

## Модуль 2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Раздел 6. Основные понятия

Раздел 7. Простейшие виды деформаций

Раздел 8. Сложное сопротивление

Раздел 9. Прочность при переменных и динамических напряжениях

Раздел 10. Устойчивость

Лекционный курс - 34 час

Лабораторные занятия – 17 час

Самостоятельная работа : - Выполнение и защита РГЗ

# МЕХАНИКА

## Сопротивление материалов

### Модуль 2

Раздел 6. - **Основные понятия  
сопротивления материалов**

**Общие сведения**

ЛЕКЦИЯ 1

ЛЕКЦИЯ 2



## Модуль 2

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

### Основные понятия и определения

#### ЛЕКЦИЯ 1

##### План:

- 1.1 Основные определения
- 1.2 Допущения (гипотезы) в сопротивлении материалов
- 1.3 Внешние силы
- 1.4 Внутренние силы. Метод сечений.

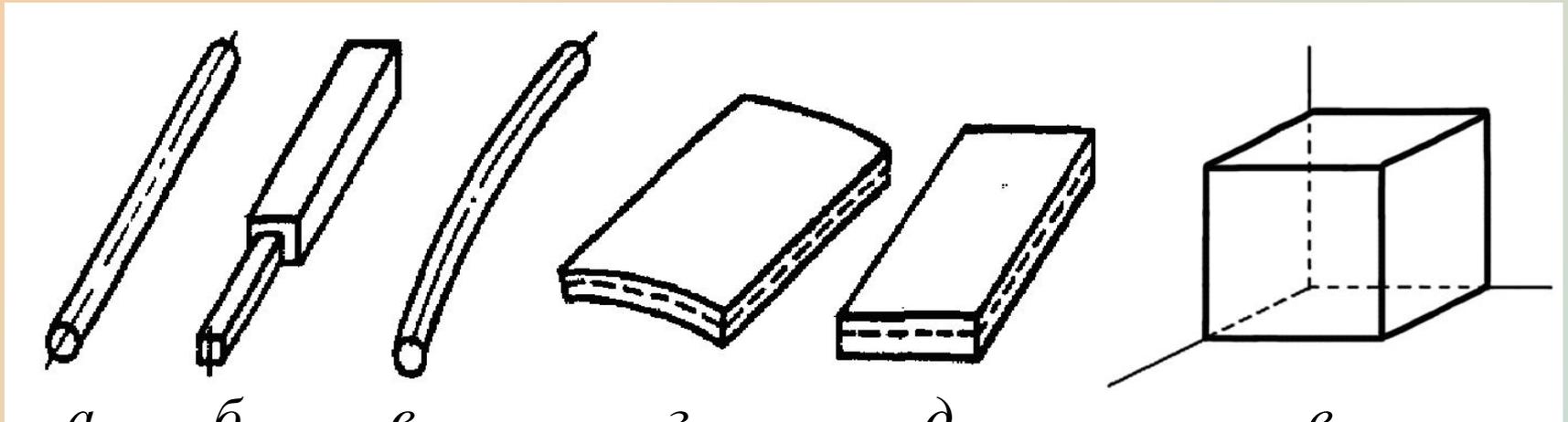
**Сопротивление материалов** - наука о методах расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и сооружений

**Прочность** – это способность элемента конструкции сопротивляться разрушению под нагрузкой.

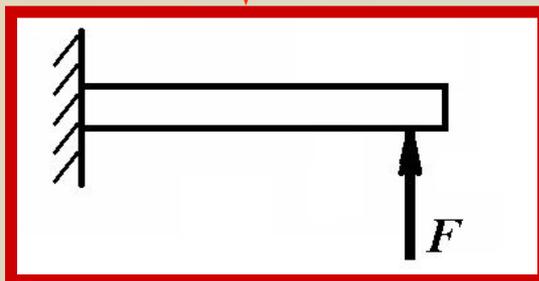
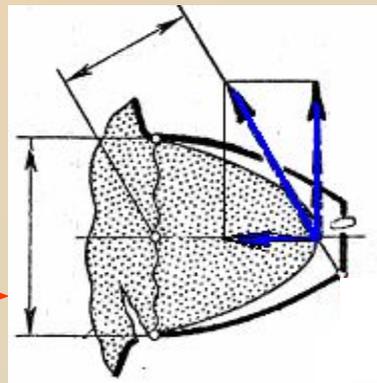
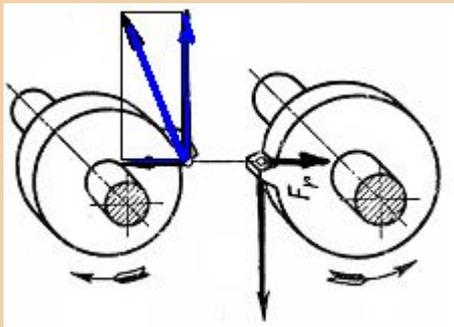
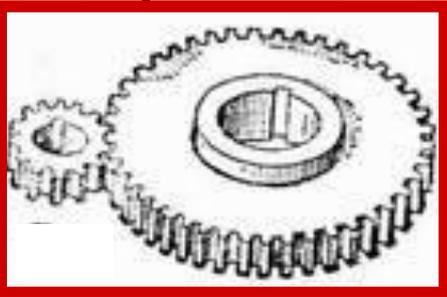
**Жесткость** – это способность элемента конструкции сопротивляться деформациям.

**Устойчивость** – это способность элемента конструкции сопротивляться воздействию больших отклонений от равновесия при малых изменениях нагрузки.

## Основные виды элементов конструкций:



*a, б, в* – брус; *г* – оболочка; *д* – пластина; *e* – массив



**РЕАЛЬНАЯ  
КОНСТРУКЦИЯ**



**освобождение от  
несущественных  
особенностей**



**РАСЧЕТНАЯ  
СХЕМА**

## Гипотезы (допущения) сопротивления материалов

- **сплошности**
- **однородности**
- **изотропности**
- **независимости действия сил**
- **малости деформаций**
- **внутренних усилий**

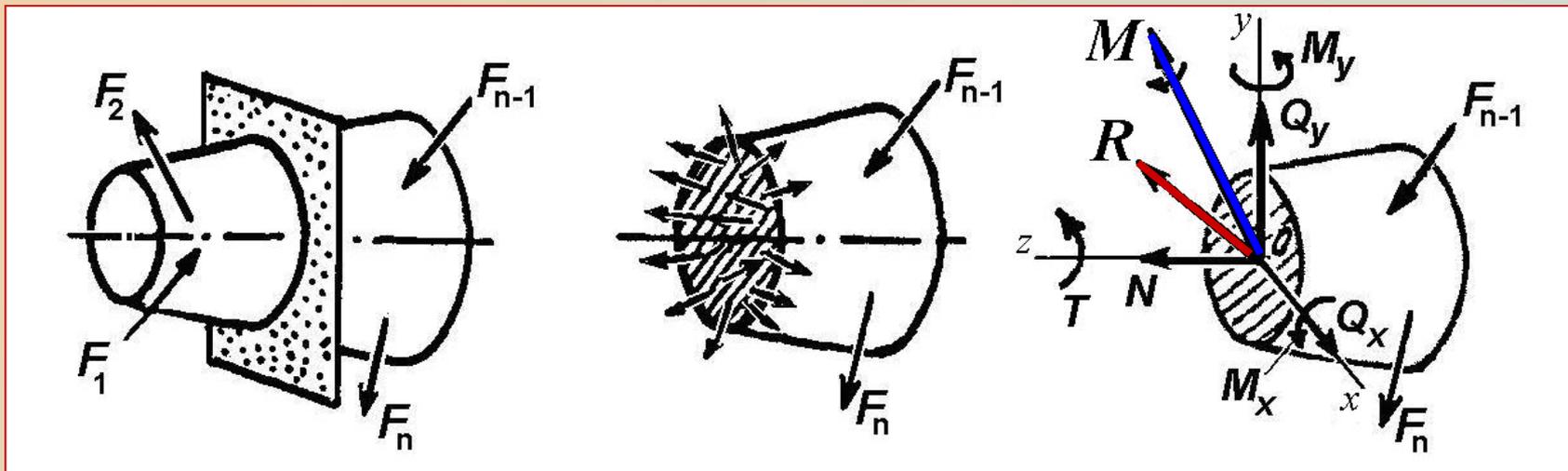
# ВНЕШНИЕ СИЛЫ (нагрузки)

- активные и реактивные
- сосредоточенные и  
распределенные (*линейно, поверхностно,  
объемно распределенные*)
- статические и динамические

# Внутренние силы (усилия)

- это силы сопротивления изменению формы и размеров тела под действием нагрузки

## Метод сечений:



## Внутренние силовые факторы (ВСФ)

---

ВСФ	Вид деформации
продольная сила $N$	- «растяжение» или «сжатие»
поперечная сила $Q$	- «чистый сдвиг».
крутящий момент $T$	- «кручение»
изгибающий момент $M$	- «чистый изгиб»
комбинированные виды нагружения	- «сложное сопротивление».

