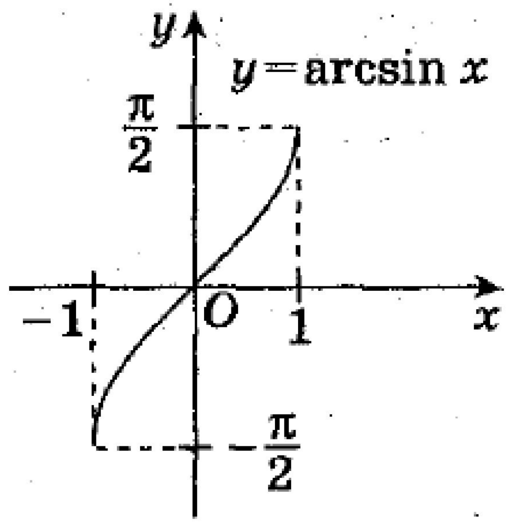
Обратные тригонометрические функции.

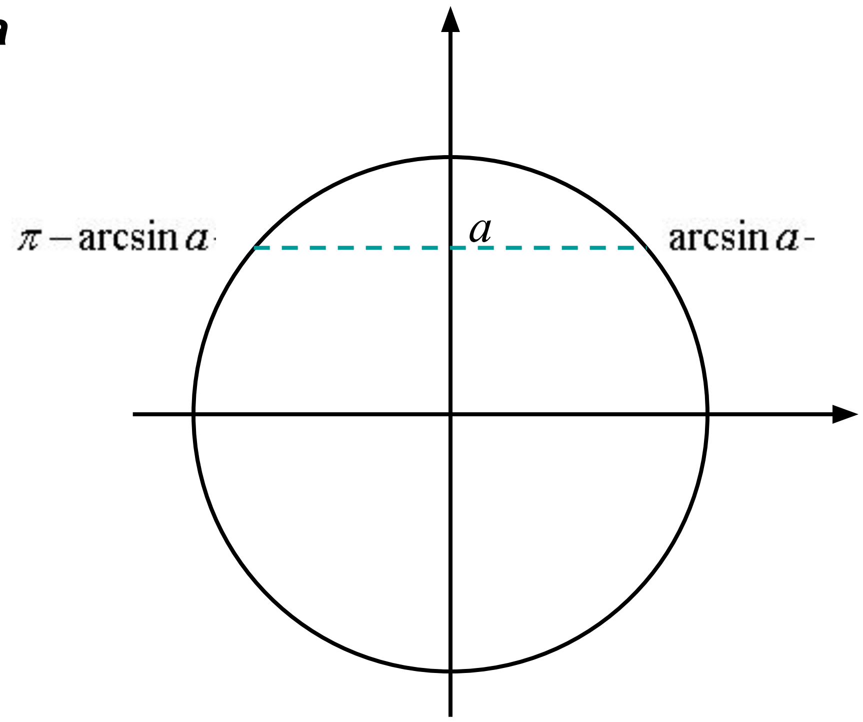
На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ***y=sin(x)*** монотонно возрастает, поэтому на нём можно определить обратную ему функцию. Она называется арксинус *y=**arcsin** (x)*.



Определение:
Если число $x \in [-1;1]$, то **arcsin** (x) - это угол, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ синус которого равен x.

$$\alpha = \arcsin X \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = X \\ -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sin x = a



