Математический анализ
3 семестр

Лекция 1

Знакопостоянные числовые ряды.

05 сентября 2018 года

Лектор: Профессор НИЯУ МИФИ, д.ф.-м.н.
Орловский Дмитрий Германович

Понятие числового ряда и его сходимости

Пусть имеется числовая последовательность

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Символ

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

будем называть **числовым рядом**, а элементы последовательности – его **членами.** Рассмотрим теперь последовательность **частичных сумм** ряда (1):

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \ldots \quad ,$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad \ldots \quad = \{S_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Понятие числового ряда и его сходимости

Определение. Если существует конечный или нет предел последовательности частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то он называется **суммой ряда** (1), при этом пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Если $|S| < +\infty$, то ряд (1) называют **сходящимся**, если же

$$|S| = +\infty$$

или не существует, то ряд называют **расходящимся.**

Пример:

Доказать по определению, что ряд сходится, и вычислить его сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}.$$

Решение

$$\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)}-\frac{1}{(2k+1)}\right)$$

Пример

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)}-\frac{1}{(2k+1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}.$$

Пример

Пример: $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-1+1-\ldots$$

Доказать по определению, что этот ряд расходится.

Решение:

Можно указать две подпоследовательности последовательности частичных сумм, имеющие различные пределы:

$$\begin{cases} S_{2m-1} = -1 \to -1, \\ S_{2m} = 0 \to 0. \end{cases}$$

Следовательно, последовательность частичных сумм предела не имеет, и ряд расходится.

Ряд из геометрической прогрессии

Пример: ряд, образованный геометрической прогрессией.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + \ldots + q^n + \ldots$

Замечание. Ради удобства нумерация членов ряда не всегда начинается с единицы, при этом $n-$ой частичной суммой все равно считается сумма всех членов ряда до u_n включительно.

В данном случае частичная сумма

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}, \; q \neq 1, \\ n+1, \; q = 1. \end{cases}$$

Отсюда $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ (сходится) при $|q| < 1$; расходится при $|q| \geq 1$.

Связь сходимости последовательности и ряда

Понятия сходимости ряда и последовательности тесно связаны. Так сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

есть сходимость последовательности его частичных сумм.

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Верно и обратное. Для любой последовательности

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

можно построить такой ряд, для которого члены этой последовательности являются частичными суммами:

Связь сходимости последовательности и ряда

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2 - a_1, \quad u_3 = a_3 - a_2, \quad \dots \quad ,$$

$$u_n = a_n - a_{n-1}, \quad \dots$$

Тогда частичными суммами ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

будут элементы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$S_1 = a_1, \;\; S_2 = a_2, \dots, \; S_n = a_n, \dots$$

Теорема (критерий Коши)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : \forall m > n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| < \varepsilon \right).$$

(это условие называется **условием Коши** для ряда)

⇔

Критерий Коши

Доказательство: следует из связи сходимости ряда со сходимостью последовательности его частичных сумм. По критерию Коши для последовательностей

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \forall m > n > N \Rightarrow \left|S_m - S_n\right| < \varepsilon$$

$$S_m - S_n = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_m) -$$

$$-(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_m = \sum_{k=n+1}^{m} u_k$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \forall m > n > N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon$$

Необходимое условие сходимости

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Доказательство. Пусть данный ряд сходится, применим критерий Коши при m=n+1

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+1} u_k\right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow \left|u_{n+1}\right| < \varepsilon$$

Но это равносильно тому, что $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Построение отрицания критерия Коши

Критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \forall m > n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| < \varepsilon$$

Отрицание:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \quad \exists m > n > N : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| \geq \varepsilon.$$

Расходимость гармонического ряда

Гармонический ряд: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}$

Отрицание критерия Коши:

$$\exists\varepsilon>0:\forall N\quad \exists m>n>N:\quad \left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k\right|\geq\varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon=1/2$ и N - любое, выберем $n=N+1$, $m=2N+1$ ($m>n>N$), тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}\right|=\left|\sum_{k=N+2}^{2N+2}\frac{1}{k}\right|=\frac{1}{N+2}+\ldots+\frac{1}{2N+2}\geq$$

$$\geq\frac{1}{2N+2}+\ldots+\frac{1}{2N+2}=\frac{N+1}{2N+2}=\frac{1}{2}=\varepsilon.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится, хотя необходимое условие сходимости выполнено: $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.}$

Остаток ряда

Определение.