---

**Эпюры ВСФ** - графики изменения внутренних силовых факторов вдоль оси бруса

# Внутренние силы. Метод сечений

## План построения эпюры ВСФ

- 1. Вычерчивают схему нагружения стержня.*
- 2. Определяют реакции связей*
- 3. Выявляют «характерные участки» стержня*
- 4. Применяя метод сечений на каждом характерном участке, составляют уравнения ВСФ по длине участка*
- 5. Строят графики зависимостей ВСФ*

Модуль 2

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

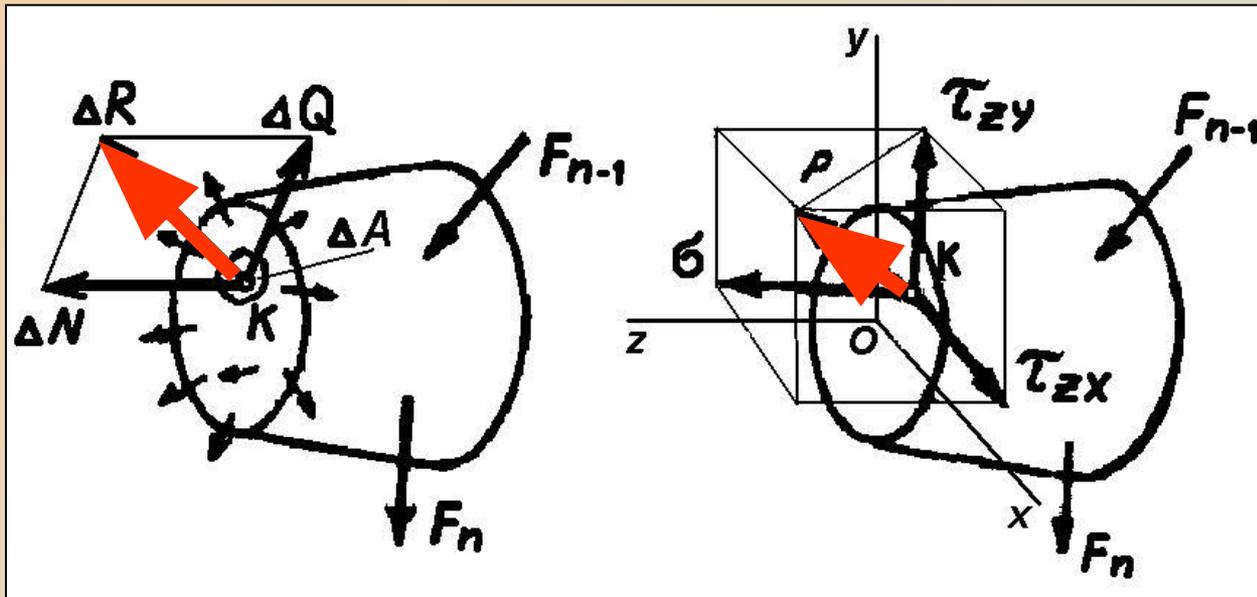
## Основные понятия и определения

### ЛЕКЦИЯ 2

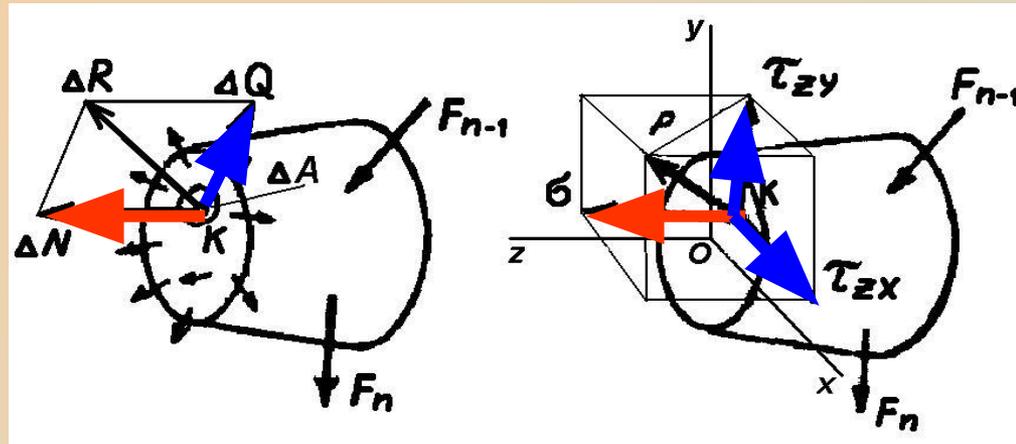
#### План

- 2.1. Напряжения.
- 2.2. Перемещения и деформации.
- 2.3. Закон Гука.
- 2.4. Условия прочности и жесткости в общем виде

**Напряжения** - мера интенсивности внутренних сил (усилия, приходящиеся на единицу площади сечения)



$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} = \frac{dR}{dA} = p$$



**Нормальное напряжение  $\sigma$** , направленное по нормали к плоскости сечения

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA}$$

**Касательное напряжение  $\tau$** , лежащее в плоскости сечения:

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}$$

## Связь напряжений и ВСФ

$$N = \int_A \sigma dA \qquad T = \int_A (\tau_{zx}y - \tau_{zy}x) dA$$

$$Q_x = \int \tau_{zx} dA \qquad M_x = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$$

$$Q_y = \int \tau_{zy} dA \qquad M_y = \int_A \sigma \cdot x \cdot dA$$

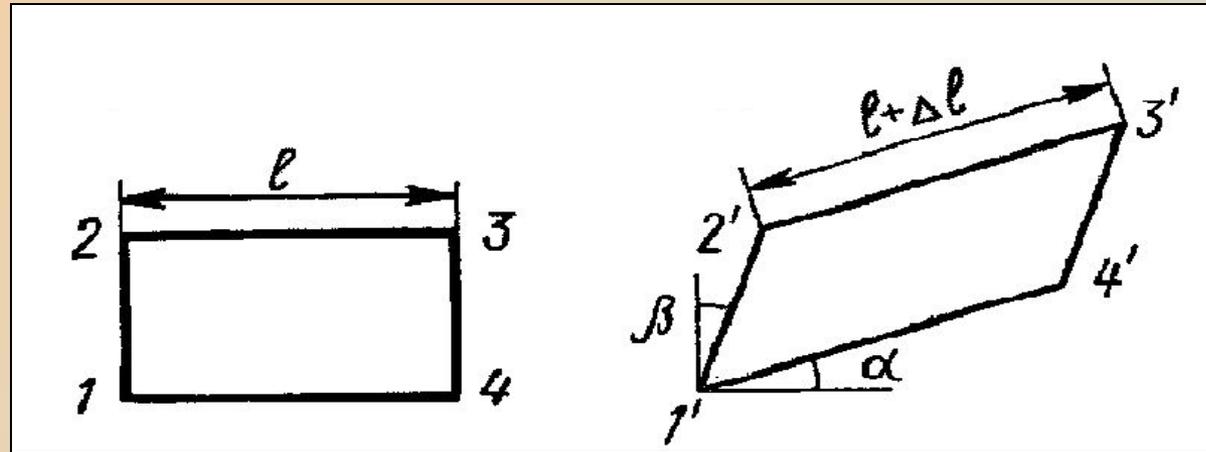
где  $x$  и  $y$  – координаты точки в поперечном сечении

---

Паскаль ( $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ ).