Решения уравнения ***sin x = a*** можно найти при $-1 \leq a \leq 1$ по формуле

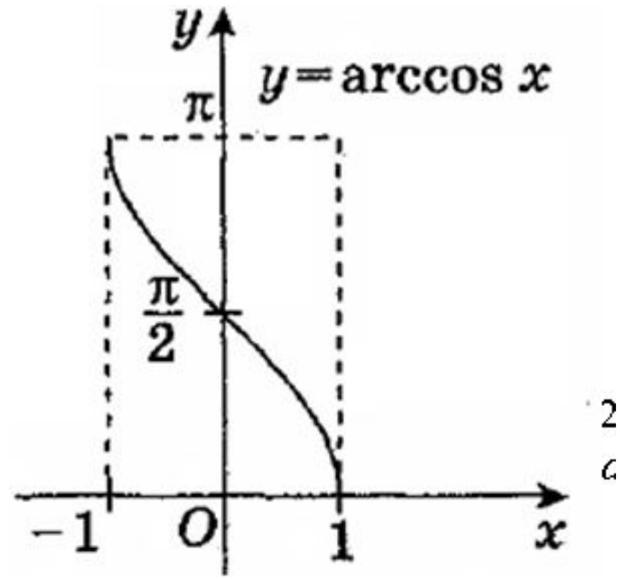
$$x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$$

или по (эквивалентной) совокупности формул

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z; \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in Z \end{array}\right.$$

На отрезке [0; π] косинус монотонно убывает, поэтому на этом промежутке можно определить обратную ему функцию.

Она называется ***арккосинус***



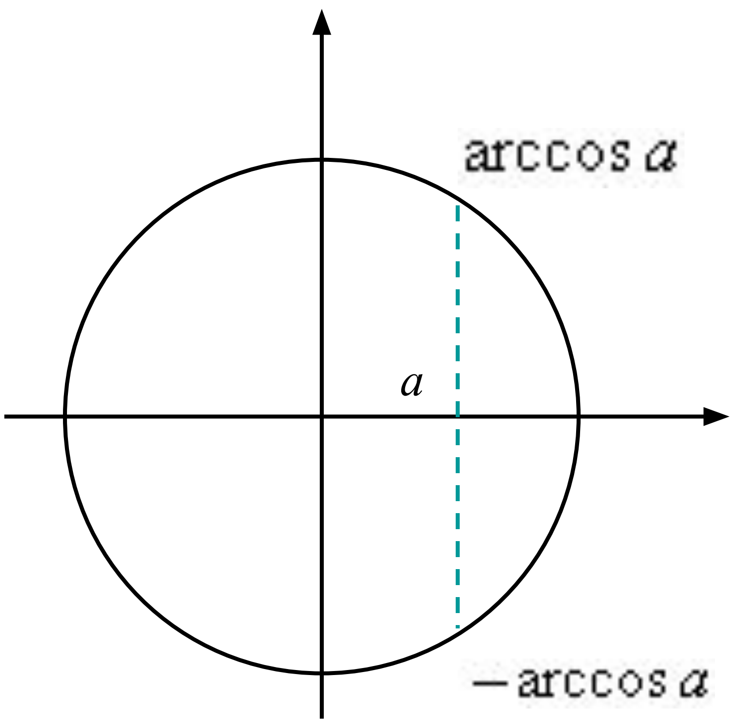
Определение:

arccos (x) это угол, косинус которого равен x.

Если $x = \cos(\alpha)$, то arccos (x) = α.

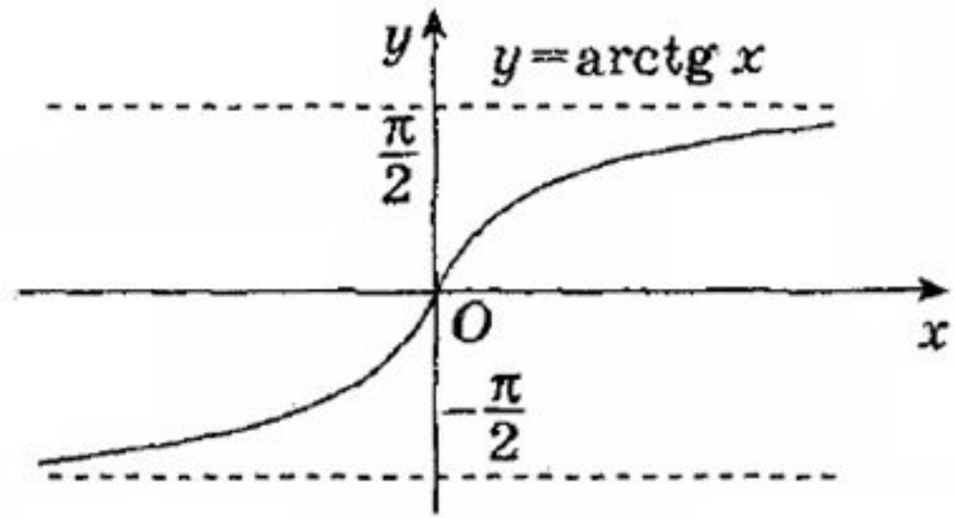
$$\alpha = \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = x \\ 0 \le \alpha \le \pi. \end{cases}$$

