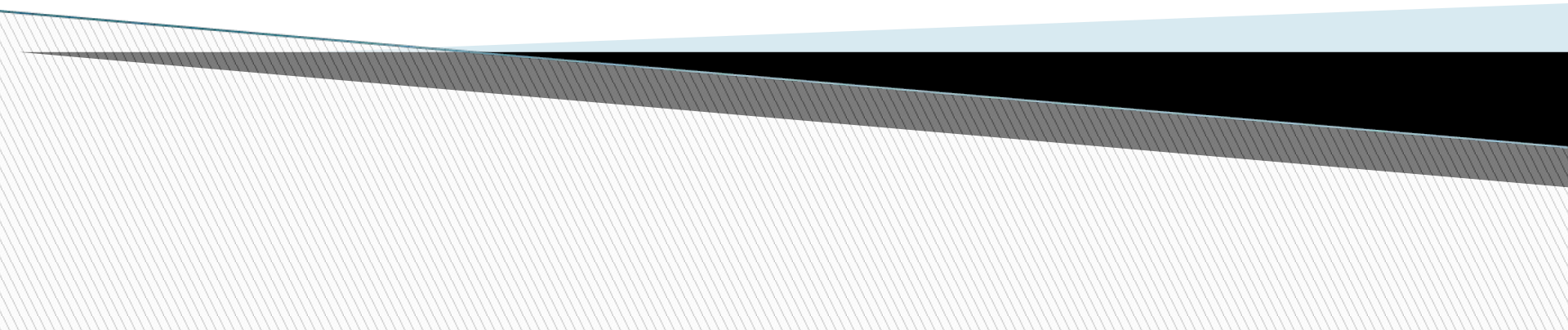


Лекция 8.

Несчетные множества



Несчетность множества действительных чисел



Теорема

Множество действительных чисел несчётно.

Доказательство (от противного)

- Пусть множество действительных чисел счетное. Тогда любое подмножество счетного множества тоже счетное.
- Возьмём на множестве действительных чисел подмножество R_1 - интервал $(0, 1)$ и выкинем из этого отрезка числа, содержащие хотя бы в одном своём разряде нули или девятки (примеры таких чисел: 0.9, 0.0001 и т.д.).
- Множество R_2 , составленное из оставшихся чисел, является подмножеством множества R_1 .

Это означает, что R_2 – счетное.

Доказательство

- Из того факта, что R_2 – счетное, напрямую следует, что возможен какой-либо способ перечисления его элементов для установления взаимно-однозначного соответствия между элементами R_2 и элементами множества натуральных чисел.
- *Это следует из самого определения мощности множества, согласно которому предполагается, что в равномоощных множествах каждый элемент одного множества имеет парный элемент из другого множества и наоборот.*
- **Обратите внимание**, фундаментальное отличие данного определения от определения эффективной перечислимости состоит в том, что в данном случае мы даже не говорим о наличии какого-либо алгоритма перечисления, мы просто утверждаем, что можно привести список действительных чисел из множества R_2 и список соответствующих им натуральных чисел из множества N . Алгоритм построения связи $N \leftrightarrow R_2$ нас в данном случае не интересует, достаточно того, что такое соответствие возможно.

Доказательство

- Построим такой список чисел из множества R_2 и пронумеруем числа в разрядах:

0.a₁₁a₁₂a₁₃...

0.a₂₁a₂₂a₂₃...

.....

0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}...

- Теперь построим число $\mathbf{b}=0.b_1b_2\dots$, причём $b_i=a_{ii}+1$, где $+$ обозначает операцию сложения, результатом которого не могут быть числа 0 и 9, т.е. если $a_{ii}=1$, то $b_i=2$; если $a_{ii}=2$, то $b_i=3$,, если $a_{ii}=8$, то $b_i=1$.

- Таким образом, построенное число \mathbf{b} будет отличаться от каждого из чисел множества R_2 хотя бы в одном разряде, и, следовательно, не попадёт в составленный список. Однако по своей структуре число \mathbf{b} должно содержаться в множестве R_2 . Получили противоречие, значит исходное предположение неверно и множество R_2 - несчётно.