Мегапаскаль ( $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 10^6 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Н/мм}^2$ ).

## Деформации и перемещения

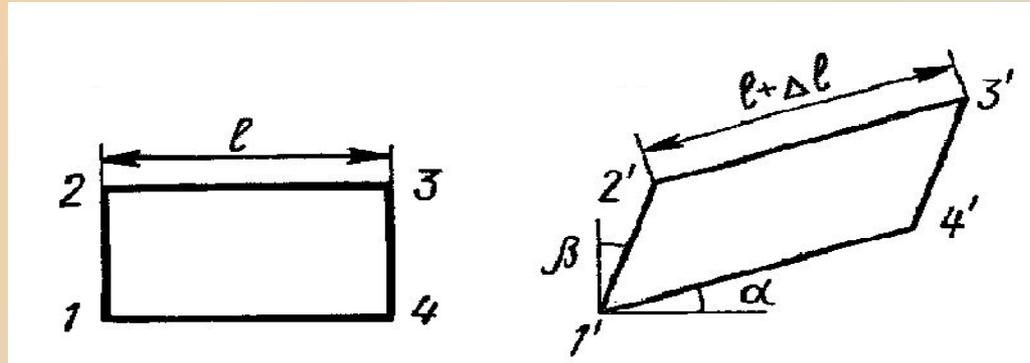


**Линейные перемещения** сечений

**Угловые перемещения** (поворот) линий и плоскостей

**Деформации** - характеристики интенсивности изменения линейных и угловых перемещений  
введено понятие

## ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ



$\Delta l$  - абсолютная линейная деформация

$\varepsilon$  - относительная линейная деформация

$$\varepsilon = \Delta l / l$$

$\gamma$  - угловая деформация (угол сдвига)

$$\gamma = \alpha + \beta$$

## ХАРАКТЕР ДЕФОРМАЦИИ

**Остаточные (пластические)** деформации не исчезают после снятия нагрузки

**Упругие** деформации исчезают после разгрузки

### Закон Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$E$  - модуль Юнга (модуль продольной упругости)

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$G$  - модуль сдвига

## Условия прочности

$$\sigma_{\text{расч. max}} \leq [\sigma]$$

$$\tau_{\text{расч. max}} \leq [\tau]$$

## Условия жесткости

$$\varepsilon_{\text{расч. max}} \leq [\varepsilon]$$

$$\gamma_{\text{расч. max}} \leq [\gamma]$$

# МЕХАНИКА

## Сопротивление материалов

### Модуль 2

#### Раздел 7 - Простейшие виды деформации

Растяжение и сжатие

ЛЕКЦИЯ 3

Механические испытания  
конструкционных материалов

ЛЕКЦИЯ 4

Геометрические характеристики  
плоских сечений

ЛЕКЦИЯ 5

Чистый сдвиг. Кручение

ЛЕКЦИЯ 6

Изгиб

ЛЕКЦИЯ 7

ЛЕКЦИЯ 8

ЛЕКЦИЯ 9

Модуль 2.

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ

#### Растяжение и сжатие

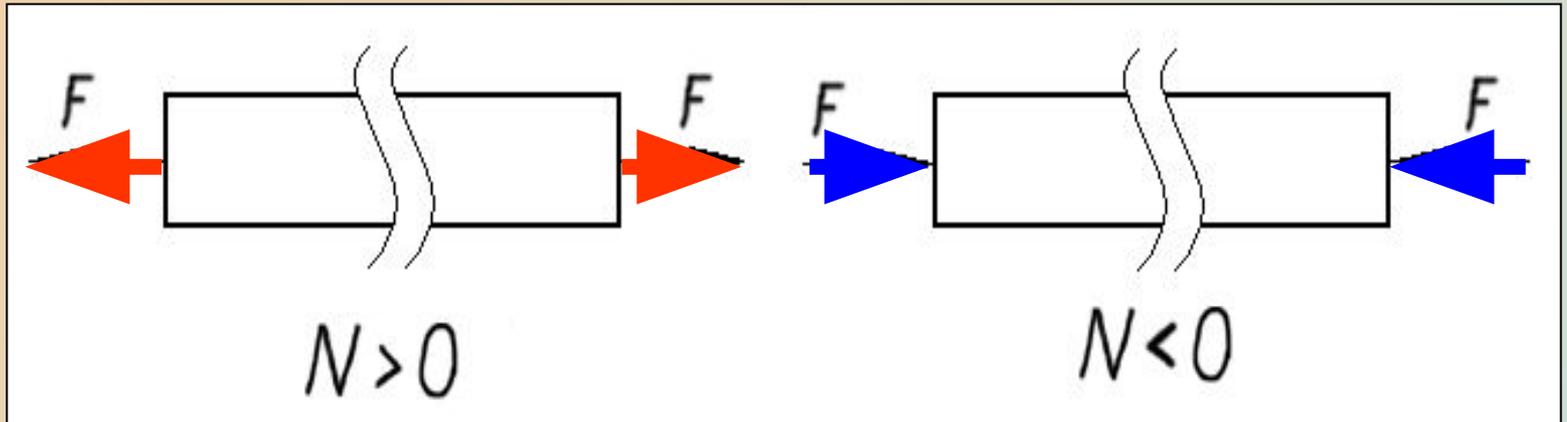
#### ЛЕКЦИЯ 3

##### План:

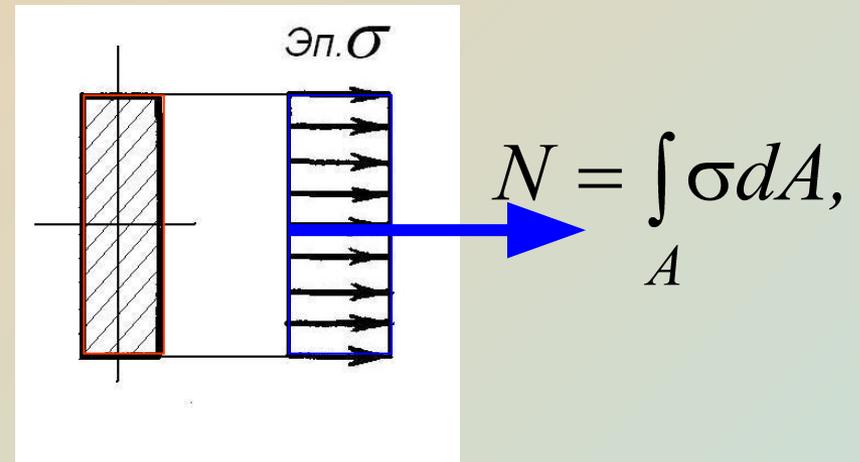
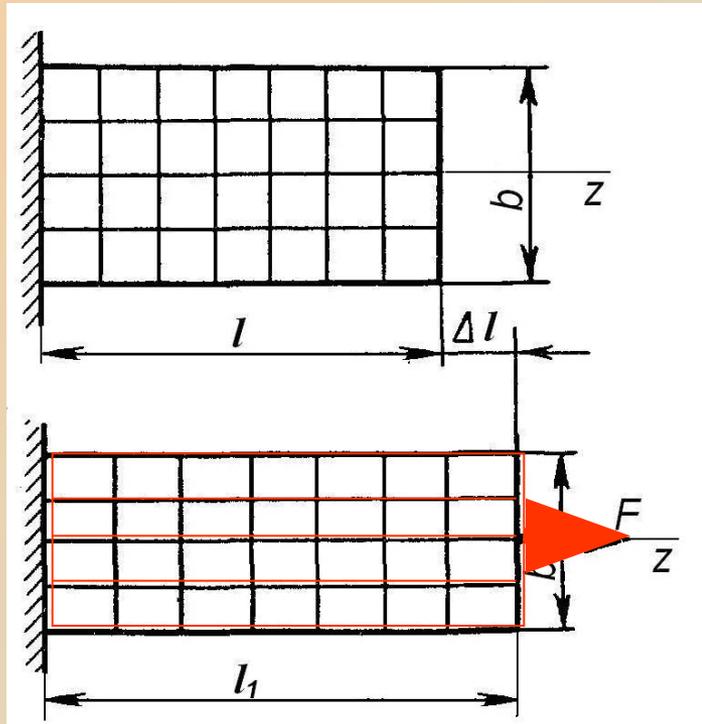
- 3.1. Внутренние усилия при растяжении-сжатии
- 3.2. Напряжения при растяжении-сжатии
- 3.3. Деформации при растяжении-сжатии
- 3.4. Условия прочности и жесткости при растяжении и сжатии