$$\cos x = a$$



$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$$

На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс возрастает, поэтому на этом множестве можно определить обратную ему функцию. Она называется *арктангенс*



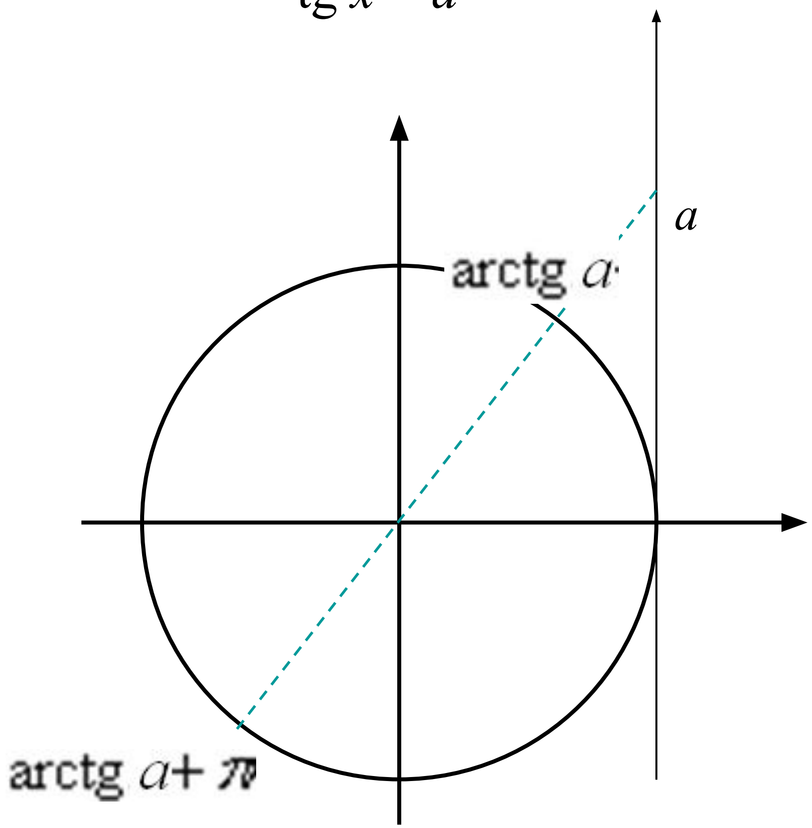
Определение:

arctg (*x*) это угол, тангенс которого равен x.

Если x = tg(α), то arctg(x) = α.

