Дискретная математика

ЧАСТЬ 3 Комбинаторика

Ларионов Владимир Борисович
E – mail: vb_larionov@mti.edu.ru

3. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемого *комбинаторной конфигурацией*. Простейшими примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения, сочетания и разбиения.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – множество из n элементов.

Из этого множества можно выбирать элементы, которые будут образовывать подмножества с определенными свойствами. В зависимости от свойств подмножеств получатся различные *комбинаторные объекты*. С каждым комбинаторным объектом связано *комбинаторное число* – количество комбинаторных объектов этого вида, которые можно выбрать из исходного множества.

Теорема перемножения (принцип произведения)

1. Если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, после каждого выбора следующий за ним элемент a_2 можно выбрать n_2 способами, …, после выбора элементов $a_1, \ldots, a_{k-1}$ элемент a_k выбирается n_k способами, т. е.

$$
\begin{gathered}
a_1 \to n_1, \\
a_2 \to n_2, \\
\ldots\ldots\ldots \\
a_m \to n_m,
\end{gathered}
$$

Тогда мощность множества **A={(a$_1$,a$_2$,…..a$_m$)}** равняется $|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots n_m$

2. *Перестановки без повторений* – это число способов введения линейного порядка на множестве из n элементов.

$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ – перестановка n элементов в ряд.

$P_n = (n-1)!$ – перестановка n элементов в круг.

3. *Перестановки с повторениями.* Пусть имеется $\mathbf{n_1}$ предметов 1-го типа, $\mathbf{n_2}$ предметов 2-го, $\mathbf{n_m}$ предметов m-го типа и при этом $\mathbf{n_1} + \mathbf{n_2} + \ldots + \mathbf{n_m} = \mathbf{n}$. Количество разных перестановок предметов равно

$$\overline{P_n} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}.$$

4. *Размещения без повторений* – это когда из n элементов множества требуется выбрать m элементов $(m \le n)$ и линейно их упорядочить:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

При этом порядок расположения элементов в выборке важен и повторы элементов исключены.

Число A_n^m называют числом размещений без повторений из n по m.

5. *Размещения с повторениями.* Если имеется n типов предметов (количество предметов каждого типа неограниченно) и m позиций (ящиков, кучек, разрядов), то количество различных последовательностей при условии, что в позициях предметы могут повторяться, вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

При этом порядок расположения элементов в выборке важен. Такие последовательности называют размещениями с повторениями.

6. *Сочетания без повторений* – это когда из n-элементного множества просто выбирается его m-элементное подмножество без упорядочивания. Число m-элементных подмножеств n-элементного множества обозначается через C_n^m и называется числом сочетаний из n по m.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Порядок расположения элементов в выборке не важен, и повторы элементов исключены.

Замечание. Вышеприведенную формулу можно трактовать, как число способов разбить n-элементное множество на две группы, в одной из которых m элементов, в другой $(n-m)$ элементов.

7. Сочетания с повторениями – это когда m-элементные наборы составляются из предметов n видов.

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Порядок расположения элементов в выборке не важен, и повторы элементов возможны.

3.1. Примеры решения задач

Пример 1.3.1. Сколько существует четырехзначных чисел, которые делятся на 5?

Решение. Четырехзначное число содержит четыре десятичных разряда. Старший разряд числа может быть заполнен любой из девяти цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Нуль не может использоваться, так как иначе число будет трехзначным, а не четырехзначным. Второй и третий разряды заполняются любой цифрой из десяти. Младший разряд можно заполнить только нулем или пятеркой, так как число делится на пять, если оно оканчивается на 0 или 5. Таким образом, по правилу произведения общее число способов составления заданных чисел равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$.

Пример 1.3.3. Найти количество перестановок букв слова «КОМБИНАТОРИКА».

Решение. В этом слове 2 буквы «К», 2 буквы «О», 1 буква «М», 1 буква «Б», 2 буквы «И», 1 буква «Н», 2 буквы «А», 1 буква «Т» и 1 буква «Р». Общее количество букв в слове равно $2+2+1+1+2+1+2+1+1=13$. Количество перестановок букв этого слова определяем по формуле

$$\overline{P_n} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_m!},$$

где $n = 13$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$, $n_4 = 1$, $n_5 = 2$, $n_6 = 1$, $n_7 = 2$, $n_8 = 1$, $n_9 = 1$.

