



$\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$

$\overrightarrow{AB} = k\vec{b}$

$\overrightarrow{OB} = k(\vec{a}+\vec{b})$

С другой стороны, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = k\vec{a}+k\vec{b}$

Таким образом, $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a}+k\vec{b}$

№ 781 Пусть $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$

Выразите через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ векторы

$2\vec{x} - 2\vec{y} =$

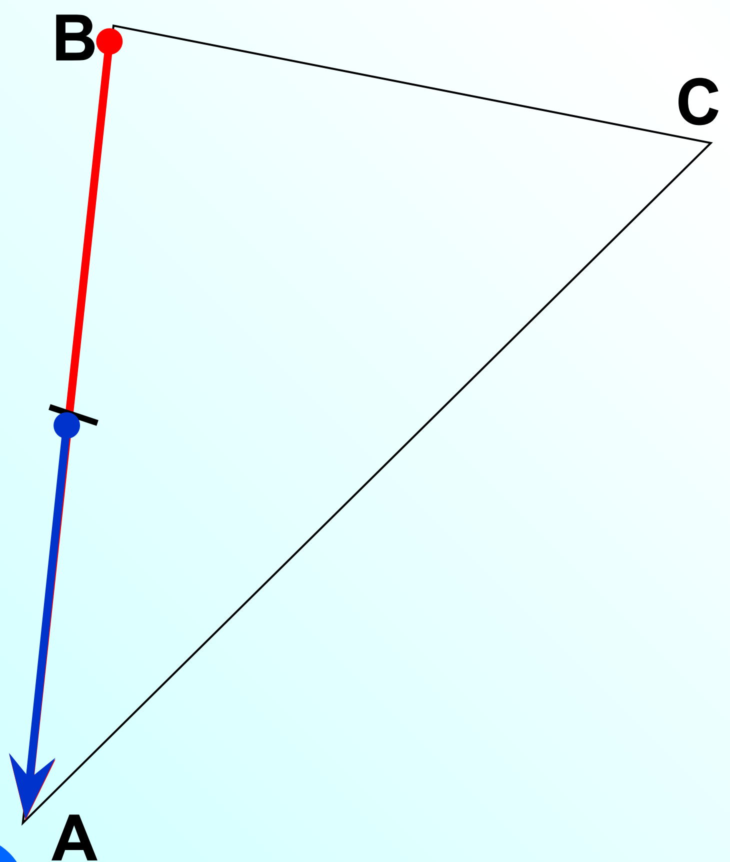
$2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$ $=$

$-\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}$

Задача

Построить вектор

$$\frac{3}{7}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{14}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{7}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC})-\frac{1}{14}\overrightarrow{AB}=$$



$$=\frac{3}{7}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})-\frac{1}{14}\overrightarrow{AB}=$$