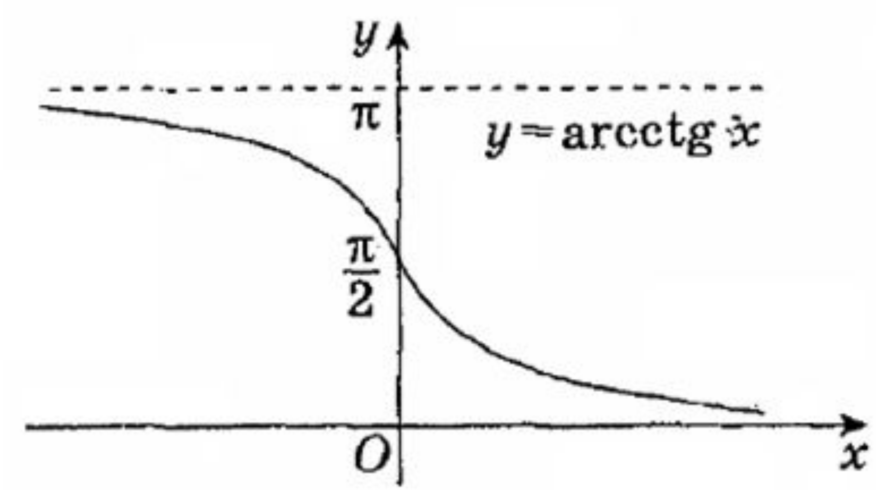
$$\alpha = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = x, \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

tg $x = a$



$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$$

На (главном) интервале $(0; \pi)$ котангенс монотонно убывает, поэтому на этом промежутке можно определить обратную ему функцию. Она называется *арккотангенс*:



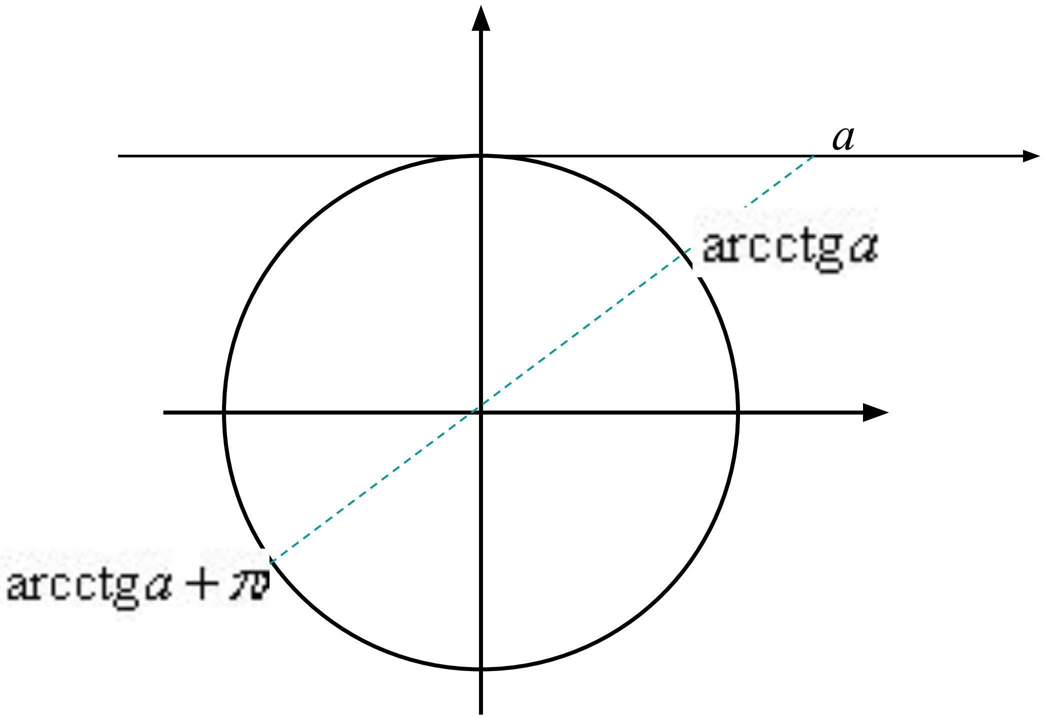
Определение:

arcctg (x) это угол, котангенс которого равен x.