Ряд $\boxed{r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k}$ называется n-ым остатком ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Утверждение. Последовательность остатков сходящегося ряда является бесконечно малой.

Доказательство. Последовательность частичных сумм ряда r_n

$$\sigma_m = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m}) -$$

$$-(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = S_{n+m} - S_n \to S - S_n \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

Следовательно, сумма ряда-остатка

$$\boxed{r_n = S - S_n} \to S - S = 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Изменение конечного числа членов ряда

Теорема. Изменение конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость или расходимость.

Доказательство. Пусть два ряда отличаются конечным числом членов, тогда начиная с некоторого номера частичные суммы этих рядов будут отличаться на постоянную величину

$$\exists N \ \forall n \geq N \ \boxed{S'_n = S_n + const}$$

но тогда пределы последовательностей частичных сумм оба либо существуют, либо не существуют.

Задача. Если к ряду добавить конечное число членов или выбросить из него конечное число членов, то сходимость (расходимость) этого ряда не изменится.

Задачи.

- Если $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, и его сумма равна S, то $\forall c \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot u_k)$ также сходится, причем его сумма равна $c \cdot S$.
- Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся, и их суммы равны соответственно S_u и S_v, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k)$ также сходится, и его сумма $S_{u+v} = S_u + S_v$.
- Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot u_k)$, где $c \neq 0$, сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство этих утверждений основано на связи сходимости ряда со сходимостью последовательности (частичных сумм) и на арифметических свойствах предела последовательности.

Знакоположительные ряды

Рассмотрим ряд все члены которого неотрицательны. Такой ряд называется **знакоположительным**. Аналогично можно рассмотреть **знакоотрицательный** ряд, все члены которого неположительны.

Оба типа рядов носят название **знакопостоянных** (**знакоопределенных).** Для таких рядов можно сформулировать особые признаки сходимости.

Далее будем рассматривать только знакоположительные ряды (знакоотрицательные сводятся к ним умножением ряда на -1).

$$S_{n+1} - S_n = u_n$$

Ряд является знакоположительным тогда и только тогда, когда частичные суммы ряда образуют монотонно неубывающую последовательность.

Критерий сходимости знакоположительного ряда

Теорема. Знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (\forall n \;\; u_n \geq 0)$$

сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм ряда S_n ограничена сверху, при этом сумма ряда равна точной верхней грани последовательности частичных сумм.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \operatorname{Sup}_{n\geq 1} S_n$$

Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы о пределе неубывающей последовательности.

Признаки сравнения

Пусть $\forall n \;\; u_n \geq v_n \geq 0,$ тогда из сходимости ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, а из расход имости

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Если S_n и S'_n частичные суммы первого и второго ряда, то

$$\boxed{S_n} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \boxed{\geq} v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \boxed{S'_n}$$

Отсюда следует, что из ограниченности S_n (сходимости первого ряда) следует ограниченность S'_n (сходимость второго ряда), а из неограниченности S'_n (расходимости второго ряда) следует неограниченность S_n (расходимость первого ряда).

Задачи к признакам сравнения

Задача 1. Признаки сравнения остаются верными, если соотношение $u_n \geq v_n \geq 0$ становится верным с некоторого конечного номера N_0.

Задача 2. Признаки сравнения остаются верными, если соотношение $u_n \geq v_n \geq 0$ заменить на $c \cdot u_n \geq v_n \geq 0,\ c > 0$.

Указание. В первой задаче перейти к рядам с выброшенными N_0 первыми членами. Во второй задаче воспользоваться равносильностью сходимости рядов с общими членами u_n и cu_n.

Признак сравнения в предельной форме

Пусть $\forall n \;\; u_n > 0$ и существует конечный предел

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{v_n}{u_n} > 0$$

Тогда оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ либо сходятся, либо расходятся.