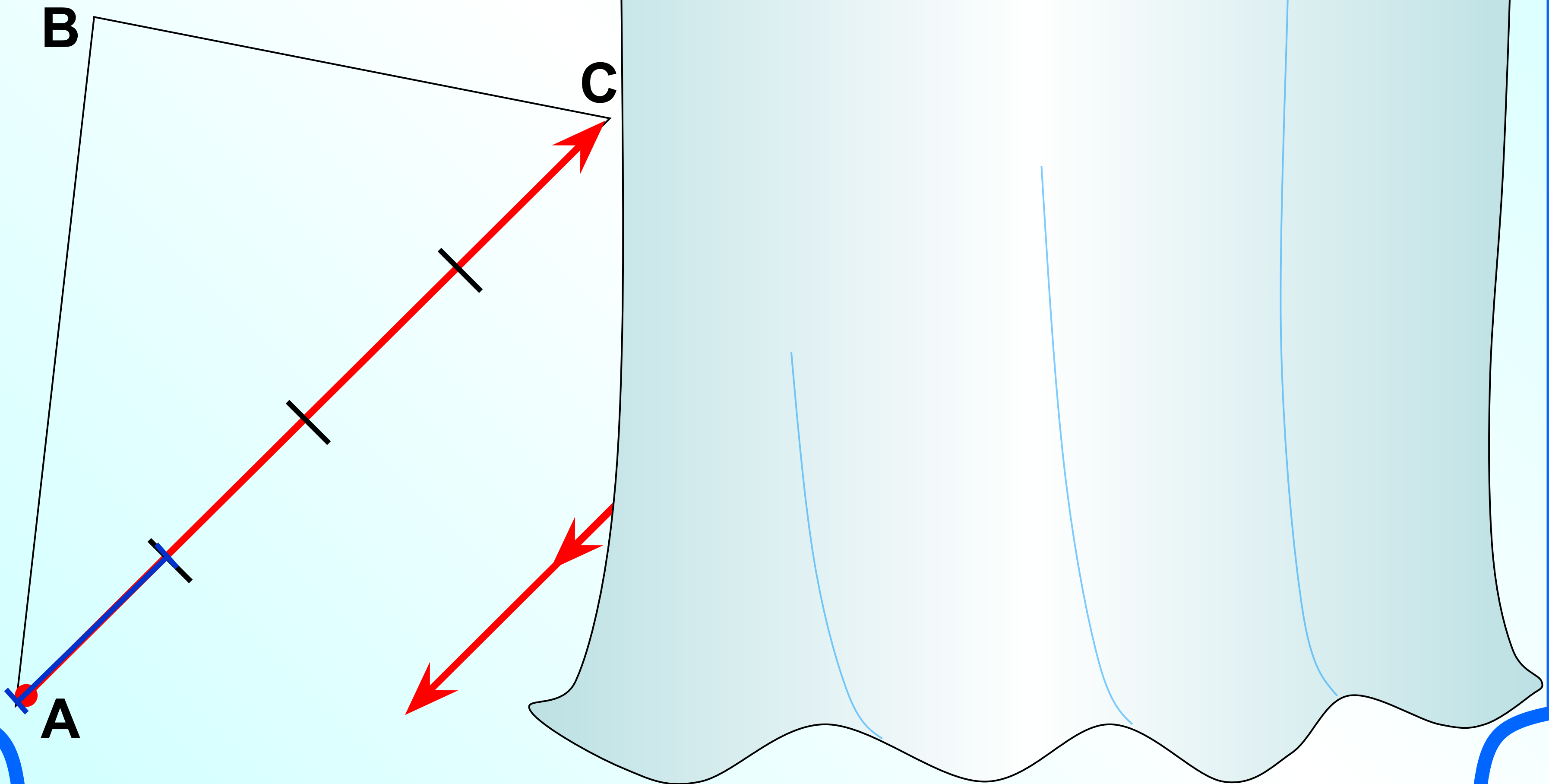
$$=\frac{3}{7}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{14}\overrightarrow{BA}=\frac{7}{14}\overrightarrow{BA}=$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