Если x = ctg(α), то arcctg(x) = α.

$$\alpha = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} \alpha = x \\ 0 < \alpha < \pi. \end{cases}$$

$\mathrm{ctg}\, x = a$



$$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in Z$$

Основные соотношения для аркфункций

$$\sin(\arcsin a) = a, \ \cos(\arccos a) = a, \ a \in [-1; 1]$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a, \ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a, \ a \in \boldsymbol{R}.$$

$$\arcsin(\sin\varphi) = \varphi, \ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \ \arccos(\cos\varphi) = \varphi, \ \varphi \in [0; \pi]$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi, \ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \ \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\varphi) = \varphi, \ \varphi \in (0; \pi);$$

Соотношения между обратными тригонометрическими функциями

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Пример 1. Вычислить $\arccos(-0{,}5)$. Дать геометрическое толкование.

$\triangle$ По определению $\arccos(-0{,}5)$ — это угол α, лежащий в пределах от 0 до π, для которого $\cos\alpha = -0{,}5$. Это означает, что на тригонометрической окружности ему соответствует точка B с абсциссой

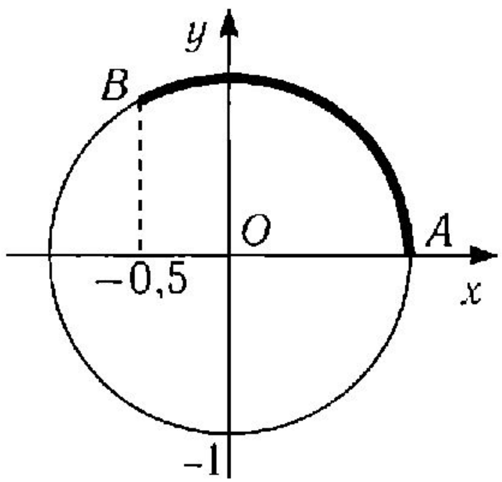


Рис. 22

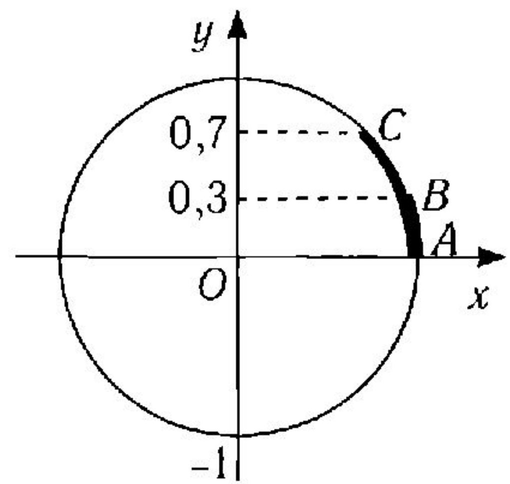


Рис. 23

$(-0{,}5)$, лежащая в верхней полуплоскости, и величина α определяется длиной дуги AB (рис. 22). Следовательно, $\arccos(-0{,}5) = 2\pi/3$ и дуга AB — геометрический аналог $\arccos(-0{,}5)$. ▲

Пример 2. Сравнить $\arcsin 0{,}3$ и $\arcsin 0{,}7$.

Δ По определению $\arcsin 0{,}3$ — это угол α, лежащий в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, для которого $\sin\alpha = 0{,}3$. Это означает, что на тригонометрической окружности ему соответствует точка B с ординатой 0,3, лежащая в верхней полуплоскости, а его величина определяется длиной дуги AB. Выделим на тригонометрической окружности эту дугу (рис. 23). В свою очередь, согласно определению, $\arcsin 0{,}7$ — это угол β, лежащий в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, для которого $\sin\beta = 0{,}7$. Это означает, что на тригонометрической окружности ему соответствует точка C с ординатой 0,7, лежащая в верхней полуплоскости, а его величина определяется длиной дуги AC (см. рис. 23). Так как длина дуги AC больше длины дуги AB, то $\arcsin 0{,}3 < \arcsin 0{,}7$. ▲

Пример 3. Вычислить $\arcsin\sin 8$.