## Правило знаков

продольных сил  $N$ :

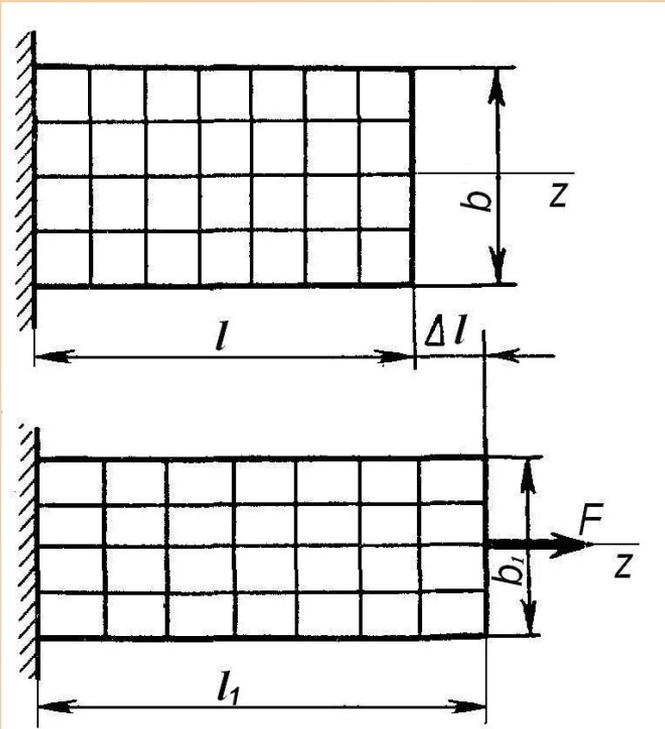


## Напряжения при растяжении-сжатии



$$\sigma = \frac{N}{A}$$

## Деформации при растяжении-сжатии



*абсолютное удлинение*

$$\Delta l = l_1 - l$$

*относительное удлинение*

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

*абсолютная поперечная деформация*

$$\Delta b = b_1 - b$$

*относительная поперечная деформация*

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$$

*коэффициент Пуассона:*

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$

Модуль продольной упругости  $E$   
для различных материалов

Материал	$E$ , МПа
Сталь	$2 \cdot 10^5$
Медь	$1 \cdot 10^5$
Дерево	$1 \cdot 10^4$
Алюминий	$0,67 \cdot 10^5$
Чугун	$1,6 \cdot 10^5$
Мрамор	$0,56 \cdot 10^5$

Коэффициент Пуассона  $\mu$   
для различных материалов

Материал	$\mu$
Сталь	0,25 - 0,33
Медь	0,31 - 0,34
Бронза	0,32 - 0,35
Алюминий	0,32 - 0,36
Чугун	0,23 - 0,27
Камень	0,16 - 0,34
Бетон	0,08 - 0,18
Фанера	0,07
Пробка	$\approx 0$

## Деформации при растяжении-сжатии

закон Гука:  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ,

где:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

*абсолютное удлинение  
стержня*

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N \cdot dl}{E \cdot A}$$

$(E \cdot A)$  - жесткость сечения  
стержня

## *Условие прочности стержня*

$$\sigma_{\max} = N_{\max} / A \leq [\sigma].$$

## *Условие жесткости стержня*

$$\Delta l \leq [\Delta l],$$



## Модуль 2.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ

### Механические испытания конструкционных материалов

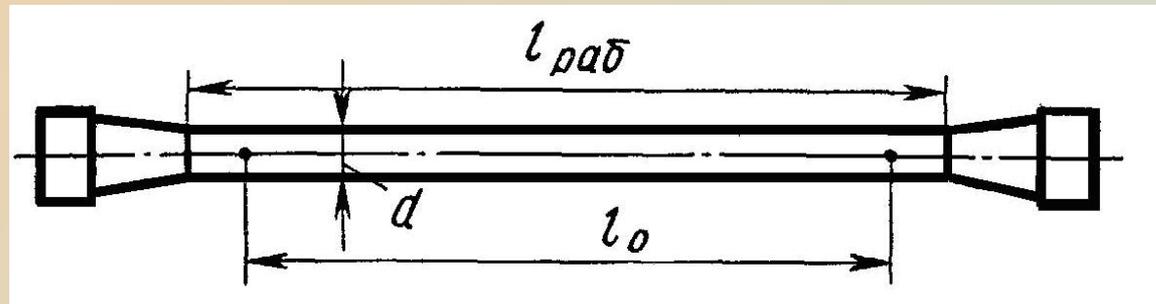
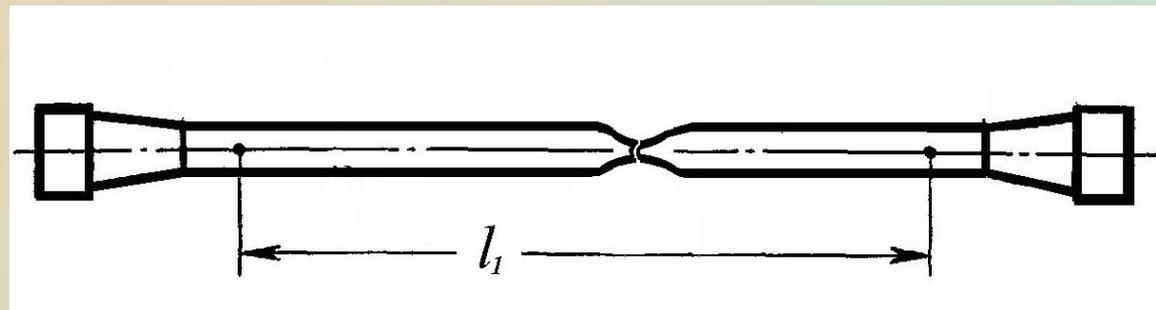
#### ЛЕКЦИЯ 4

##### План:

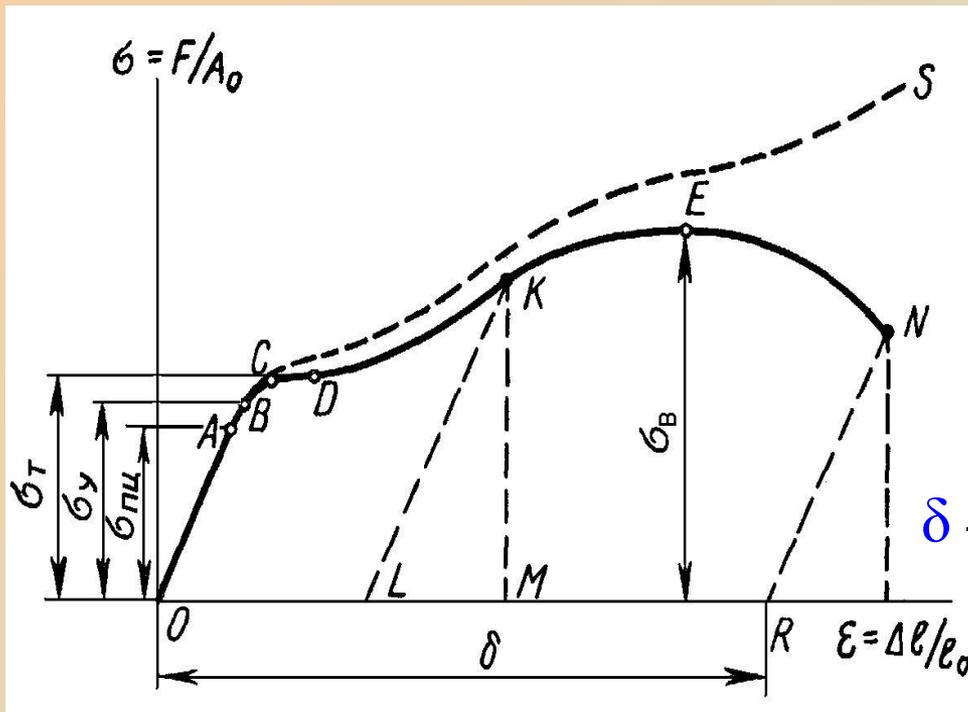
- 4.1. Диаграммы растяжения
- 4.2. Пластическое и хрупкое разрушение материала
- 4.3. Испытание на сжатие
- 4.4. Испытание на твердость
- 4.5. Ползучесть, релаксация и длительная прочность материала
- 4.6. Допускаемые напряжения. Коэффициент запаса прочности