Так как последовательность v_n / u_n сходится, то она ограничена

$\frac{v_n}{u_n} = \left| \frac{v_n}{u_n} \right| \le c$ Переходя в этом неравенстве к пределу получим, что

$L \le c$, откуда следует, что $c > 0$ (так как $L > 0$). Кроме того неравенство ограниченности можно записать в виде $v_n \le c u_n$. Утверждение теоремы теперь следует из задачи 2.

Признак Даламбера

Теорема (Признак Даламбера в допредельной форме).

Пусть все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны $(\forall n\ u_n > 0)$. Тогда

1) Если $\forall n \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le q < 1$, то ряд сходится.

2) Если $\forall n \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$, то ряд расходится.

Признак Даламбера

Доказательство.

$$1)\ \frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_4}{u_3}\cdots\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdot\frac{u_n}{u_{n-1}}\le q\cdot q\cdot q\cdots q\cdot q=q^{n-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{u_n}{u_1}\le q^{n-1}\Rightarrow\boxed{u_n\le u_1q^{n-1}}$$

Утверждение теоремы следует теперь из теоремы сравнения.

$$2)\ \frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_4}{u_3}\cdots\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdot\frac{u_n}{u_{n-1}}\ge 1\cdot 1\cdot 1\cdots 1\cdot 1=1\Rightarrow\frac{u_n}{u_1}\ge 1\Rightarrow\boxed{u_n\ge u_1}$$

Если бы ряд сходился, то должно быть выполнено необходимое условие: предел общего члена равен нулю, однако из полученного неравенства следует, что

$$\lim_{n\to\infty}u_n\ge u_1>0$$

(противоречие). Следовательно, ряд расходится.

Признак Даламбера

Теорема (Признак Даламбера в предельной форме).

Пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и существует $\lim_{x\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$. Тогда если $q<1$, то ряд сходится, а если $q>1$, то ряд расходится.

1) Пусть $q<1$, возьмем $q_1 \in (q;1)$ и $\varepsilon = q_1 - q$. Тогда $\varepsilon > 0$ и по определению предела найдется такое N, что при всех $n>N$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - q\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{u_{n+1}}{u_n} - q < \varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon + q = q_1 < 1$$

Поэтому для ряда $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ выполнено условие признака Даламбера в допредельной форме. Следовательно этот ряд сходится, а вместе с ним сходится и исходный ряд.

Признак Даламбера

2) Пусть $q > 1$, возьмем q_1 ($1 < q_1 < q$), $\varepsilon = q - q_1$. Тогда $\varepsilon > 0$ и по определению предела найдется такое N, что при всех $n > N$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - q\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{u_{n+1}}{u_n} - q > -\varepsilon \;\Rightarrow\; \frac{u_{n+1}}{u_n} > q - \varepsilon = q_1 > 1$$

Поэтому для ряда $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$ выполнено условие признака Даламбера в допредельной форме. Следовательно этот ряд расходится, а вместе с ним расходится и исходный ряд.

Рассмотренные выше примеры сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ и расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ показывают, что при q=1 признак Даламбе ра ответа на вопрос сходимости не дает. Для обоих рядов величина $q = 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 1}{4(n+1)^2 - 1} = 1.$

Радикальный признак Коши

Теорема (признак Коши в допредельной форме).

Пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ неотрицательны, N_0 -некоторый номер. Тогда

1) если $\forall n > N_0 \quad \sqrt[n]{u_n} \le q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится;

2) если $\forall n > N_0 \quad \sqrt[n]{u_n} \ge 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Доказательство.

1) При всех $n > N_0 \quad \sqrt[n]{u_n} < q \Rightarrow u_n < q^n$. Так как $q < 1$, то по признаку сравнения ряд $\sum_{n=N_0}^{\infty} u_n$, а вместе с ним и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

2) При всех $n > N_0 \quad \sqrt[n]{u_n} \ge 1 \Rightarrow u_n \ge 1 \Rightarrow$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Радикальный признак Коши

Теорема (признак Коши в предельной форме).

Пусть все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ неотрицательны и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$. Тогда если $q<1$, то ряд сходится, а если $q>1$, то ряд расходится.