Δ Положим $\arcsin\sin 8 = \alpha$. Опыт показывает, что, увидев это равенство, многие, не задумываясь, выдают неверный ответ $\alpha = 8$. Ошибки удается избежать, если аккуратно пользоваться определением арксинуса: $\arcsin b = \alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = b, -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Заметим, что для любого b, $|b| \leqslant 1$, α находится однозначно. В нашем случае α определяется условиями $\sin\alpha = \sin 8$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Первое равенство можно переписать в виде $\sin\alpha = \sin(8 - 2\pi) = \sin(\pi - (8 - 2\pi)) = \sin(3\pi - 8)$. Так как $2{,}5\pi < 2{,}5 \cdot 3{,}15 < 8 < 3\pi$, то $-3\pi < -8 < -\frac{5\pi}{2}$ и $0 < 3\pi - 8 < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, для угла $3\pi - 8$ условия $\sin\alpha = \sin 8$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ выполнены, и, значит, $\arcsin\sin 8 = 3\pi - 8$. $\blacktriangle$

Пример 4. Вычислить $\arccos(\sin 7)$.

$\triangle$ Положим $\arccos(\sin 7) = \alpha$. Тогда α определяется условиями $\cos\alpha = \sin 7$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Так как $\sin 7 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 7\right)$, то равенство $\cos\alpha = \sin 7$ можно записать в виде $\cos\alpha = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 7\right)$. Поскольку $2\pi < 7 < 2{,}5 \cdot 3 < 2{,}5\pi$, то $0 < 2{,}5\pi - 7 < 0{,}5\pi$, следовательно, для угла $2{,}5\pi - 7$ оба условия выполнены, т. е. $\arccos\sin 7 = 2{,}5\pi - 7$. $\blacktriangle$

Пример 43. Вычислим: а) $\arcsin\left(\sin\frac{31\pi}{6}\right)$; б) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right)\right)$.

а) Равенство $\arcsin(\sin x) = x$ верно только для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому, чтобы воспользоваться данной формулой, сначала приведем аргумент в промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, вычитая или прибавляя целое число, кратное 2π:

$$\arcsin\left(\sin\frac{31\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{31\pi}{6} - 4\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

а затем, воспользовавшись формулой $\sin(\pi - x) = \sin x$, «загоним» аргумент в нужный промежуток. Итак, получаем

$$\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6},$$

так как $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

б) Действуем аналогично, только сначала будем приводить аргумент в промежуток $[0; \pi]$:

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{3} + 8\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3},$$

так как $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$.

Пример 5. Вычислить $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

$\triangle$ Положим $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\alpha$. Это означает, что α определяется условиями $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Более того, так как тангенс положителен, то угол α принадлежит интервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому задачу можно переформулировать следующим образом: вычислить $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Чтобы найти $\sin 2\alpha$, представим его в виде $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$. Так как $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, то $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+(1/2)^2}=\frac{4}{5}$. Учитывая, что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, получим $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Далее находим $\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. В итоге получаем $\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$. $\blacktriangle$

Пример 6. Доказать справедливость равенства

$$\arcsin\frac{3}{5} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

$\triangle$ Положим $\arcsin\frac{3}{5}=\alpha$. Это означает, что α определяется условиями $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Более того, поскольку синус положителен, то $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Далее положим $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=\beta$. Это означает, что β определяется условиями $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{4}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$. Более того, поскольку тангенс положителен, то $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, нам нужно сравнить два угла, лежащих в первой четверти. Но в первой четверти имеет место взаимно однозначное соответствие между углами и значениями синусов этих углов. Этот факт означает, что равенство $\arcsin\frac{3}{5}=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ верно в том и только в том случае, если верно равенство $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$. Вычислим $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$ или, согласно введенным выше обозначениям, $\sin\beta$. Нам известно, что $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{4}$ и $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, следовательно, используя равенство $1+\operatorname{ctg}^2\beta=\frac{1}{\sin^2\beta}$, получим $\sin\beta=\frac{3}{5}$. Таким образом, имеем: $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{5}$ и $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\sin\alpha=\frac{3}{5}$, т. е. исходное равенство доказано. $\blacktriangle$

Пример 7. Сравнить числа $\operatorname{arcctg} 0{,}4$ и $\arccos 3/8$.