Получаем $\dfrac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = \dfrac{13!}{16} = 389188800$ перестановок

Примеры решения задач (размещение и сочетание без повторений)

Пример 2.1. В шахматном турнире играют 10 человек. Сколько различных вариантов распределения трех призовых мест между участниками?

Решение. Есть три призовых места, которые не равнозначны. На них претендуют 10 участников. Поэтому число различных распределений призовых мест равно числу размещений из 10 по 3: $A_{10}^3 = (10)_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ вариантов.

Ответ: 720 вариантов.

Пример 2.2. В городском первенстве по хоккею участвуют 10 команд. Команды, занявшие три первых места, получают путевки на чемпионат страны. Сколько различных вариантов команд города на чемпионате страны?

Решение. Есть три призовых места, которые равнозначны. На них претендуют 10 команд. Поэтому число различных троек победителей равно числу сочетаний из 10 по 3: $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$ вариантов.

Ответ: 120 вариантов.

Примеры решения задач (размещение и сочетание с повторениями)

Пример 1.3.5. Замок в автоматической камере хранения содержит 4 диска, на каждом из которых записаны цифры 0, 1, …, 9. Сколько различных кодов можно получить?

Решение. Так как порядок цифр в коде имеет значение и цифры могут повторяться, то для решения задачи применяем формулу размещения с повторениями

$$\overline{A}_n^m = n^m,$$ где n = 10, m = 4.

Получаем $\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000$ комбинаций.

Аналогично: характеристический вектор $\overline{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ представлен двоичным кодом, т.е. элементы этого вектора определены на множестве $\{0,1\}$. Сколько существует различных характеристических векторов, представляющих собой «слово» длины = 4?

Решение. Так как отношение линейного порядка в векторе задано, т.е. имеет значение и значение элементов могут повторятся используем формулу числа размещений с повторениями, при этом *n=2, m=4/*

Получаем $\overline{A}_2^4 = 2^4 = 16.$

Упражнения для самостоятельной работы

ТЕМА 2 ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ

Задание 6. Пусть есть конечное множество A (табл. 2.3).

1. Задать отношение R (табл. 2.3):

а) списком;

б) характеристической матрицей.

ТАБЛИЦА 2.3.

Вариант	A	R
1	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	«быть строго больше»
2		«быть строго меньше»
3		«быть равно»
4		«быть не равно»
5		«быть делителем»
6		«иметь общий делитель, отличный от единицы»
7		«иметь один и тот же остаток от деления на 3»
8		«отличаться на 2»

ТАБЛИЦА 2.3. (продолжение)

Вариант	A	R
9	{2, 4, 6, 8, 10, 12}	«быть строго меньше»
10		«быть строго больше»
11		«быть равно»
12		«отличаться на 6»
13		«быть не равно»
14		«быть делителем»
15		«иметь общий делитель, отличный от единицы»
16		«отличаться на 4»

Задание 8. Отношения R_1 и R_2 заданы списком (табл. 2.6). Используя характеристические матрицы, построить отношения $R_3 = R_1 \cup R_2$, $R_4 = R_1 \cap R_2$, $R_5 = R_1 \circ R_2$.

ТАБЛИЦА 2.6

Вариант	R_1	R_2
1	{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (e, b)}	{(a, d), (a, e), (b, c), (c, d), (d, b), (e, c)}
2	{(b, c), (c, d), (c, e), (e, a), (a, c)}	{(b, e), (b, a), (c, d), (d, e), (e, c), (a, d)}
3	{(c, d), (d, e), (d, a), (a, b), (b, d)}	{(c, a), (c, b), (d, e), (e, a), (a, d), (b, e)}
4	{(d, e), (e, a), (e, b), (b, c), (c, e)}	{(d, b), (d, c), (e, a), (a, b), (b, e), (c, a)}
5	{(e, a), (a, b), (a, c), (c, d), (d, a)}	{(e, c), (e, d), (a, b), (b, c), (c, a), (d, b)}
6	{(a, b), (b, c), (b, d), (d, e), (e, b), (c, d)}	{(a, d), (a, e), (b, c), (c, d), (d, b), (e, c)}
7	{(b, c), (c, d), (c, e), (e, a), (a, c), (d, e)}	{(b, e), (b, a), (c, d), (d, e), (e, c), (a, d)}
8	{(c, d), (d, e), (d, a), (a, b), (b, d), (e, a)}	{(c, a), (c, b), (d, e), (a, e), (a, d), (b, e)}
9	{(d, e), (e, a), (e, b), (b, c), (c, e), (a, b)}	{(d, b), (d, c), (e, a), (b, a), (b, e), (c, a)}
10	{(e, a), (a, b), (a, c), (c, d), (d, a), (b, c)}	{(e, c), (e, d), (a, b), (c, b), (c, a), (d, b)}