## ИСПЫТАНИЕ НА РАСТЯЖЕНИЕ

Образец для испытаний на растяжение

До  
испытанийПосле  
испытаний

## Диаграмма растяжения пластичных материалов



$\sigma_{пл}$  – предел пропорциональности

$E$  – модуль продольной упругости (модуль Юнга)

$\sigma_y$  – предел упругости

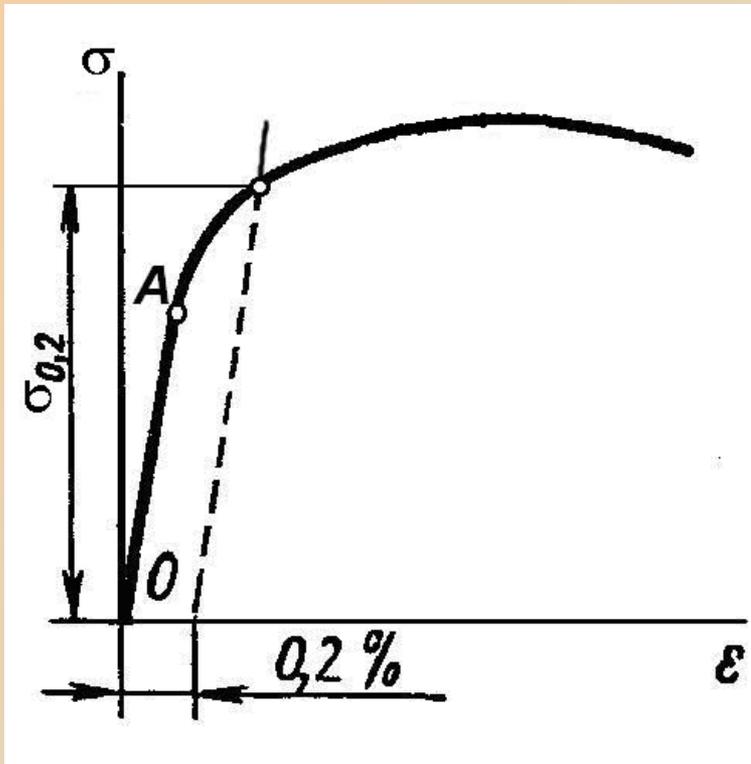
$\sigma_B$  – предел прочности (временное сопротивление)

$\sigma_T$  – предел текучести

$\delta$  – относительное удлинение

при разрыве 
$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \cdot 100\%;$$

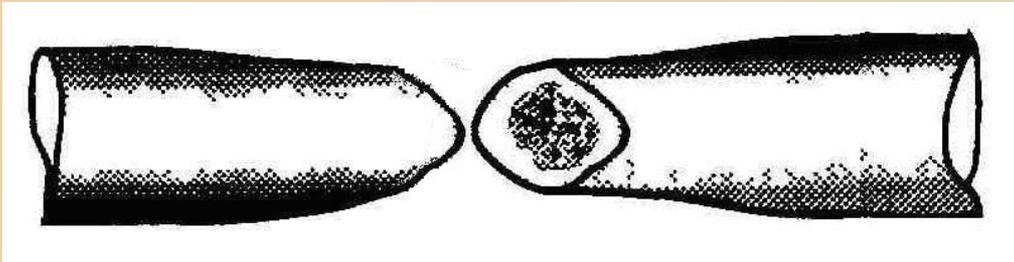
## Диаграмма растяжения без площадки текучести



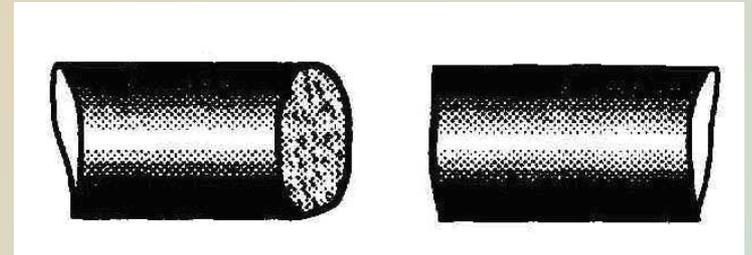
$\sigma_{0,2}$  - условный предел текучести

**НАКЛЕП** - явление повышения предела пропорциональности и снижения пластичности материала при повторных нагружениях

## Разрушение материала



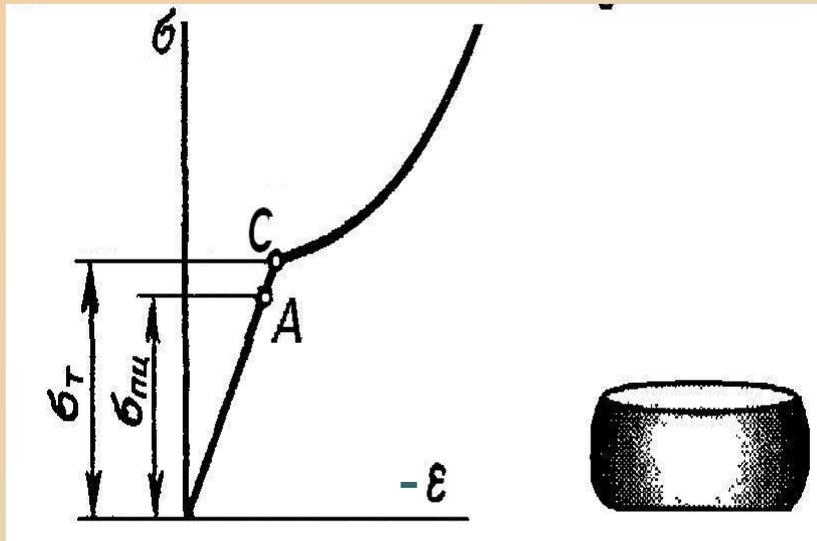
**пластическое**  
 $\delta > 10\%$



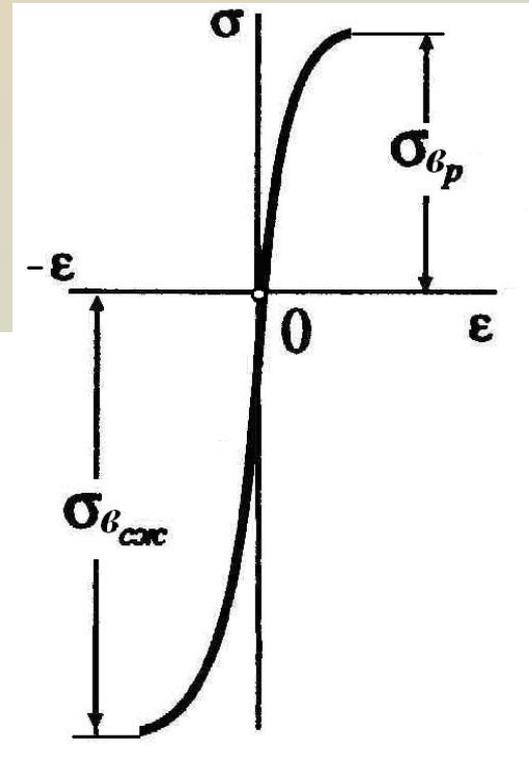
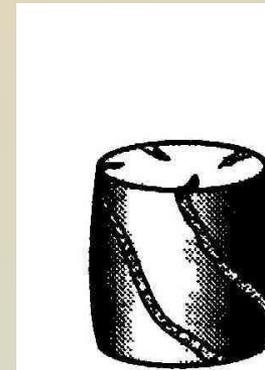
**хрупкое**  
 $\delta = 1 - 5\%$

## Испытания на сжатие

Образец – цилиндр  $h < 3d$



пластичный материал



хрупкий материал

## Испытание на твердость

**Твердость** - способность материала оказывать сопротивление механическому внедрению в него другого более твердого тела (**индентора**).