- Так как множество R_2 является по условию подмножеством множества R_1 , то R_1 - несчетно, а т.к. R_1 несчетно - то значит и множество R несчётно, **Q.E.D.**

Примечание...

- Можно и не выбрасывать числа, содержащие 0 и 9. Таким образом, в наш ряд некоторые числа войдут дважды. Это связано с тем, что конечные дроби могут быть превращены в бесконечные. Например $\frac{1}{2}=0,5=0,5(0)=0,4(9)$.
- В общем случае это могло стать причиной того, что не удалось сосчитать множество действительных чисел. Но множество чисел, представимых двояким образом (конечные дроби) – это множество рациональных чисел. Как было доказано ранее, их счетное количество. Можно даже показать, что это множество эффективно перечислимо. Т.о. даже двойное представление множества таких чисел образует счетное множество, следовательно, доказательство верно даже без такого упрощения.

Второе трансфинитное

число

- ▣ Алеф (\aleph) – второе трансфинитное число. По определению это мощность континуума (всех действительных чисел). Это вторая по величине бесконечная мощность.
- ▣ Доказанная только что теорема о несчетности множества действительных чисел является убедительным доказательством того, что мощность этого множества больше, чем алеф-ноль (больше множества натуральных чисел). **И это весьма важный результат после череды доказательства счетности разнообразных множеств чисел.**
- ▣ Если оперировать понятием кардинального числа (мощности), то получим, что, так как каждое число сегмента $(0, 1)$ может быть представлено десятичной дробью вида $0.a_1a_2a_3\dots$ не менее одного раза и не более двух, то:

$$\aleph_2 \geq {}^{0\aleph}10 \geq \aleph$$

а т.к. $2\aleph = \aleph$, то получим что ${}^{10\aleph} = {}^{0\aleph}$. Те же рассуждения справедливы в случае, если мы будем разлагать числа не в десятичные, а, например, в двоичные дроби, дроби с основанием 3, 15, 10005 или даже ${}^{0\aleph}$ (если вы можете такое себе представить).

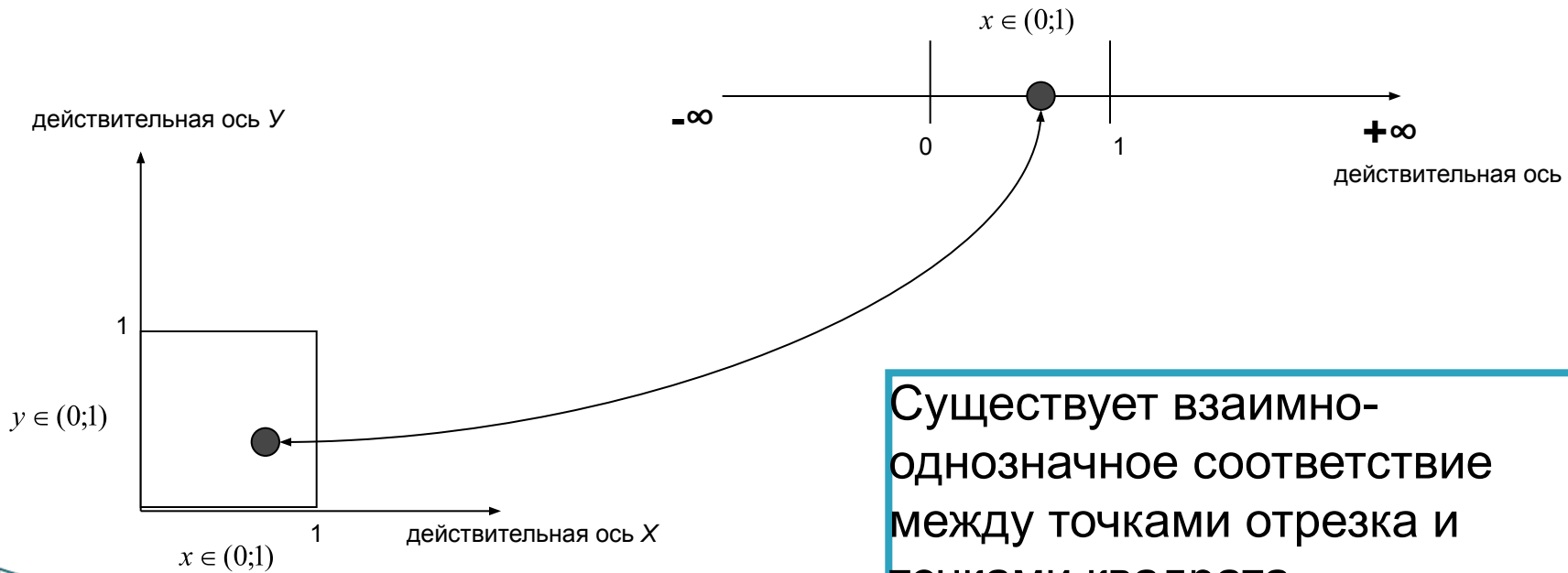
$${}^{0\aleph}10 = \dots = {}^{0\aleph}3 = {}^{0\aleph}2 = \aleph = \dots = n^{0\aleph} \aleph = \dots = {}^{0\aleph}$$