Задача

Построить вектор

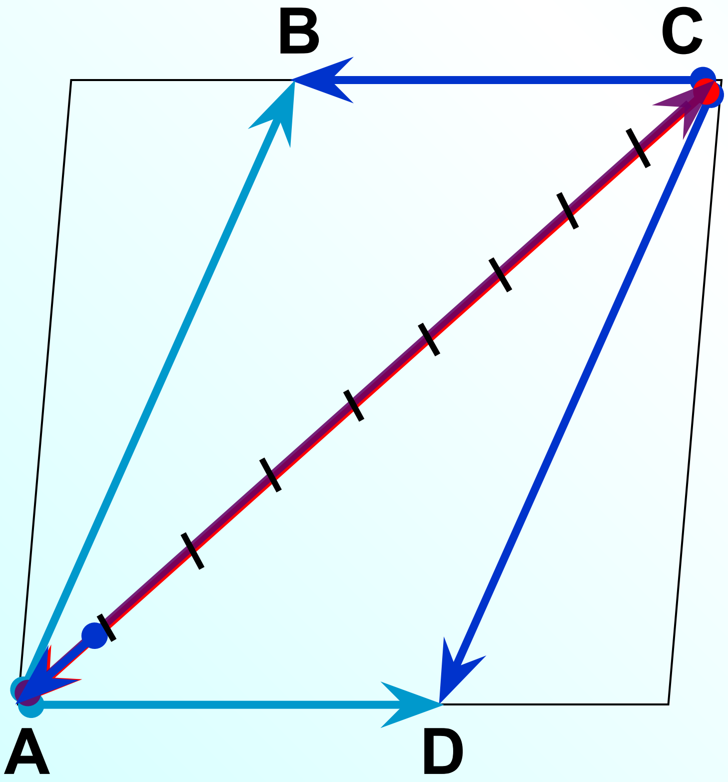
$$-\frac{5}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}) =$$



Задача

Построить вектор.

$$\frac{2}{9}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}-\frac{2}{9}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=$$



$$=\frac{2}{9}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA})=$$

$$=\frac{2}{9}(\underbrace{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}}_{\overrightarrow{CA}})+\frac{1}{3}(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AC}})=$$

$$=\frac{2}{9}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{9}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=$$

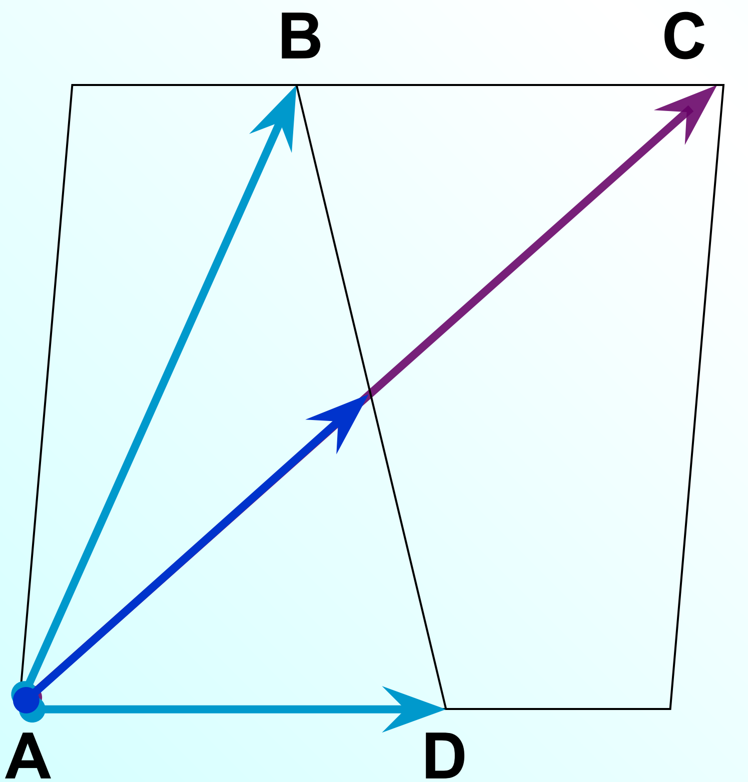
$$=-\frac{1}{9}\overrightarrow{CA}$$

ABCD – параллелограмм.

