

Лекція № 13. Закони магнітостатики

1. Магнітне поле прямого та колового провідників зі струмом
2. Взаємодія струмів
3. Закон повного струму, магнітне поле соленоїда. Вихровий характер магнітного поля.
4. Робота при переміщенні провідника зі струмом в магнітному полі. Енергія провідника зі струмом.

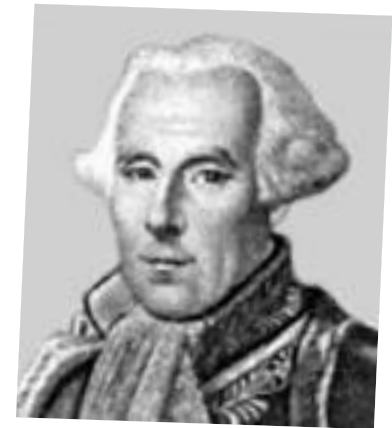
1. Магнітне поле прямого та колового провідників зі струмом.

Досліджуючи магнітне поле провідників зі струмом заданої конфігурації, французькі вчені Ж. Біо і Ф. Савар експериментально встановили, що індукція магнітного поля B складним чином залежить від розмірів і конфігурації провідника, завжди пропорційна силі струму I , що протікає у ньому та зменшується при віддаленні точки спостереження від провідника ($\sim \frac{1}{r} \dots \frac{1}{r^2}$)

Жан-Батист Біо



Фелікс Савар



Французький астроном, математик і фізик П. Лаплас теоретично узагальнив ці експериментальні факти і отримав математичні формули, розрахунки за якими завжди збігалися з емпіричними вимірюваннями індукції магнітного поля \mathbf{B}

*П'єр-Сімон
Лаплас*

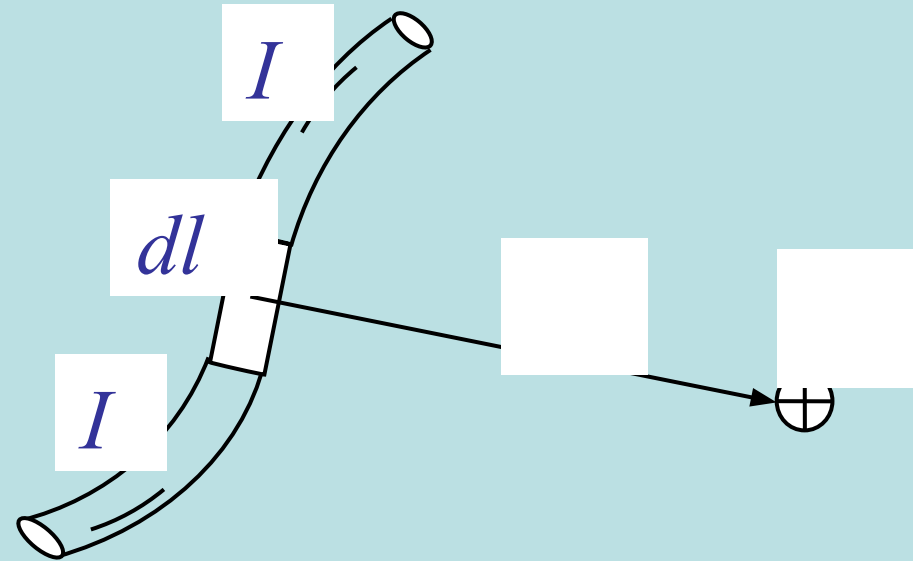


Закон, що дозволяє визначити величину індукції магнітного поля, яку створює у деякій точці простору елемент провідника із постійним струмом отримав назву закону Біо-Савара-Лапласа:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [dl \times r]}{r^3}$$

або у скалярному вигляді

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$



$$dB = \frac{\mu\mu_0 Idl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

\vec{r} – радіус-вектор, що з'єднує елемент провідника довжиною dl з точкою простору, у якій визначається індукція магнітного поля;

α – кут між векторами $I\vec{dl}$ і \vec{r} ;

μ_0 – магнітна стала, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$;

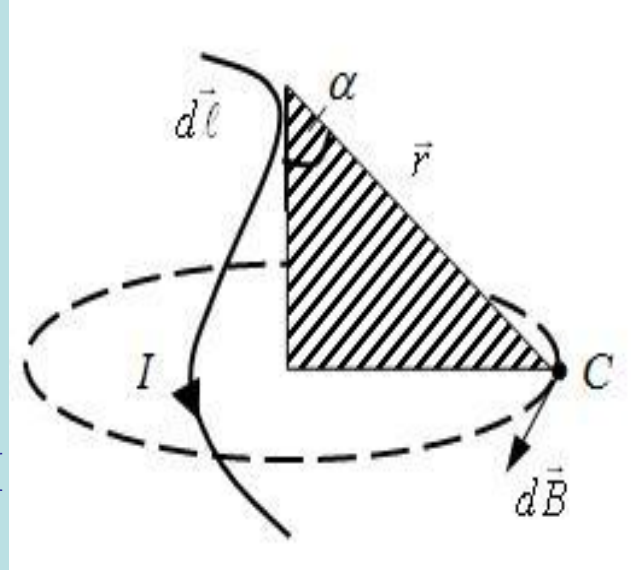
μ – магнітна проникність середовища, яка показує, у скільки разів індукція магнітного поля у середовищі більша, ніж у вакуумі.

Цей закон дозволяє розрахувати індукцію магнітного поля провідника зі струмом довільної конфігурації при застосуванні *принципу суперпозиції магнітних полів* – вектор індукції магнітного поля \vec{B} створений провідником у вибраній точці простору, дорівнює векторній сумі індукцій, що створюються окремими елементами цього струму в даній точці.

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}$$

інтегрування здійснюється вздовж усієї довжини провідника.

