Модель вязкой жидкости

•

Основное понятия модели вязкой жидкости.

- Вязкая жидкость – жидкость, обладающая свойством вязкости, т.е., свойством реальных жидкостей, оказывающим сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой.

- Жидкость называется вязкой, если в ее объеме при относительном перемещении слоев действуют как нормальные, так и касательные силы напряжения.

- Движение вязкой жидкости описывается уравнениями Навье - Стокса. Уравнения Навье – Стокса получаются из уравнения движения сплошной среды в напряжениях (если вместо компонент тензора напряжений подставить их выражения через компоненты тензора скоростей деформаций из закона Навье-Стокса)

Виды вязкости

- Существует несколько разновидностей вязкости: динамическая; кинематическая; условная.
- Динамическая вязкость в международной измерительной системе измеряется в паскалях в секунду. С точки зрения физики, данная величина демонстрирует изменение потерь давления за единицу времени. В системе СГС она измерима в пуазах (название дано в честь французского физика Ж. Пуазёйля. Динамическая вязкость жидкостей склонна уменьшаться при увеличении температуры, а ее повышение наблюдается с увеличением показателя давления.
- Измерение кинематической вязкости осуществляется в стоксах, что представляет основополагающее значение свойства текучих сред. При задействовании специального прибора вискозиметра становится возможным измерение вязкости любой жидкости. Ее тарированный объем пропускается через калиброванное отверстие (исключая механическое побуждение) и под влиянием одной только силы тяжести.
- Условная вязкость представляет величину, косвенным образом характеризующую гидравлическое сопротивление течению. При этом она измеряется временем истечения заданного объема раствора через вертикальную трубку с определенным диаметром. Измерение осуществляется в градусах Энглера (в честь немецкого химика).

- Процесс измерения вязкости жидкости называется вискозиметрией. В современных условиях определение вязкости жидкости становится возможным с помощью следующих четырех методов:

1) Капиллярный метод.

2) Медицинский метод по Гессе.

3) Ротационный метод.

4) Метод Стокса.

Физические и механические свойства вязкой жидкости.

- Вязкая (идеально, или совершенно, вязкая) жидкость – это изотропная сжимаемая сплошная среда, сдвиговое и объемное сопротивление которой линейно зависит от скоростей деформаций. Подобная среда реагирует на изменение объема ее частиц и на скорость его изменения, причем каждый из этих факторов деформирования вносит свой вклад в шаровой тензор напряжений.
- Вязкая жидкость реагирует также на скорость изменения формы частиц, и наличие фактора деформирования вносит свой вклад в девиатор напряжений. В то же время само изменение формы частиц вязкой жидкости не вызывает появления дополнительных касательных напряжений, т.е. девиатор напряжений определяется только скоростным фактором.
- Согласно модели вязкой жидкости, уравнения, определяющие физическое и механическое поведение среды, выглядят соответственно как:

$$\sigma = -p(\rho, T) + 3\lambda\dot{\varepsilon},$$

$$(D_\sigma) = 2\mu(D_{\dot{\varepsilon}}),$$

- Из определяющих уравнений (с учётом определения шарового тензора и девиатора для всех входящих в выражение тензорных величин) следуют физические соотношения для модели вязкой жидкости, принимающие форму закона Навье-Стокса:

$$\sigma_{ij} = -p(\rho, T)g_{ij} + (3\lambda - 2\mu)\dot{\varepsilon}g_{ij} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}.$$

- Практически все реальные жидкости и газы в той или иной степени обладают вязкими свойствами. Однако зачастую ими пренебрегают при малых скоростях деформаций. Однако для описания физико-механических свойств этих же сред при высоких скоростях деформаций необходимо использовать уже полный закон Навье-Стокса, как, например, при моделировании гиперзвукового обтекания летательного аппарата воздушной средой.
- С точки зрения термодинамических особенностей вязкая среда существенно отличается от идеальной наличием внутреннего трения, приводящего к диссипации энергии и к необратимому переходу части работы деформации во внутреннюю тепловую энергию. Покажем это на примере вязкой баротропной среды, у которой возникающее в частицах давление зависит лишь от плотности и не зависит от температуры.
- С учетом физических соотношений выражение для удельной мощности деформирования приобретает вид:

$$\frac{\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}{\rho} = \frac{\left[-p(\rho,T)g^{ij} + (3\lambda - 2\mu)\dot{\varepsilon}g^{ij} + 2\mu\dot{\varepsilon}^{ij}\right]\dot{\varepsilon}_{ij}}{\rho} =$$

$$= \frac{p(\rho)}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \frac{(3\lambda - 2\mu)\dot{\varepsilon}g^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + 2\mu\dot{\varepsilon}^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}{\rho}.$$

- Выражение для удельной мощности деформирования в вязкой баротропной среде может быть преобразовано, а уравнение энергии в адиабатическом приближении примет вид:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}{\rho} = \frac{p(\rho)}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{3\lambda\dot{\varepsilon}^2 + \mu\dot{\varepsilon}_i^2}{\rho}.$$

- Находящаяся в правой части уравнения энергии удельная мощность деформирования для вязкой среды разделяется на две принципиально разные части – обратимую и необратимую. Первое слагаемое в последнем выражении описывает возможные случаи, как увеличения, так и уменьшения удельной внутренней энергии, меняя знак в зависимости от того, нагружается ли индивидуальная частица вязкой среды (увеличение плотности и удельной внутренней энергии) или же в ней реализуются условия разгрузки (уменьшение соответствующих значений).