Задача

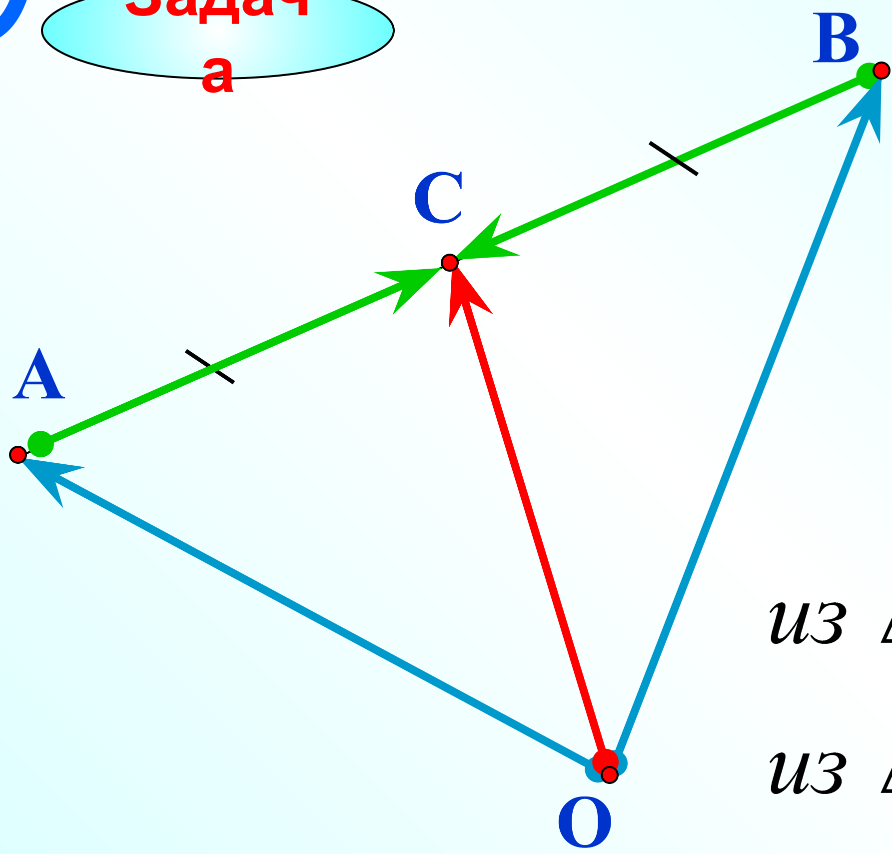
Построить вектор.

$$\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{10}\overrightarrow{CA}-\frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$$



ABCD – параллелограмм.

Задача



Точка С – середина отрезка АВ,
а О – произвольная точка плоскости. Доказать, что

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$из\ \Delta OAC$ $\quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$+$

$из\ \Delta OAC$ $\quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$

$\vec{0}$

$$2\,\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$$

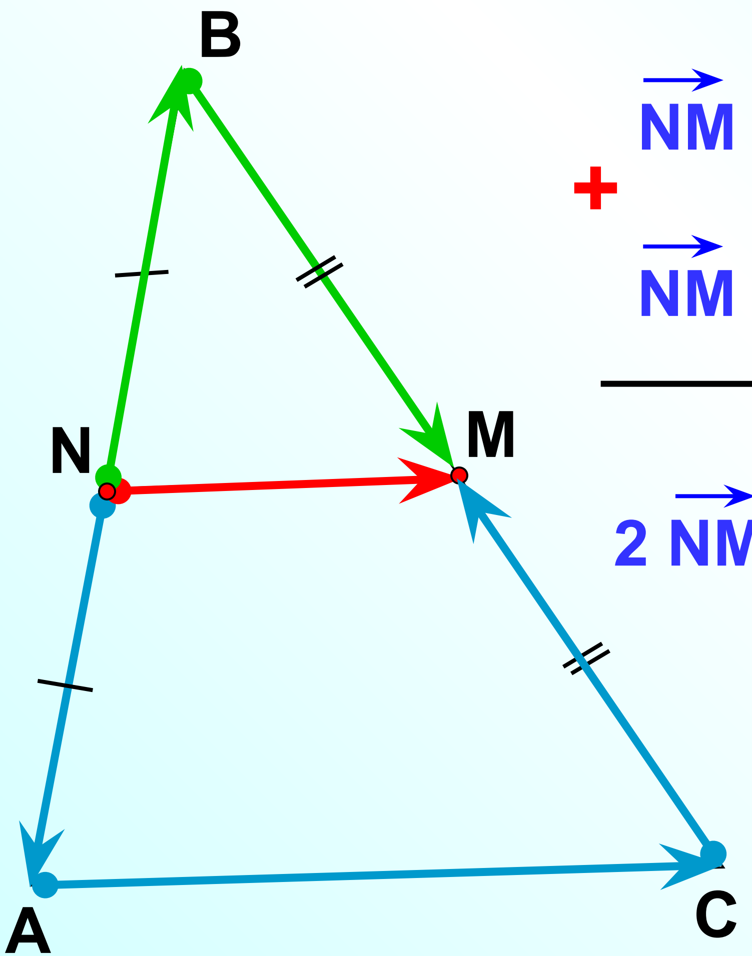
$$2\,\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \;\Big/ : 2$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Задача