1) Пусть $q<1$, возьмем $q_1 \in (q;1)$ и $\varepsilon = q_1 - q$. Тогда $\varepsilon > 0$ и по определению предела найдется такое N_0, что при всех $n > N_0$

$$\left|\sqrt[n]{u_n} - q\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{u_n} - q < \varepsilon \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{u_n} < \varepsilon + q = q_1 \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{u_n} < q_1 < 1$$

Согласно признаку Коши в допредельной форме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

2) Пусть $q>1$, возьмем $q_1 \in (1;q)$ и $\varepsilon = q - q_1$. Тогда $\varepsilon > 0$ и по определению предела найдется такое N_0, что при всех $n > N_0$

$$\left|\sqrt[n]{u_n} - q\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{u_n} - q > -\varepsilon \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{u_n} > q - \varepsilon = q_1 \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{u_n} > q_1 > 1 \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{u_n} > 1$$

Согласно признаку Коши в допредельной форме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Радикальный признак Коши

Так же как и в случае признака Даламбера, признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда для случая q=1. В качестве примеров подходят те же ряды, которые мы рассматривали для признака Даламбера.

Примеры сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ и расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ показывают, что при q=1 признак Коши ответа на вопрос сходимости не дает. Для обоих рядов величина $q=1$.

Задача.

Показать самим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1}}=1.$

Интегральный признак Коши-Маклорена

Теорема (признак Коши-Маклорена).

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и невозрастает на промежутке $[1,+\infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Доказательство.

Так как заданная функция неотрицательна, то сходимость ряда равносильна ограниченности частичных сумм

$$S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n),$$

а сходимость интеграла равносильна ограниченности первообразной

$$F(x) = \int\limits_{1}^{x} f(t)\,dt.$$

Интегральный признак Коши-Маклорена

Выведем сначала нужные для доказательства оценки. В силу монотонности подинтегральной функции и свойств интеграла

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \le \int_k^{k+1} f(t)\,dt \le \int_k^{k+1} f(k)\,dt$$

$$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(t)\,dt \le f(k)$$

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n) \le \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt + \ldots + \int_{n-1}^n f(t)\,dt \le f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)$$

$$S_n - f(1) \le \int_1^n f(t)\,dt \le S_{n-1} \Rightarrow S_n - f(1) \le F(n) \le S_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} S_n \le F(n) + f(1) \\ F(n) \le S_{n-1} \end{cases}}$$

Интегральный признак Коши-Маклорена

Теперь воспользуемся полученными неравенствами

$$\begin{cases} S_n \le F(n) + f(1) \\ F(n) \le S_{n-1} \end{cases}$$

Пусть сходится несобственный интеграл, тогда ограничена первообразная:

$$\exists\, M > 0\ \forall x \in [1;+\infty)\ F(x) \le M,$$

но тогда при всех n

$$S_n \le F(n) + f(1) \le M + f(1),$$

т.е. ограничены частичные суммы ряда и поэтому ряд сходится.

Пусть сходится ряд. Тогда ограничены частичные суммы ряда

$$\exists\, M > 0\ \forall n\ S_n \le M,$$

но тогда при всех $x \ge 1$

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt \le \int_1^{[x]+1} f(t)\,dt = F([x]+1) \le S_{[x]} \le M,$$

т.е. ограничена первообразная и поэтому интеграл сходится.

Основные вопросы по лекции

1) Понятие числового ряда, его сходимости, суммы.
2) Критерий Коши сходимости числового ряда.
3) Необходимое условие сходимости.
4) Арифметические свойства сходящихся рядов.
5) Ряды с неотрицательными членами. Критерий сходимости.
6) Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнения.
7) Признак Даламбера в допредельной и предельной форме.
8) Признак Коши в допредельной и предельной форме.
9) Интегральный признак Коши-Маклорена.

Математический анализ.
«Знакопостоянные числовые ряды»
Лекция 1
Завершена.

Спасибо за внимание!

Тема следующей лекции:
«Знакопеременные числовые ряды».
Лекция состоится в среду, 12 сентября
в 12:45 по Московскому времени.