Метод	Обозначение	Индентор	Измерение
<i>Твердость по Бринеллю</i>	HB	Стальной закаленный шарик	Диаметр отпечатка
<i>Твердость по Роквеллу</i>	HRA, HRB, HRC	Алмазный конус	Глубина внедрения
<i>Твердость по Виккерсу</i>	HV	Алмазная пирамида	Диагональ отпечатка

***ПОЛЗУЧЕСТЬ МАТЕРИАЛА*** - изменение деформаций и напряжений, возникающих в нагруженной конструкции с течением времени в условиях не изменяющейся нагрузки

***Последствие*** - рост пластических деформаций материала при постоянном напряжении.

***Релаксация напряжений*** - процесс уменьшения напряжений при постоянной величине деформации материала.

***Предел длительной прочности*** -  $\sigma_{1000}^{900}$

## Допускаемые напряжения.

$$[\sigma] = \sigma_{\text{пр}} / n$$

$\sigma_{\text{пр}}$  - предельные  
напряжения

Для хрупких материалов: ( $\sigma_{\text{пр}} = \sigma_{\text{в}}$ ),  
Для пластичных материалов: ( $\sigma_{\text{пр}} = \sigma_{\text{т}}$ )

$n$  – коэффициент  
запаса прочности

для пластичных материалов  $n = 2...4$ ,  
для хрупких материалов  $n = 4...6$ .



## Модуль 2.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ

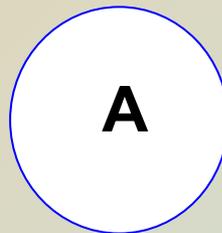
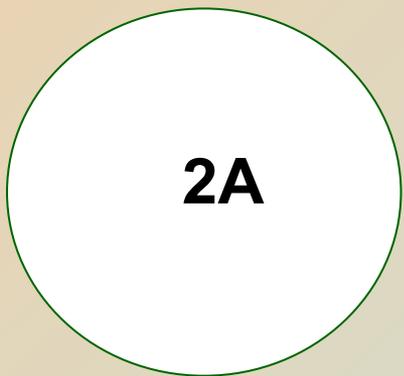
### Геометрические характеристики плоских сечений

#### ЛЕКЦИЯ 5

##### План:

- 5.1. Статический момент сечения
- 5.2. Моменты инерции
- 5.3. Моменты инерции при параллельном переносе и повороте осей
- 5.4. Главные оси и главные моменты инерции

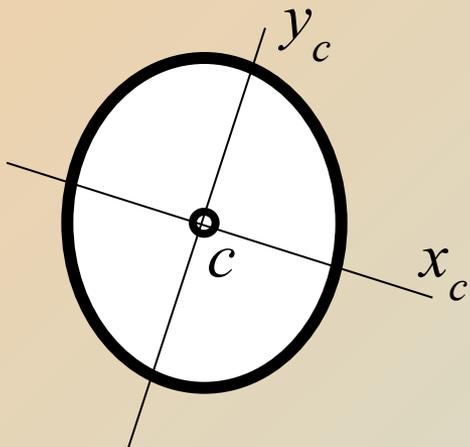
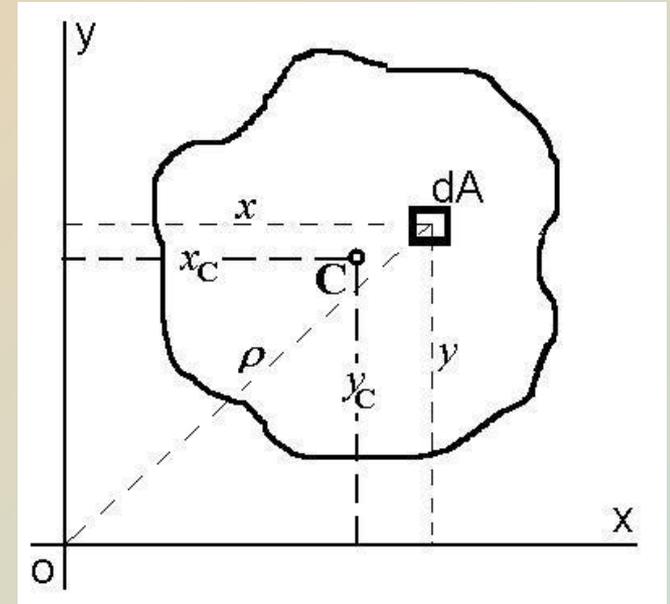
Влияние **площади** поперечного сечения, **формы** сечения и **расположения** сечения относительно приложенных нагрузок на прочность и жесткость конструкции определяется «геометрическими характеристиками плоских сечений»