Множества мощности континуума

Алеф – второе трансфинитное число.



По определению – это мощность континуума (всех действительных чисел). Это вторая по величине бесконечная мощность.



Существует взаимно-однозначное соответствие между точками отрезка и точками квадрата

Проблема континуума

Между любыми двумя различными рациональными числами всегда найдется множество иррациональных чисел мощности континуума.

Между любыми двумя различными иррациональными числами всегда найдется счетное множество рациональных чисел.

несчетное
множество
иррациональных
чисел



счетно-бесконечное
множество
рациональных чисел



Проблема континуума

Теорема Кантора

Для любого кардинального числа α справедливо $\alpha < 2^\alpha$.

$$\Rightarrow \aleph_0 \neq 2^{\aleph_0} \text{ и } \aleph_1 \neq 2^{\aleph_1}$$

Бесконечность первого
типа

<



<

Бесконечность второго
типа

имеет мощность,
эквивалентную мощности
множества натуральных
чисел (алеф-ноль)

имеет мощность,
эквивалентную мощности
множества точек на
действительной оси
(мощности континуума, алеф)

Проблема континуума

(Континуум-гипотеза, первая проблема Гильберта)

Нет ли в природе «промежуточного» множества, которое имело бы мощность больше, чем мощность множества натуральных чисел, но при этом меньше, чем множество точек на действительной оси?

Множество комплексных чисел

Комплексное число задается парой (r_1, r_2) , где r_1, r_2 принадлежат множеству действительных чисел.

Множество комплексных чисел обозначим латинской буквой C .



Теорема

- ▣ Множество комплексных чисел несчетно.

Доказательство:

- ▣ Так как множество действительных чисел R несчётное, является подмножеством множества комплексных чисел C , то множество комплексных чисел также несчётно, **Q.E.D.**

Множество иррациональных чисел

Иррациональным называется действительное число, не являющееся рациональным.

Множество иррациональных чисел обозначим латинской буквой I .



Теорема

- ▣ Множество иррациональных чисел несчетно.

Доказательство:

- ▣ Поскольку действительных чисел – несчетное множество, а рациональных – счетное, то иррациональных чисел – несчетное множество, **Q.E.D.**

Множество трансцендентных чисел

Трансцендентное число – действительное число, не являющееся алгебраическим.



Множество трансцендентных чисел обозначим латинской буквой T .

Теорема

- ▣ Множество трансцендентных чисел несчетно.

Доказательство:

- ▣ Поскольку действительных чисел – несчетное множество, а алгебраических – счетное, и при этом множество A является подмножеством \mathbb{R} , то $\mathbb{R} \setminus A$ (множество трансцендентных чисел) представляет собой несчетное множество, **Q.E.D.**

Каждое трансцендентное действительное число является иррациональным, но обратное неверно. Например, число $\sqrt{2}$ иррациональное, но не трансцендентное: оно является корнем уравнения $x^2 - 2 = 0$.