- Второе слагаемое “действует” только в сторону увеличения удельной внутренней энергии. Эта существенно положительная часть удельной мощности деформирования и определяет величину некомпенсированной теплоты, для вязкой среды, а физически соответствует части работы деформации, диссипируемой при деформировании вязкой среды и переходящей во внутреннюю тепловую энергию. С учетом этого дифференциальное уравнение второго закона термодинамики для вязкой среды принимает вид:

$$T\frac{dS}{dt} = 3\frac{3\lambda\dot{\varepsilon}^2 + \mu\dot{\varepsilon}_i^2}{\rho} - \frac{\nabla_i q^i}{\rho},$$

откуда следует, что в адиабатических условиях энтропия индивидуальных частиц деформируемой вязкой среды может изменяться только в сторону увеличения.

Система разрешающих уравнений для модели вязкой жидкости.

- Основные моменты постановки задач механики вязкой жидкости рассмотрим на частном примере вязкой баротропной среды в предположении, что определение полей температуры и удельной внутренней энергии не представляет особого интереса. Для такого случая система исходных уравнений примет вид:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_i v^i = 0;$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = F_i + g^{j\alpha} \nabla_\alpha \sigma_{ij};$$

$$\sigma_{ij} = -p(\rho) g_{ij} + (3\lambda - 2\mu)\dot{\varepsilon} g_{ij} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij};$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right);$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} g^{ij}/3$$

- Исключение из системы исходных уравнений дифференциального уравнения энергии не означает невыполнения закона сохранения энергии в процессе движения вязкой среды, а лишь соответствует рассматриваемому частному случаю, для которого уравнение энергии является изолированным от других уравнений исходной системы, а специальное определение энергии не представляет интереса.
- В дальнейшем проводятся преобразования уравнений движения, в результате которых из них исключаются компоненты тензора напряжений и получается частный вид уравнений движения для вязкой жидкости – уравнения Навье-Стокса. Физические соотношения Навье Стокса после исключения из них компонент тензора скоростей деформаций приобретают вид:

$$\sigma_{ij} = -pg_{ij} + \frac{(3\lambda - 2\mu)}{3}\left(\nabla_k v^k\right) g_{ij} + \mu\nabla_i v_j + \mu\nabla_j v_i.$$

- Подставим это выражение в уравнение движения и получим:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{dv_i}{dt} &= F_i - g^{j\alpha}g_{ij}\nabla_\alpha p + \frac{3\lambda - 2\mu}{3}g^{j\alpha}g_{ij}\nabla_\alpha\left(\nabla_k v^k\right) + \mu g^{j\alpha}\nabla_\alpha\nabla_i v_j + \mu g^{j\alpha}\nabla_\alpha\nabla_j v_i = \\
&= F_i - g_i^\alpha\nabla_\alpha p + \frac{3\lambda - 2\mu}{3}g_i^\alpha\nabla_\alpha\left(\nabla_k v^k\right) + \mu\nabla_\alpha\nabla_i\left(v_j g^{j\alpha}\right) + \mu\nabla^2 v_i = \\
&= F_i - \nabla_i p + \frac{3\lambda - 2\mu}{3}\nabla_i\left(\nabla_k v^k\right) + \mu\nabla_i\left(\nabla_\alpha v^\alpha\right) + \mu\nabla^2 v_i = \\
&= F_i - \nabla_i p + \frac{3\lambda + \mu}{3}\nabla_i\left(\nabla_k v^k\right) + \mu\nabla^2 v_i.
\end{aligned}$$

- В итоге система разрешающих уравнений, описывающая течение баротропной вязкой жидкости, будет состоять из пяти уравнений – уравнения неразрывности, уравнений движения (уравнений Навье-Стокса), баротропной зависимости:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla_i v^i = 0,$$

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = F_i - \nabla_i p + \frac{3\lambda + \mu}{3}\nabla_i\left(\nabla_k v^k\right) + \mu\nabla^2 v_i,$$

$$p = p(\rho).$$

- В связи с отсутствием в системе разрешающих уравнений для вязкой жидкости компонент тензора напряжений видоизменяется запись динамических граничных условий.
- В общем случае динамические граничные условия накладывают ограничения на компоненты тензора напряжений на поверхности сплошной среды. Подобные ограничения накладываются на взаимосвязь распределений скорости и давления в окрестности границы:

$$\left(-pg_{ij} + \frac{(3\lambda - 2\mu)}{3}\left(\nabla_k v^k\right) g_{ij} + \mu\nabla_i v_j + \mu\nabla_j v_i\right) n^j = p_{ni}$$

- Система разрешающих уравнений течения вязкой жидкости, будучи записана с использованием тензорной символики, имеет универсальный характер с точки зрения выбора системы координат.

Спасибо за внимание