*Статический момент сечения*

$$S_y = \int_A x \cdot dA = x_c \cdot A,$$

$$S_x = \int_A y \cdot dA = y_c \cdot A,$$



**Центральные оси** - оси, проходящие  
через центр тяжести сечения

$$\begin{aligned} S_{x_c} &= 0, \\ S_{y_c} &= 0 \end{aligned}$$

*Моменты инерции сечения***Осевой момент  
инерции**

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

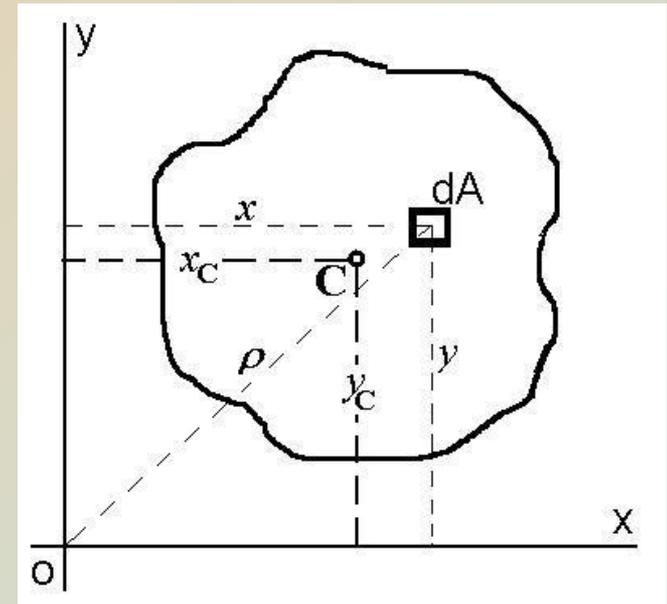
$$I_\rho = I_x + I_y$$

**Полярный момент  
инерции**

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA$$

**Центробежный момент инерции**

$$I_{xy} = \int_A y \cdot x dA$$

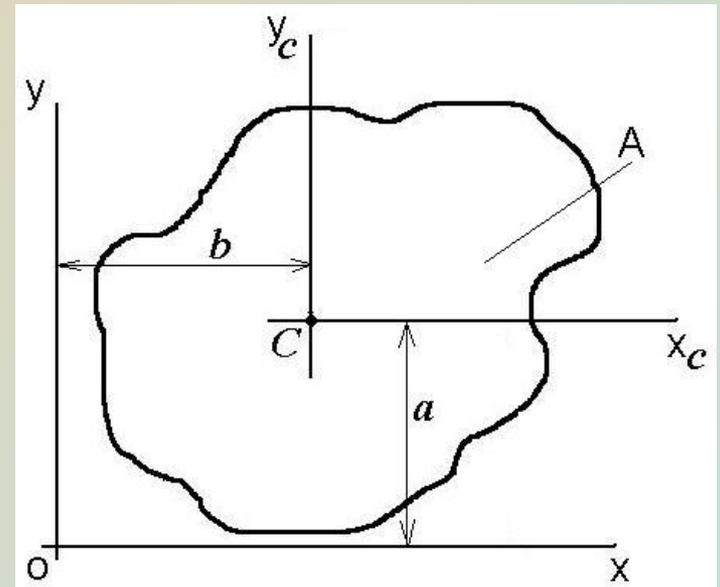


Единица измерения моментов инерции сечения –  $M^4$

***Моменты инерции при  
параллельном переносе и  
повороте осей***

$$I_x = I_{xc} + a^2 A,$$

$$I_y = I_{yc} + b^2 A,$$



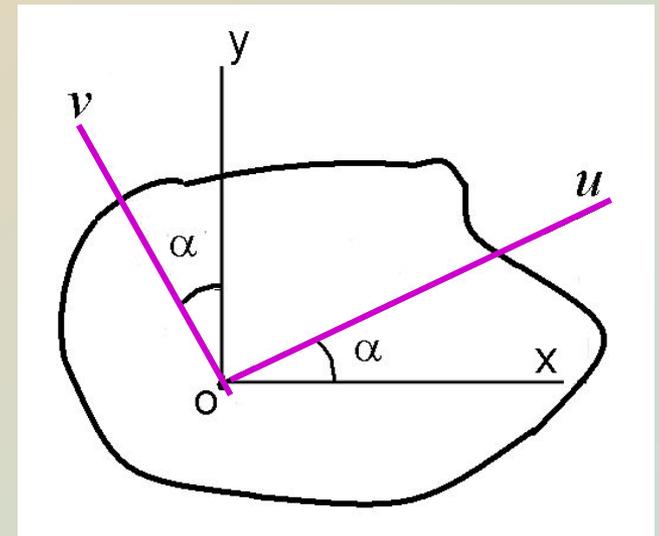
## Моменты инерции при повороте осей

$$I_u = I_x \cos 2\alpha + I_y \sin 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$I_v = I_x \sin 2\alpha + I_y \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha.$$

$$I_u + I_v = I_x + I_y.$$



**Главные оси и главные моменты инерции**

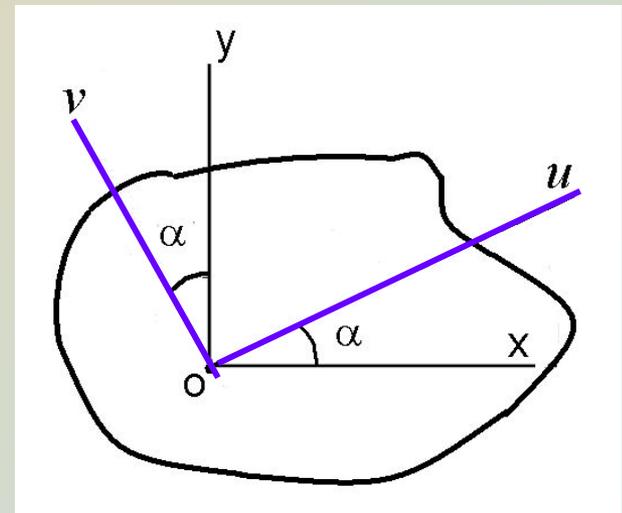
**Главные оси** сечения - это оси  $u$  и  $v$ , относительно которых центробежный момент инерции  $I_{uv} = 0$ , а осевые моменты инерции  $I_u$  и  $I_v$  имеют экстремальные значения **max** или **min**

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

**Главные центральные оси** - это главные оси проходящие через центр тяжести сечения

**Главные моменты инерции**

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$





## Модуль 2.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ

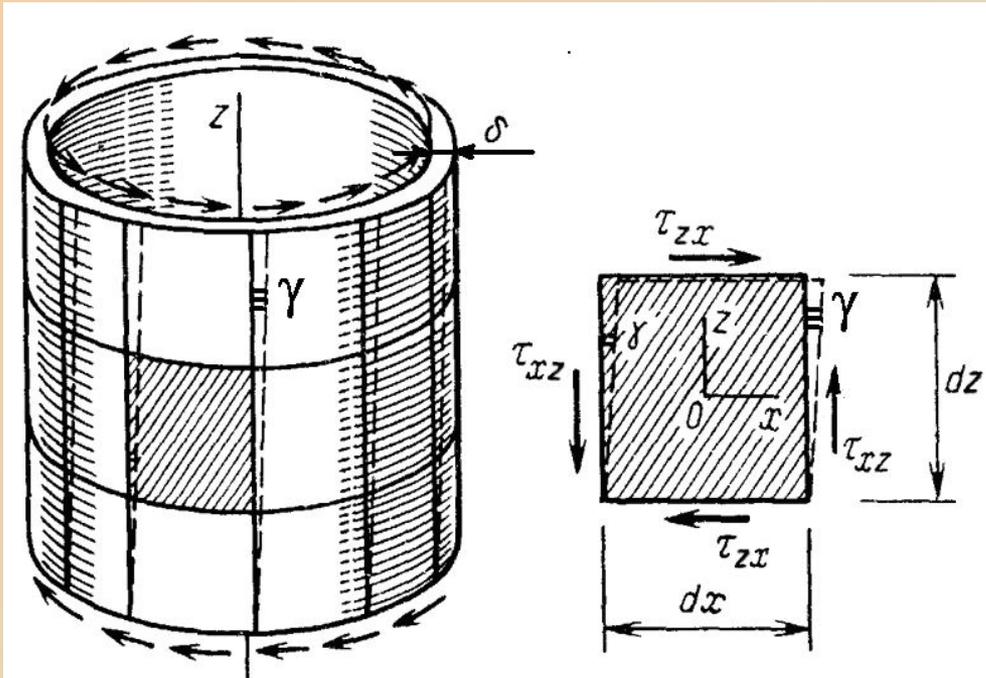
### Чистый сдвиг. Кручение

#### ЛЕКЦИЯ 6

##### План:

- 6.1. Чистый сдвиг
- 6.2. Кручение. Эпюры крутящих моментов
- 6.3. Напряжения при кручении
- 6.4. Деформации при кручении
- 6.5. Расчёт вала на прочность и на жёсткость

**ЧИСТЫЙ СДВИГ** - напряженное состояние, при котором на гранях элемента конструкции возникают только касательные напряжения



$$\tau = G \cdot \gamma ,$$

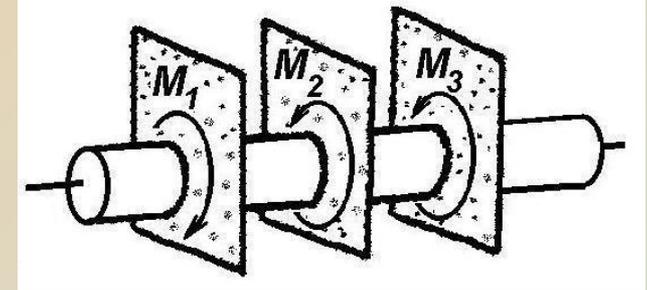
где  $\gamma$  - угол сдвига;

$G$  - модуль сдвига,

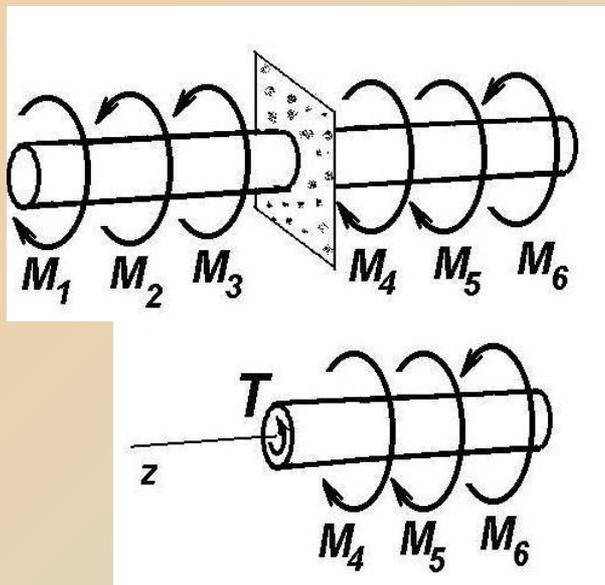
для стали  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа

Для изотропных материалов :  $G = E / [2(1 + \mu)]$

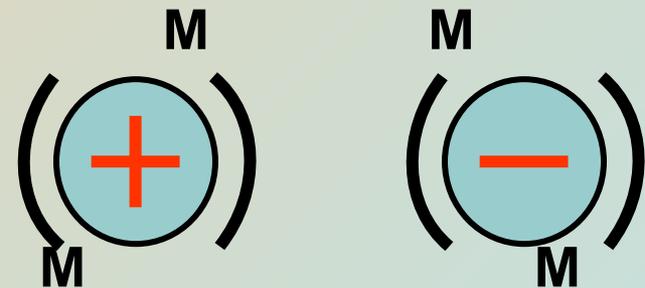
## КРУЧЕНИЕ.