Докажите теорему о средней линии треугольника.

$$MN \parallel AC \qquad MN = \frac{1}{2} AC$$



$$+\begin{array}{l} \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM} \quad \text{из } \Delta NMB \\ \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \quad \text{из четырехуг. } NACM \end{array}$$

$$2\overrightarrow{NM} = \underbrace{(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA})}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AC} + \underbrace{(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM})}_{\vec{0}}$$

$$2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AC} \quad / : 2$$

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{array}{l} |\overrightarrow{NM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}| \\ \overrightarrow{NM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC} \end{array}$$

Теорема

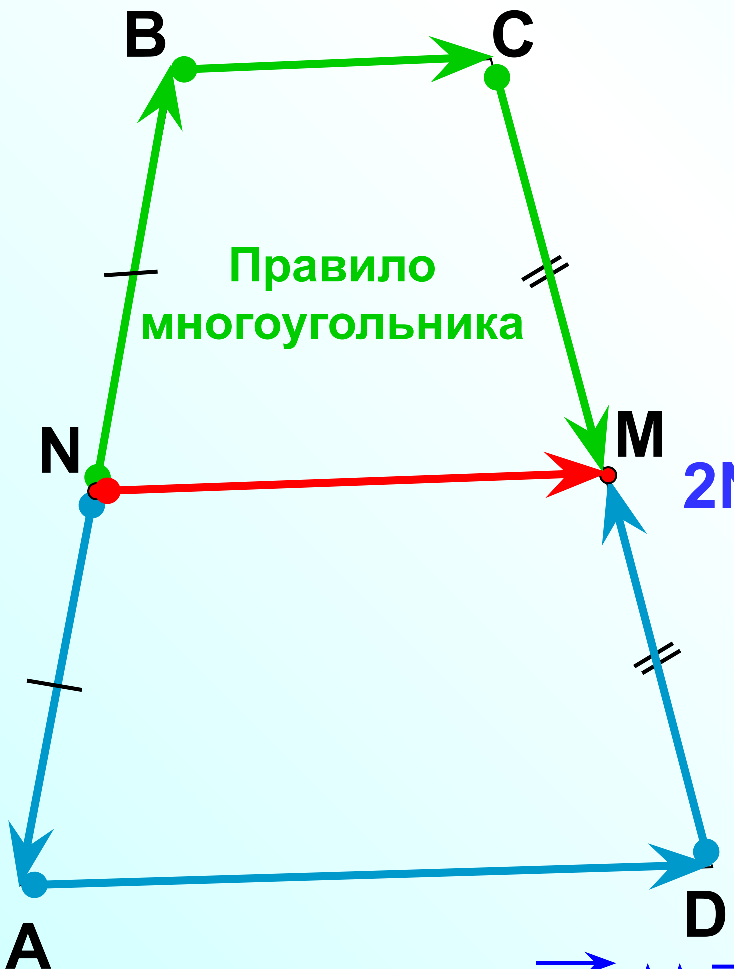
Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Дано:
трапеция ABCD, MN- средняя линия