МТИ

ТЕМА 3 КОМБИНАТОРИКА

ВАРИАНТЫ 1 и 6

1. Замок в автоматической камере хранения содержит 4 диска, на каждом из которых записаны цифры 0, 1, …, 9. Сколько различных кодов можно получить?

2. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в эстафете 4х100м. Сколькими способами это можно сделать?

3. Определить число различных бросаний двух одинаковых кубиков.

4. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами равной ширины, если имеется материя 6 цветов? Порядок следования цветов важен. Все цвета на флаге различны.

5. Сколькими способами могут встать в круг 10 человек?

6. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок одного достоинствам. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

7. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «математика»?

ВАРИАНТЫ 2 и 7

ТЕМА 3 КОМБИНАТОРИКА

1. Сколько различных сигналов можно подать шестью флажками различных цветов? Отличие сигналов заключается в порядке расположения разноцветных флажков на мачте.

2. Сколькими способами можно составить подразделение из 6 рабочих четырех специальностей?

3. В группе из 25 человек разыгрывается три различных приза. Призы могут достаться одному человеку, двоим, троим. Сколькими способами призы могут распределиться?

4. Сколькими способами может быть выбрано 5 номеров из 36?

5. Пусть имеется 7 языков. Сколько нужно издать словарей, чтобы был возможен непосредственный перевод с любого языка на любой?

6. Сколько различных кодовых последовательностей можно получить перестановками кода 102020030?

7. Сколько существует нечетных четырехзначных чисел, начинающихся четной цифрой?

ВАРИАНТЫ 3 и 8

ТЕМА 3 КОМБИНАТОРИКА

1. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего нужно выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

2. Сколько различных ожерелий можно составить из 10 различных бусинок?

3. В пачке 20 экзаменационных билетов. Каждый студент получает билет, отвечает на него, билет возвращается в пачку, и после этого заходит следующий студент. Сколько различных вариантов раздачи билетов существует для 10 студентов?

4. Сколько можно составить кодов из 6 цифр каждый, так, чтобы все цифры были различны?

5. В магазине продаются конфеты четырех видов. Сколькими способами можно купить 8 конфет?

6. Тренер футбольной команды желает сделать одновременную замену двух полевых игроков, у него в распоряжении 5 футболистов на скамейке запасных. Скольким способами он может это сделать?

ТЕМА 3 КОМБИНАТОРИКА

ВАРИАНТЫ 4 и 9

1. Сколько можно составить сигналов из шести флажков разного цвета, взятых по 2?

2. Футбольный матч закончился «вничью», и его судьба решается в серии послематчевых пенальти. Сколько у тренера возможностей представить судье список 5 пенальтистов из 11 закончивших матч футболистов при условии, что порядок игроков в списке имеет значение?

3. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «ингредиент»?

4. Сколькими способами можно оснастить две различные фирмы тремя компьютерами разных типов?

5. У ювелира есть 5 различных изумрудов, 8 различных рубинов и 7 различных сапфиров. Сколькими способами он может выбрать из них три камня для брошки?

6. В магазине продаются конфеты двух видов. Сколькими способами можно купить четыре конфеты?

ВАРИАНТЫ 5 и 10

ТЕМА 3 КОМБИНАТОРИКА

1. Сколько существует возможных последовательностей выполнения проверок финансовой деятельности трех подразделений?

2. Сколько двузначных чисел можно составить из трех цифр, если каждая цифра входит в число один раз?

3. В распоряжении имеются яблоки, груши и апельсины. Сколькими способами может быть составлен подарочный набор из 5 фруктов?

4. Восемь человек разбиваются на две команды по 4 человека в каждой. Сколькими способами это можно сделать?

5. На складе имеется 7 рулонов ткани различных цветов и 5 различных стульев. Каждого рулона достаточно для обивки всех стульев. Скольким способами можно обить стулья?

6. Из города А в город В ведут три дороги, а из города В в город С – 4 дороги. Сколькими способами можно добраться из А в С через В?