Для розрахунку індукції магнітного поля провідників зі струмом різних конфігурацій у довільних точках простору використовують формулу, що об'єднує закон Біо-Савара-Лапласа та принцип суперпозиції магнітних полів:



$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} \quad \text{або} \quad \vec{H} = \int_L \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}$$

де H – напруженість магнітного поля – характеристика, що не залежить від магнітних властивостей середовища, в якому знаходиться провідник:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$$

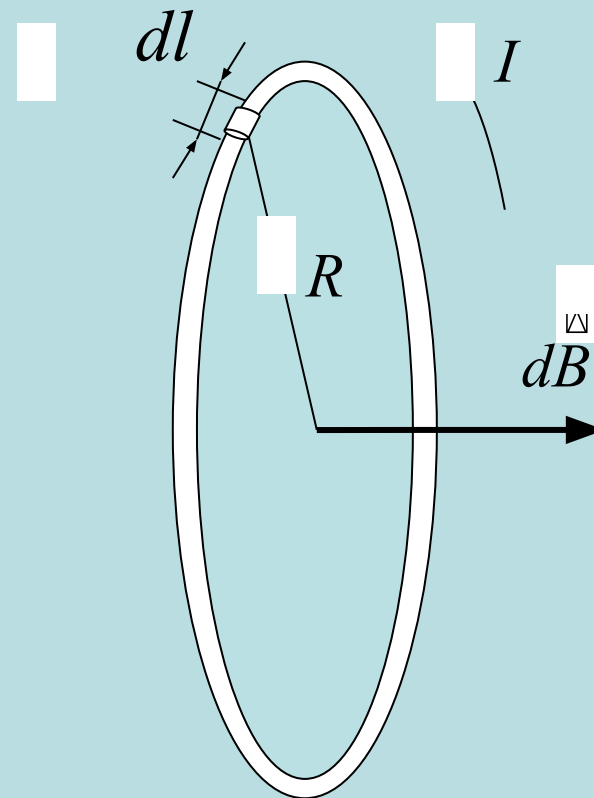
Одиницею вимірювання напруженості магнітного поля є 1 А/м.

Розглянемо приклади застосування закону Біо-Савара-Лапласа для розрахунку індукції магнітного поля провідників конфігурацій, що зустрічаються найчастіше.

1. Індукція магнітного поля у центрі колового провідника радіуса R , по якому проходить струм силою I .

Запишемо закон Біо-Савара-Лапласа у загальному вигляді:

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$



враховуючи, що усі ділянки провідника у центрі колового витка створюватимуть елементарні значення індукції магнітного поля одного напрямку, перепишемо закон Біо-Савара-Лапласа у скалярному вигляді:

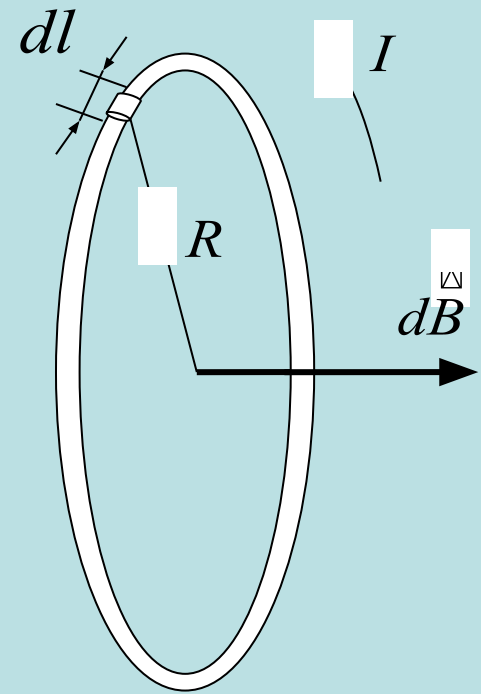
$$B = \int_L \frac{\mu\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

де dl – довільно обраний елемент провідника зі струмом силою I ,

r – відстань від елемента провідника dl до точки визначення індукції магнітного поля, дорівнює радіусу кола $r = R$,

L – довжина колового витка;

α – кут між елементом провідника dl і радіусом кола; тому $\alpha = \pi/2$ $\sin \alpha = 1$



Отже,

$$B = \int_{2\pi R} \frac{\mu\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$$

Винесемо незалежні величини за знак інтегралу:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl \quad B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R$$

скоротивши отримаємо:

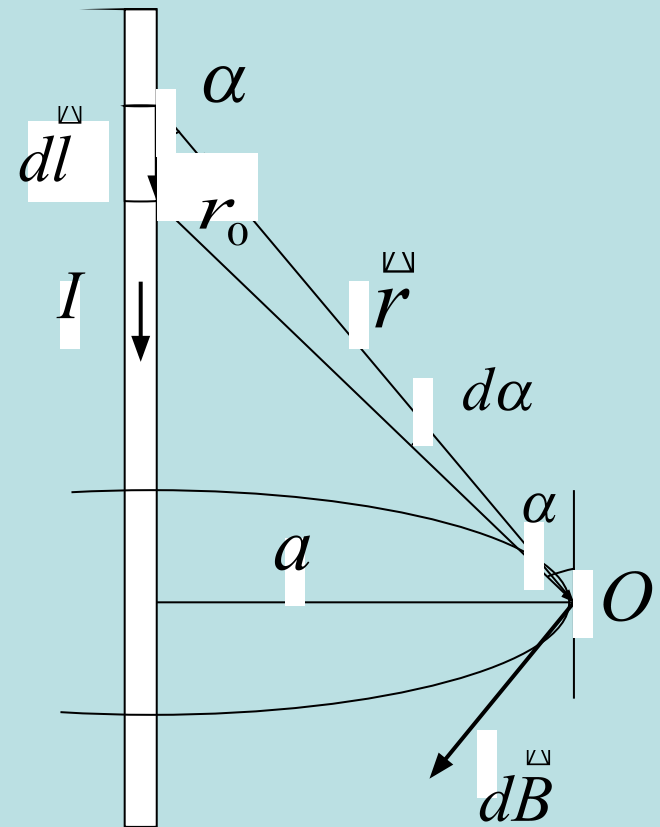
$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}$$

2. Індукція магнітного поля на відстані a від прямолінійного провідника, по якому тече струм силою I .