Доказать:

$$MN \parallel AD \parallel BC \qquad MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$$

Доказать: $MN \parallel AD \parallel BC$ $\quad MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$



$$+\begin{array}{l} \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} \\ \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} \end{array}$$

$$2\overrightarrow{NM} = \underbrace{(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA})}_{\vec{0}} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \underbrace{(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM})}_{\vec{0}}$$

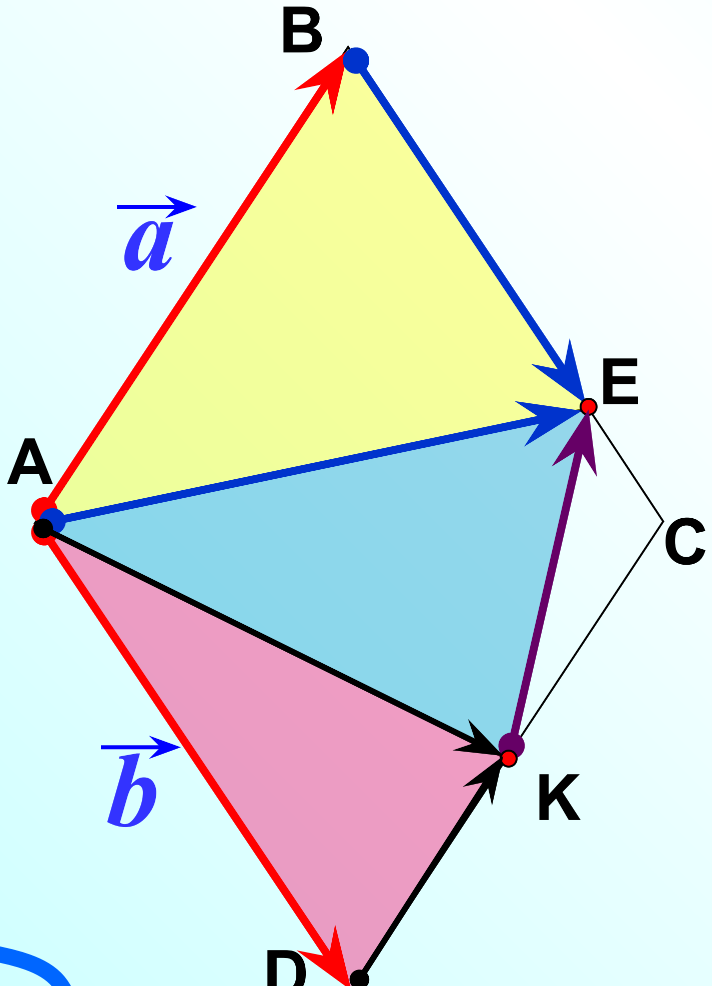
$$2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \quad / : 2$$

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) \Rightarrow$$

$\overrightarrow{NM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD};$ $\quad |\overrightarrow{NM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}|$

Задача

ABCD – ромб. $E \in BC$, $BE : EC = 3 : 1$, K – середина DC, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы:



$\overrightarrow{AE} =$

из $\Delta\, ABE$

$\overrightarrow{AK} =$

из $\Delta\, ADK$

$\overrightarrow{KE} = \quad =$

из $\Delta\, AEK$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} =$

$-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{PO} =$

$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{RN} =$

$-\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KM} =$

$-\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{OM} =$

$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} =$

$$\frac{3}{7}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{14}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{CS} =$

$-\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{LM} =$

$\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{RP} =$

$-\overrightarrow{KZ} + \overrightarrow{KZ} =$

$-\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{KD} =$

$\overrightarrow{SK} + \overrightarrow{KV} + \overrightarrow{VP} + \overrightarrow{PM} =$

$$\frac{2}{9}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{9}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$