Трансцендентные числа

Впервые понятие трансцендентного числа ввёл Ж. Лиувилль в 1844 году, когда доказал теорему о том, что алгебраическое число невозможно слишком хорошо приблизить рациональной дробью.

В 1873 году Ш. Эрмит доказал трансцендентность числа e , основания натуральных логарифмов.

В 1882 году Линдеман доказал теорему о трансцендентности степени числа e с ненулевым алгебраическим показателем, тем самым доказав трансцендентность числа π и неразрешимость задачи квадратуры круга.

Трансцендентные числа

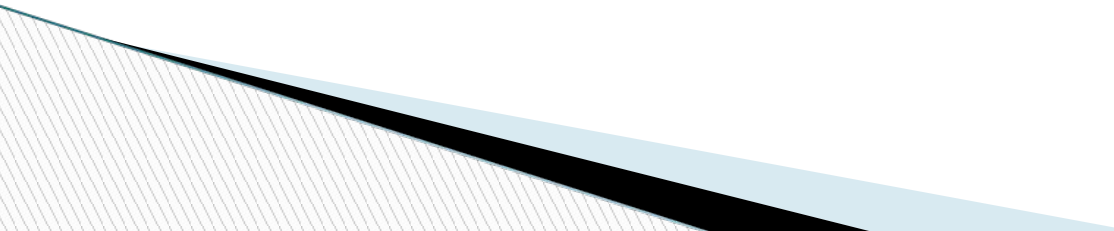
В 1900 году на II Международном конгрессе математиков Гильберт в числе сформулированных им проблем сформулировал **седьмую проблему**:

«Если $a \neq 1$, a – положительное алгебраическое число, и b – алгебраическое, но иррациональное число, верно ли, что a^b – трансцендентное число?»

В частности, является ли трансцендентным число $2^{\sqrt{2}}$.

Эта проблема была решена в 1934 году Гельфондом, который доказал, что все такие числа действительно являются трансцендентными.

Трансцендентные числа

- Десятичный логарифм любого целого числа, кроме чисел вида 10^n
 - Значение функций $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$ для любого ненулевого алгебраического числа x .
- 

Вычислимые числа

Действительное число **вычислимо**, если существует алгоритм его вычисления с любой степенью точности.

- Все рациональные числа вычислимы, так как существует алгоритм их вычисления до любого знака, то есть с любой степенью точности.
- Алгебраические числа являются вычислимыми, так как существуют численные методы их вычисления (алгоритм Ньютона), позволяющие их вычислить с любой степенью точности.
- Все рациональные числа суть алгебраические, т.к. они могут быть представлены как корни уравнения $a_0 + a_1x = 0$, где a_0 , a_1 – целые числа.

Теорема



- **Множество вычислимых действительных чисел счетно.**

Доказательство:

- Вычислимые числа включают в себя все алгебраические и некоторые трансцендентные числа. Так как каждому вычислимому действительному числу соответствует хотя бы одна машина Тьюринга, а машин Тьюринга - \aleph_0 , то значит вычислимых чисел никак не больше, чем \aleph_0 .
- С другой стороны, поскольку все алгебраические числа вычислимы, а их тоже \aleph_0 , то вычислимых действительных чисел никак не меньше, чем \aleph_0 .
- Значит мощность множества вычислимых действительных чисел равна \aleph_0 и, следовательно, это множество счетно, **Q.E.D.**

Теорема



Существуют невычислимые действительные числа и их несчетное множество.

Доказательство:

- **Существование невычислимых чисел следует хотя бы из того факта, что всего действительных чисел несчетное множество, а вычислимых – счетное. Значит должно существовать несчетное множество невычислимых действительных чисел, Q.E.D.**

Пример невычислимого действительного числа

- Пусть имеются T_1, \dots, T_n, \dots , где T_i – i -ая машина Тьюринга.
- Действительное число X можно представить так:
 $X = 0, a_1, \dots, a_n, \dots$, где:

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } T_i \text{ останавливается на чистой ленте} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

- Такое число является невычислимым, так как задача об остановке машины T_i на чистой ленте алгоритмически не разрешима.