Запишемо закон

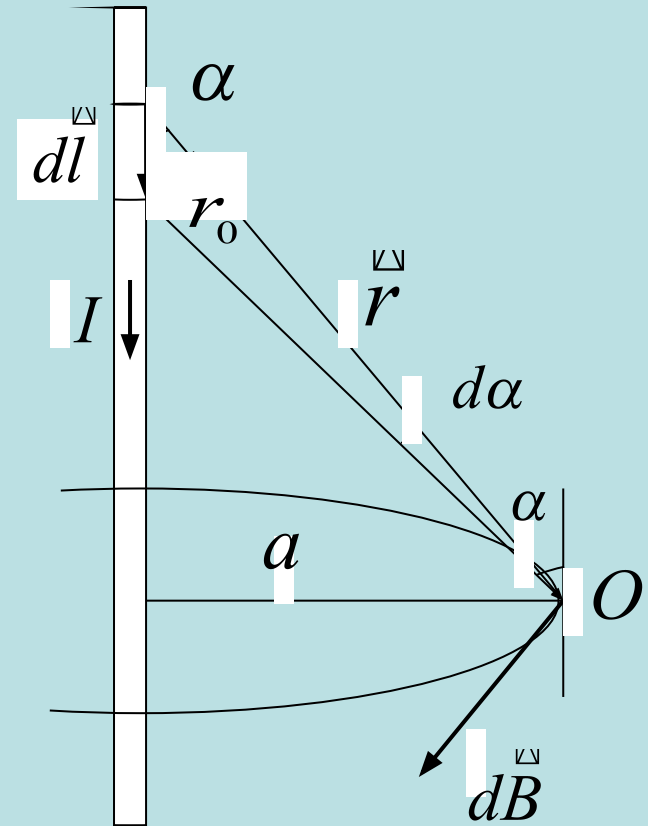
Біо-Савара-Лапласа у загальному вигляді:

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$



Щоб визначити індукцію магнітного поля провідника зі струмом у точці O , розіб'ємо провідник на нескінченно малі ділянки довжиною dl . Вектори індукції магнітного поля у точці O , що створює кожна елементарна ділянка провідника направлені в один бік вздовж одної прямої перпендикулярно до площини рисунка до нас. Тому результуюча індукція магнітного поля всіх елементів струму $I dl$ у точці O :

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$



Оскільки відстань від елемента провідника r до точки O залежить від кута α , перейдемо до однієї змінної:

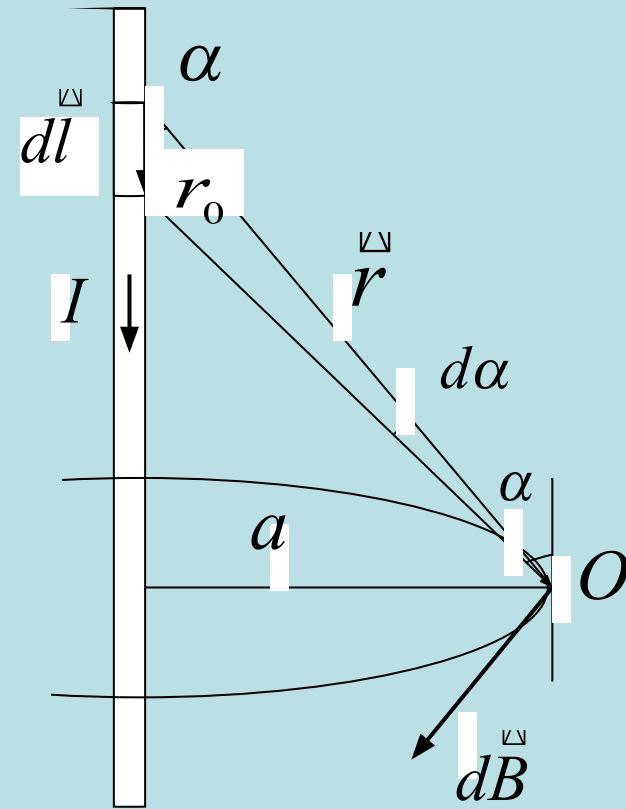
$$r = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r_0}{\sin \alpha}.$$

відстань r_0 замінимо елементом дуги радіуса r , яка спирається на нескінченно малий центральний кут $d\alpha$ ($r_0 \approx r d\alpha$):

$$dl \approx \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\sin \alpha}$$

Підставимо отримані значення r і dl у вираз для знаходження індукції магнітного поля:

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0 I \left(\frac{a}{\sin \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \right) \sin \alpha}{4\pi \left(\frac{a}{\sin \alpha} \right)^2} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \sin \alpha d\alpha$$



Винесемо сталі величини за знак інтегралу та здійснимо інтегрування:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha$$

Індукція магнітного поля прямолінійного провідника скінченної довжини:

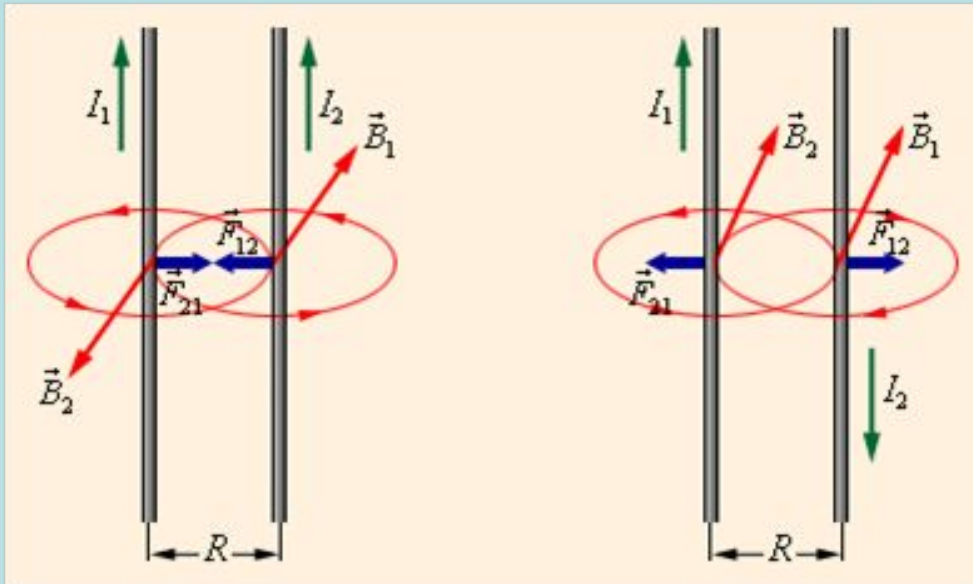
$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Якщо провідник нескінченно довгий, $\alpha_1 \rightarrow 0$ а $\alpha_2 \rightarrow \pi$ то *індукція магнітного поля нескінченно довгого прямолінійного провідника:*

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a}$$

2. Взаємодія струмів

Провідники по яким проходять електричні струми взаємодіють один з одним через власні магнітні поля. Цю силу взаємодії можна визначити поєднуючи закон Біо-Савара-Лапласа із законом Ампера. За законом Біо-Савара-Лапласа елемент струму $I_1 dl_1$ у точці O , що знаходиться на відстані r , створює магнітне поле індукцією



$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 [dl_1 \times r]}{r^3}$$

На елемент струму $I_2 dl_2$, поміщений у точку O , за законом Ампера, діятиме сила з боку магнітного поля, що створюється елементом струму $I_1 dl_1$

$$d\vec{F}_{12} = \left[I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B} \right]$$

підставивши значення індукції магнітного поля у точці O в закон Біо-Савара-Лапласа, отримаємо загальний закон Ампера:

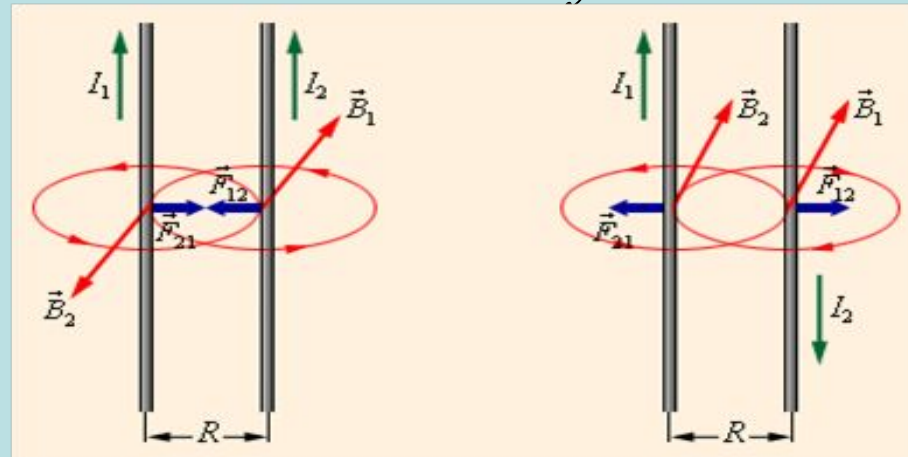
$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\left[I_2 d\vec{l}_2 \times \left[I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r} \right] \right]}{r^3}$$

Застосовуючи закон Ампера для двох нескінченно довгих прямолінійних паралельних провідників, можна отримати *силу взаємодії, що припадає на одиницю їх довжини*:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1I_2}{r}$$

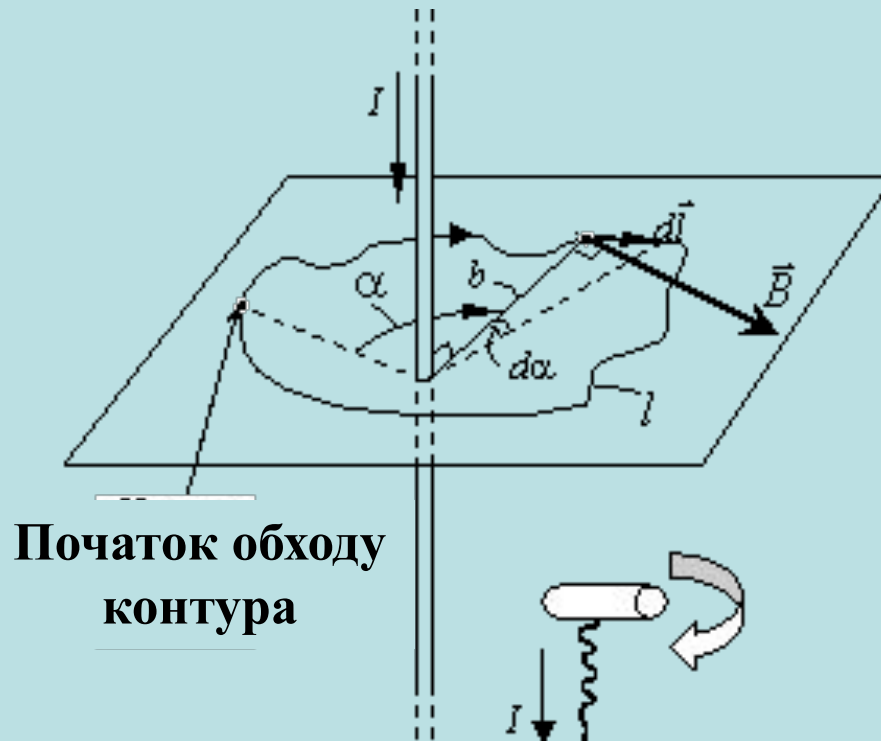
де r – відстань між провідниками.