$\triangle$ Положим $\operatorname{arcctg} 0{,}4 = \alpha$ и $\arccos 3/8 = \beta$. Это означает, что α определяется условиями $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}4$, $0 < \alpha < \pi$, а β — условиями $\cos\beta = 3/8$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$. Более того, так как $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ и $\cos\beta > 0$, то углы α и β принадлежат интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Но на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ имеет место взаимно однозначное соответствие между углами и значениями котангенсов этих углов, причем, если котангенс одного угла больше котангенса другого, то первый угол меньше второго. Для дальнейшего сравнения нам понадобится $\operatorname{ctg}\beta$. Воспользовавшись равенством $1 + \operatorname{tg}^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$, находим $\operatorname{tg}^2\beta = \frac{55}{9}$, откуда с учетом того, что $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, получим $\operatorname{ctg}\beta = \frac{3}{\sqrt{55}}$. Таким образом, можем записать цепочку равносильных сравнений: $\operatorname{arcctg} 0{,}4 \vee \arccos 3/8$, $\alpha \vee \beta$, $\operatorname{ctg}\alpha \wedge \operatorname{ctg}\beta$, $0{,}4 \wedge \frac{3}{\sqrt{55}}$, $\frac{16}{100} \wedge \frac{9}{55}$, $\frac{4}{5} \wedge \frac{9}{11}$. Так как $\frac{4}{5} < \frac{9}{11}$, то $\operatorname{arcctg} 0{,}4 > \arccos 3/8$. $\blacktriangle$

Пример 8. Преобразовать выражение $6\cos t - 8\sin t$ а) к косинусу; б) к синусу некоторого угла.

△ Воспользуемся методом введения вспомогательного угла:

а) $$6\cos t - 8\sin t = \underbrace{\sqrt{6^2+8^2}}_{=10}\cdot\left(\frac{6}{10}\cdot\cos t - \frac{8}{10}\cdot\sin t\right) =$$

$$= 10\cdot(\cos\varphi\cdot\cos t - \sin\varphi\cdot\sin t) = 10\cos(\varphi + t),$$

где $\varphi = \arcsin 0{,}8$ (или $\varphi = \arccos 0{,}6$);

б) $$6\cos t - 8\sin t = \underbrace{\sqrt{6^2+8^2}}_{=10}\cdot\left(\frac{6}{10}\cdot\cos t - \frac{8}{10}\cdot\sin t\right) =$$

$$= 10\cdot(\sin\varphi\cdot\cos t - \cos\varphi\cdot\sin t) = 10\sin(\varphi - t),$$

где $\varphi = \arccos 0{,}8$ (или $\varphi = \arcsin 0{,}6$). ▲

Пример 41. Решим уравнение $\arcsin(x^3 - 3x) = \arcsin(-2x)$.

◘ Арксинус — монотонная функция, поэтому для равенства значений функции необходимо и достаточно равенства аргументов, т. е. $x^3 - 3x = -2x$, откуда получаем $x \in \{-1;\ 0;\ 1\}$. Но не все полученные решения принадлежит области определения уравнения (аргумент арксинуса должен принадлежать промежутку от -1 до 1), таким образом, для корней уравнения должны выполняться неравенства $-1 \leqslant x^3 - 3x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant -2x \leqslant 1$. Из полученных значений этим неравенствам удовлетворяет только $x = 0$. Обратим внимание, что можно было проверять только условие $-1 \leqslant -2x \leqslant 1$ — ведь найденные решения удовлетворяют уравнению $x^3 - 3x = -2x$, а значит, если для них выполняется неравенство $-1 \leqslant -2x \leqslant 1$, то выполняется и неравенство $-1 \leqslant x^3 - 3x \leqslant 1$.

Ответ: $x = 0$. ◙