Використовуючи правило свердлика та правило лівої руки, можна визначити, що провідники з однаковим напрямом струмів взаємно *притягуються*, а з різним – *відштовхуються*.



3. Закон повного струму, магнітне поле соленоїда. Вихровий характер магнітного поля.

Величину $\oint_l (\vec{B}_n dl) = \oint_l B \cdot dl \cdot \cos \alpha$ називають *циркуляцією вектора індукції магнітного поля*, де α – кут між вектором $I dl$ і напрямком елемента струму.



Знайдемо циркуляцію вектора індукції магнітного поля прямого провідника зі струмом. Індукція магнітного поля прямого нескінченного провідника із струмом дорівнює:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}$$

де R – відстань від провідника до точки, в якій визначається B .

Охопимо провідник колом радіуса R . Тоді

$$\oint_l B_n dl = \oint \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R} dl$$

Так як I , μ , μ_0 і R величини сталі, маємо:

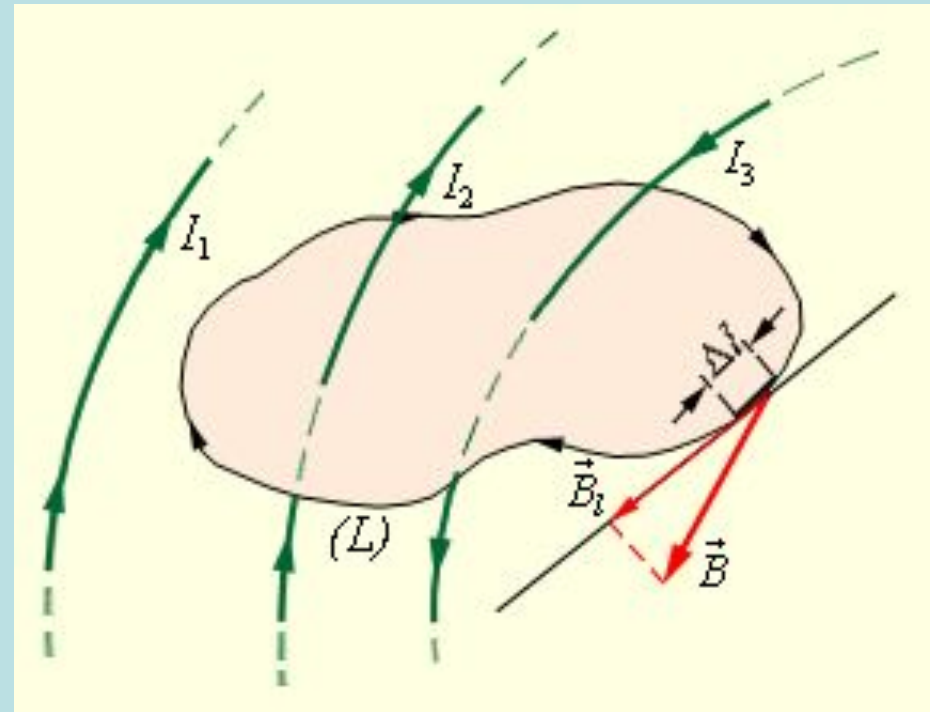
$$\oint_l B_n dl = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} dl \quad \text{або} \quad \oint_l B_n dl = \frac{\mu\mu_0 I 2\pi R}{2\pi R}$$

$$\text{і} \quad \oint_l B_n dl = \mu\mu_0 I$$

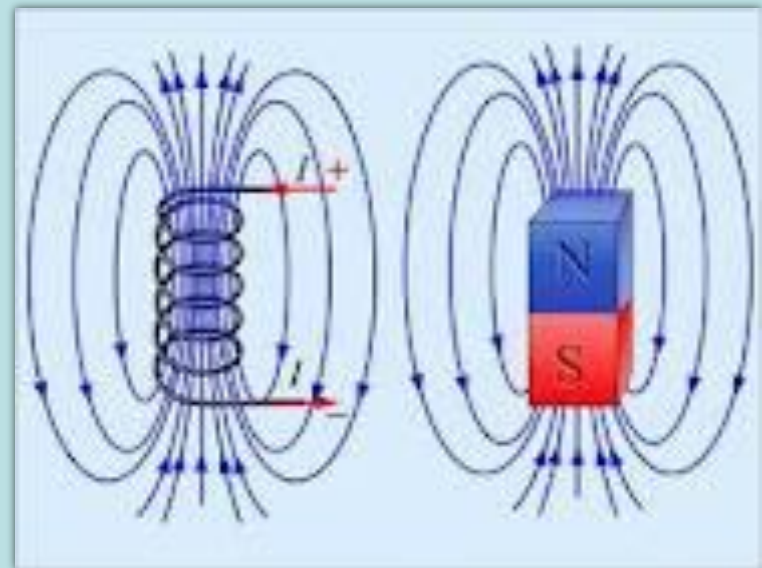
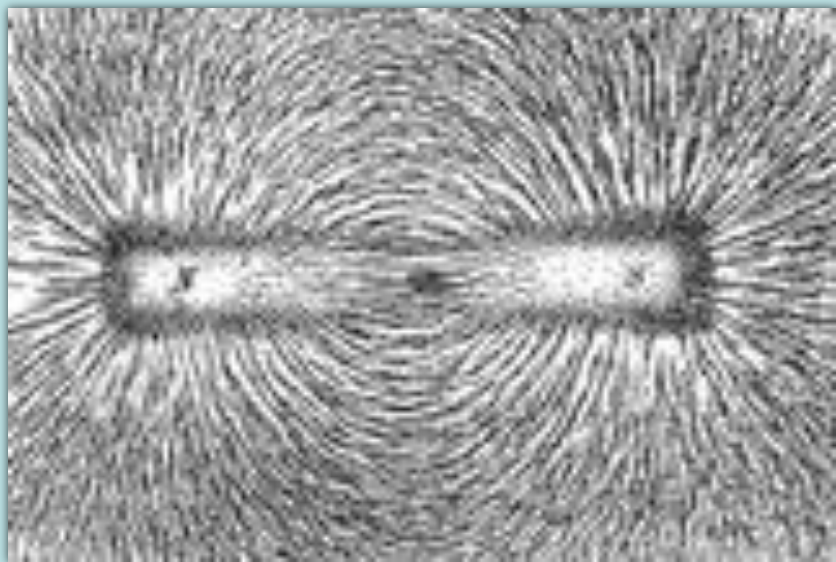
Сформулюємо закон повного струму або теорему про циркуляцію вектора індукції магнітного поля в загальному вигляді, циркуляція вектора індукції магнітного поля постійних струмів по довільному замкненому контуру дорівнює алгебраїчній сумі сил струмів, які охоплюються цим контуром, помноженій на магнітну сталу і магнітну проникність середовища:

$$\oint_l \vec{B}_n dl = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$

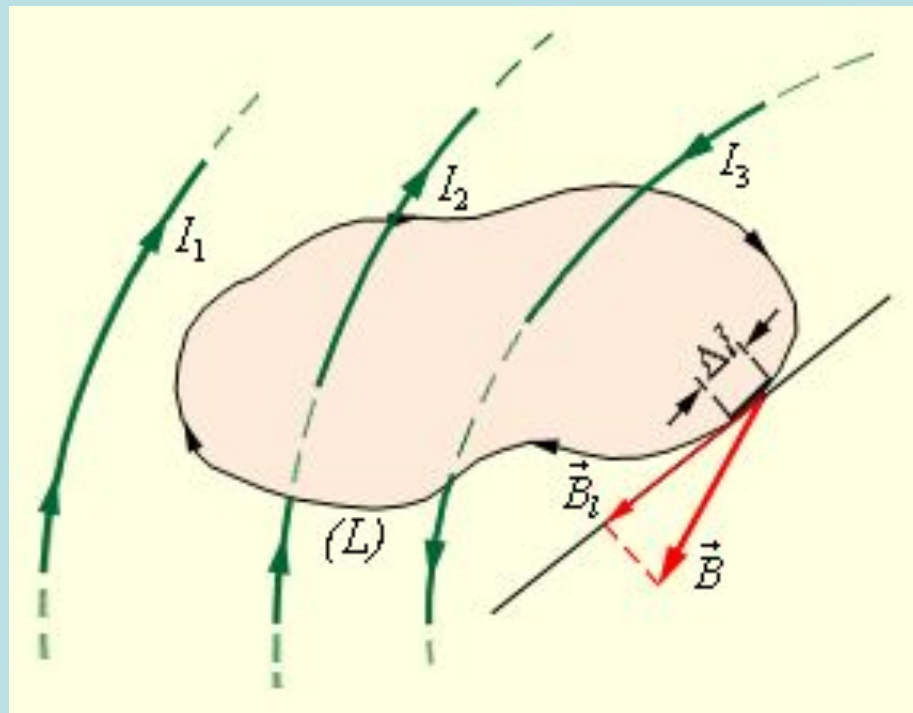
де $\sum_{i=1}^n I_i$ – сума струмів, які охоплюються контуром.



Отже, робота при перенесенні пробного одиничного елемента струму в магнітному полі в загальному випадку не дорівнює нулеві, тому його називають **непотенціальним** або **вихровим**. Характерною ознакою вихрового поля є замкненість його силових ліній.

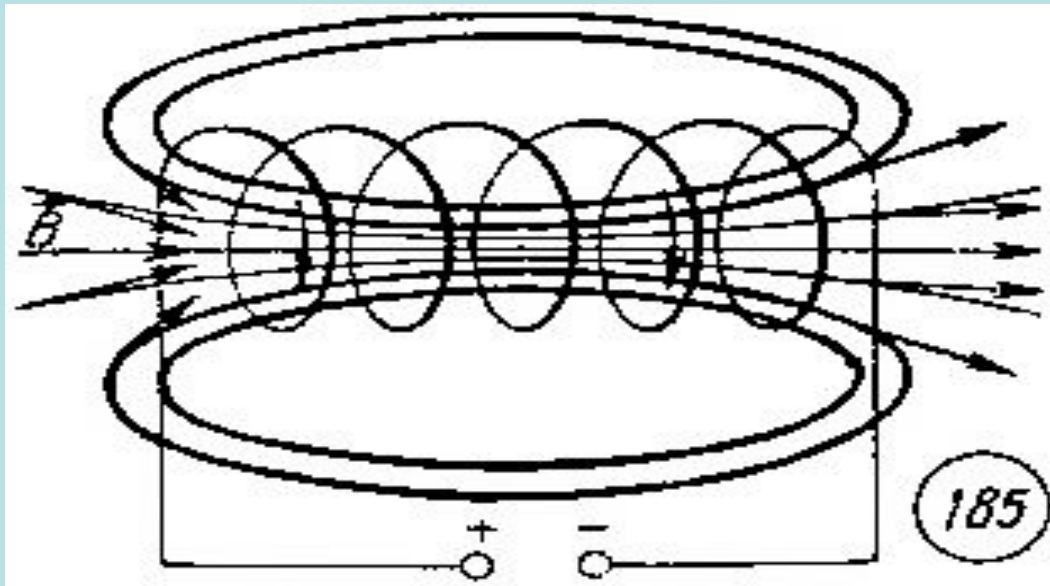


При застосуванні закону повного струму необхідно враховувати **правило знаків**: якщо напрямок обходу контуру співпадає з напрямком обертального руху свердлика (правого гвинта), то охоплені контуром струми, напрями яких співпадають із напрямком поступального руху свердлика, записують із знаком «+», а ті, що не співпадають – із знаком «-».

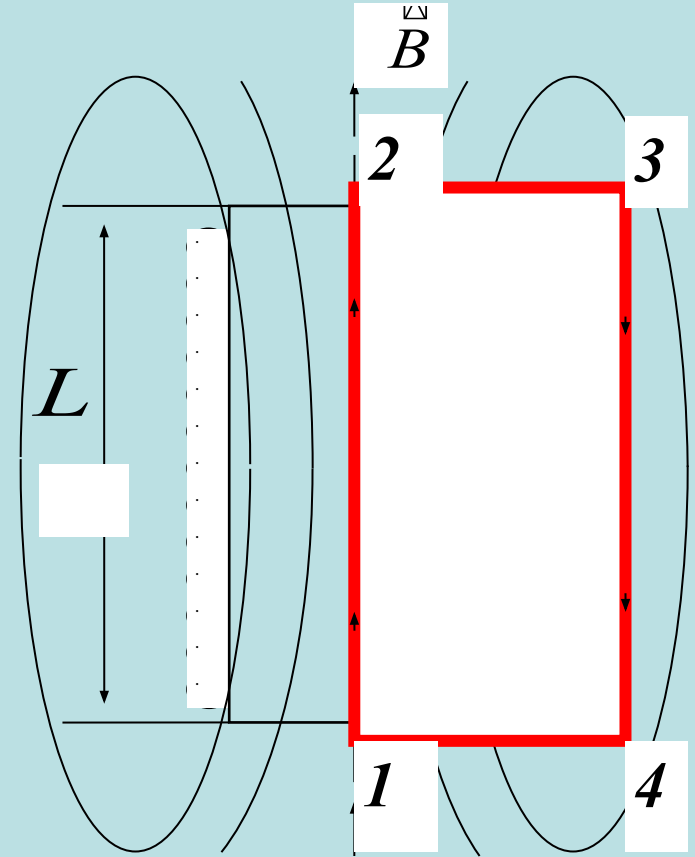


Закон повного струму і закон Біо-Савара-Лапласа використовують для обчислення індукції магнітного поля, що створює система провідників зі струмом.

Закон Біо-Савара-Лапласа застосовують у тому випадку, коли легко провести інтегрування вздовж провідника довжиною l , в інших випадках застосовують закон повного струму, довільно обираючи контур симетричної форми з метою спрощення інтегрування.



Прикладом застосування закону повного струму є розрахунок індукції магнітного поля на осі довгого соленоїда довжиною L з кількістю витків N по яким тече струм силою I .



Оберемо замкнений контур інтегрування 12341 і запишемо вираз для циркуляції вектора \vec{B}

$$\oint_{12341} \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_{k=1}^N I_k$$

Циркуляцію вектора по замкненому контуру можна подати у вигляді чотирьох доданків

$$\oint_{12341} B dl = \int_{12} B dl \cos \left(\underset{=1}{\begin{matrix} \vec{B} \wedge \vec{dl} \\ \vec{B} \cdot \vec{dl} \end{matrix}} \right) + \int_{23} B dl \cos \left(\underset{=0}{\begin{matrix} \vec{B} \wedge \vec{dl} \\ \vec{B} \cdot \vec{dl} \end{matrix}} \right) + \int_{34 \approx 0} B dl \cos \left(\begin{matrix} \vec{B} \wedge \vec{dl} \\ \vec{B} \cdot \vec{dl} \end{matrix} \right) + \int_{41} B dl \cos \left(\underset{=0}{\begin{matrix} \vec{B} \wedge \vec{dl} \\ \vec{B} \cdot \vec{dl} \end{matrix}} \right)$$

$$\oint_{12341} B dl = \int_{12} B dl \cos \left(\underset{=1}{\begin{matrix} \vec{B} \wedge \vec{dl} \\ \vec{B} \cdot \vec{dl} \end{matrix}} \right) = B \int_{12} dl = BL$$

Оскільки обраний контур охоплює N витків по кожному з яких тече струм силою I , то

$$\sum_{k=1}^N I_k = NI$$

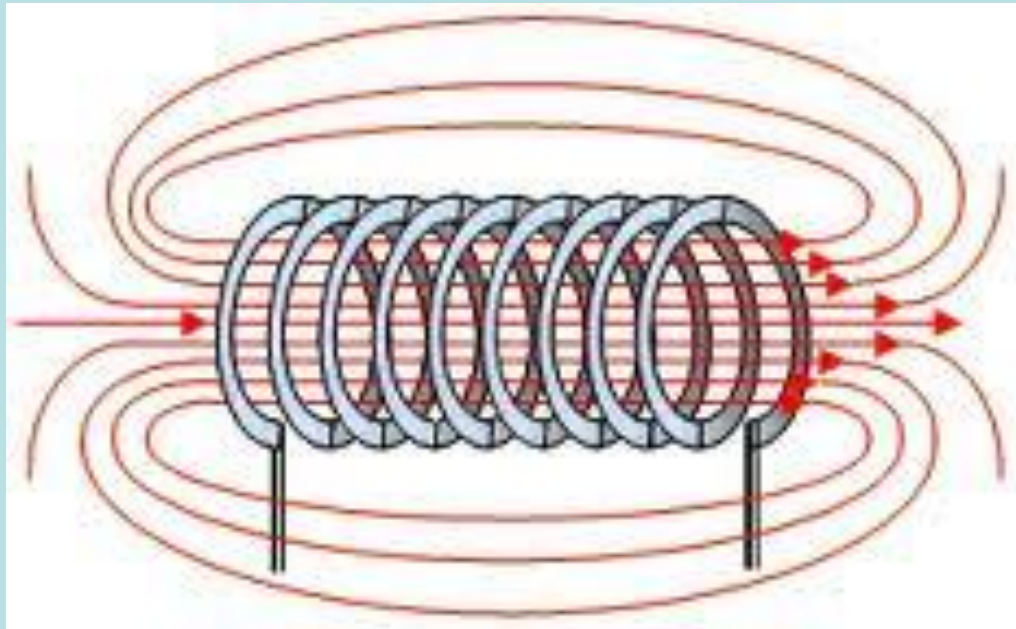
Підставляючи у закон повного струму отримані вирази циркуляції вектора \vec{B} суми сил струмів матимемо:

$$BL = \mu\mu_0 NI$$

тоді індукція магнітного поля на осі довгого соленоїда становитиме

$$B = \mu\mu_0 \frac{NI}{L} = \mu\mu_0 nI$$

де n – кількість витків соленоїда на одиницю довжини.

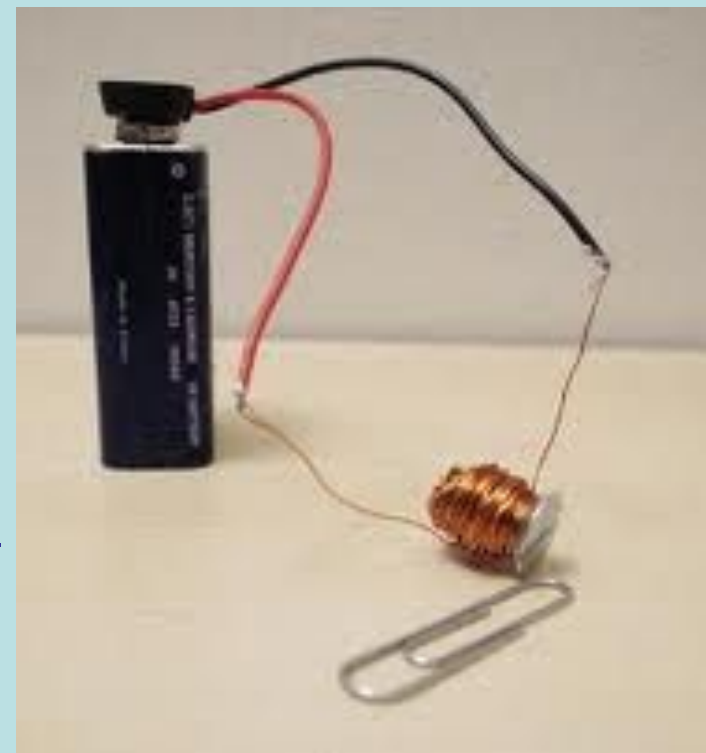


Явище виникнення магнітного поля навколо провідників зі струмом використовують для виготовлення *електромагнітів* – пристроїв, здатних створювати власні магнітні поля при проходженні електричного струму у витках обмотки.



Звичайно електромагніт складається з обмотки і феромагнітного осердя, який набуває властивостей магніту при проходженні по обмотці струму (на рисунку наведено найпростіший електромагніт – електропровід в ізоляції намотаний навколо феромагнітного осердя).

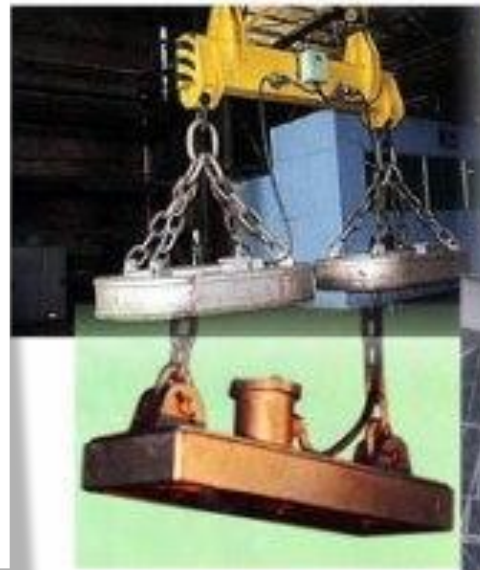
Електромагніти використовуються там, де необхідне магнітне поле, яке можна швидко і легко змінити, наприклад у побутових приладах (телевізор, магнітофон, електробритва),



у пристроях техніки зв'язку (телефон, телеграф, радіо), в електричних машинах (електрогенератори та електродвигуни), у пристроях промислової автоматики (пускатчі, перемикачі, реле та інше), в електромагнітних сепараторах для очищення механічних сумішей від магнітних предметів.



Широкого застосування електромагніти набули в електромагнітних механізмах, що здійснюють поступально-поворотні рухи чи гальмувальні процеси – вантажопідйомні електромагніти (див. рис.), металорізальні верстати, магнітні замки, релейні та пускові пристрої, механізми автоматичного вимикання, гальмові пристрої тощо.



4. Робота при переміщенні провідника зі струмом в магнітному полі. Енергія провідника зі струмом.

При переміщенні провідника зі струмом в магнітному полі виконується робота

$$dA = Id\Phi$$

Енергія магнітного поля замкненого провідного контуру зі струмом I та індуктивністю L

$$W_m = \frac{LI^2}{2}$$

Енергію магнітного поля визначають за формулою

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu\mu_0} B^2 V$$

Якщо врахувати формулу зв'язку вектора індукції магнітного поля \vec{B} і вектора напруженості магнітного поля \vec{H}

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

то енергія магнітного поля у даній точці дорівнюватиме

$$W_m = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} V$$

А об'ємна густина енергії магнітного поля в
околі кожної точки простору $\varpi_m = \frac{W_m}{V}$ визначатиметься
значеннями векторних характеристик поля:

$$\varpi_m = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H}$$

Лекція № 13.

Закон Біо-Савара- Лапласа.

1. Магнітне поле прямого та колового провідників зі струмом.
2. Взаємодія струмів.
3. Закон повного струму, магнітне поле соленоїда. Вихровий характер магнітного поля.
4. Робота при переміщенні провідника зі струмом в магнітному полі. Енергія провідника зі струмом.