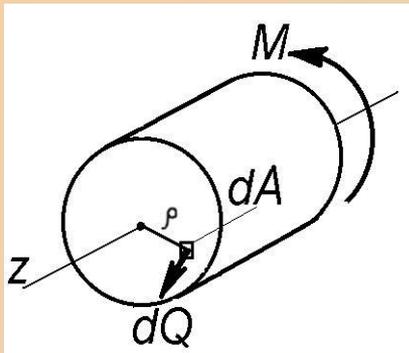
## Построение эпюр крутящих моментов



Правило знаков  
крутящих моментов:



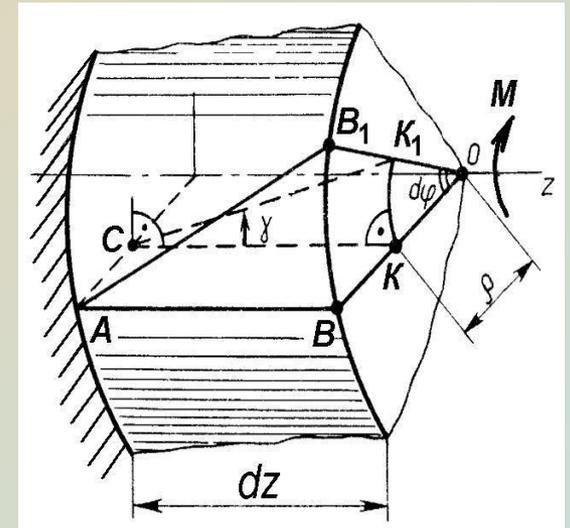
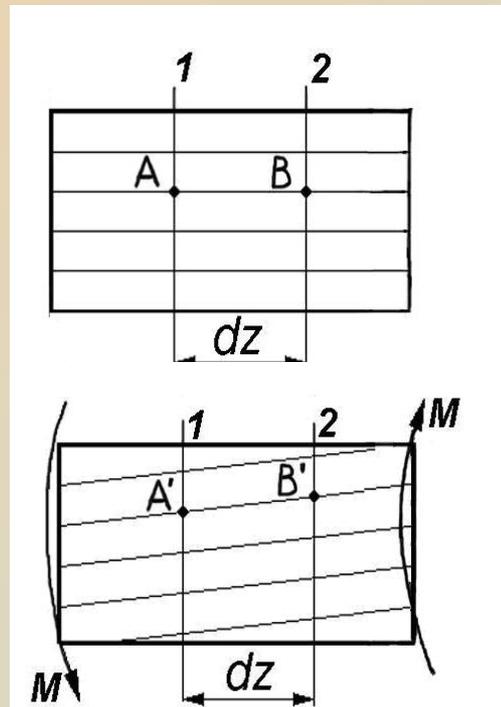
## Напряжения при кручении



$$dQ = \tau dA$$

$$dQ \cdot \rho = \tau \cdot \rho dA$$

$$T = \int_A \tau \rho dA$$

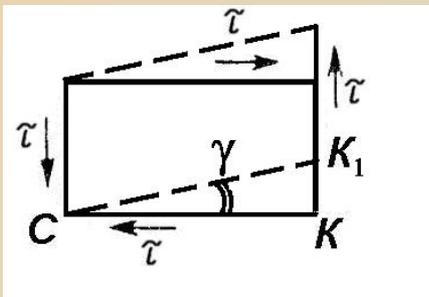
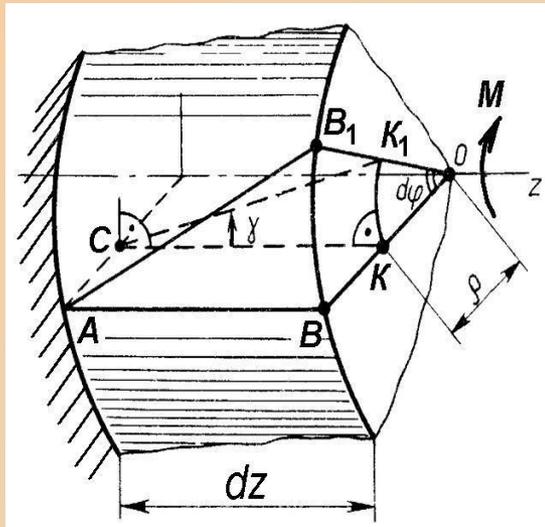


## Напряжения при кручении

$$KK' = \gamma \cdot dz = \rho \cdot d\varphi \quad \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}$$

по закону Гука:  $\tau = G \cdot \gamma = G \rho \frac{d\varphi}{dz}$

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} \text{ - относительный угол закручивания,} \quad \theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{GI_\rho}$$



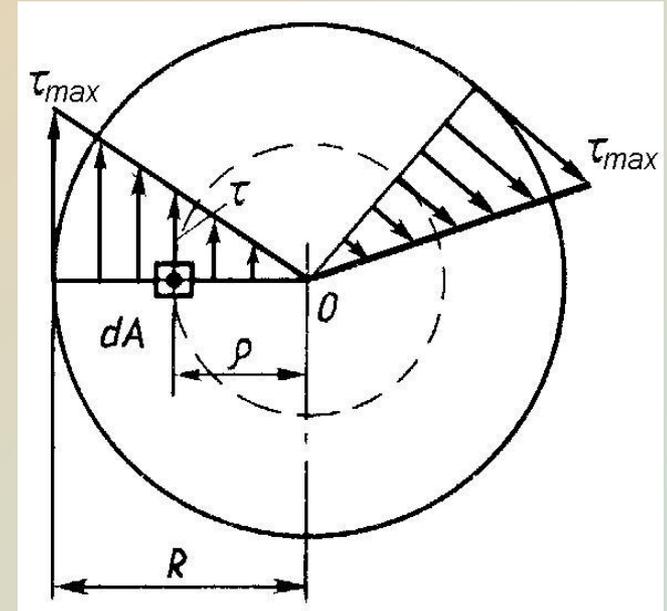
$$T = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dz} I_\rho$$

$$\tau = \frac{T}{I_\rho} \rho$$

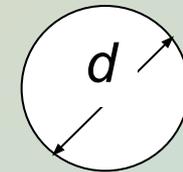
## Напряжения при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_{\rho}} \rho_{\max} = \frac{T}{W_{\rho}}$$

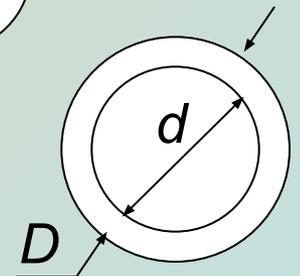
$$W_{\rho} = I_{\rho} / \rho_{\max} = I_{\rho} / R = 2I_{\rho} / d$$



Для круглого сечения  $W_{\rho} = \pi d^3 / 16 \approx 0,2 d^3$



Для сечения в виде кольца  $W_{\rho} = 0,2 D^3 (1 - c^4)$

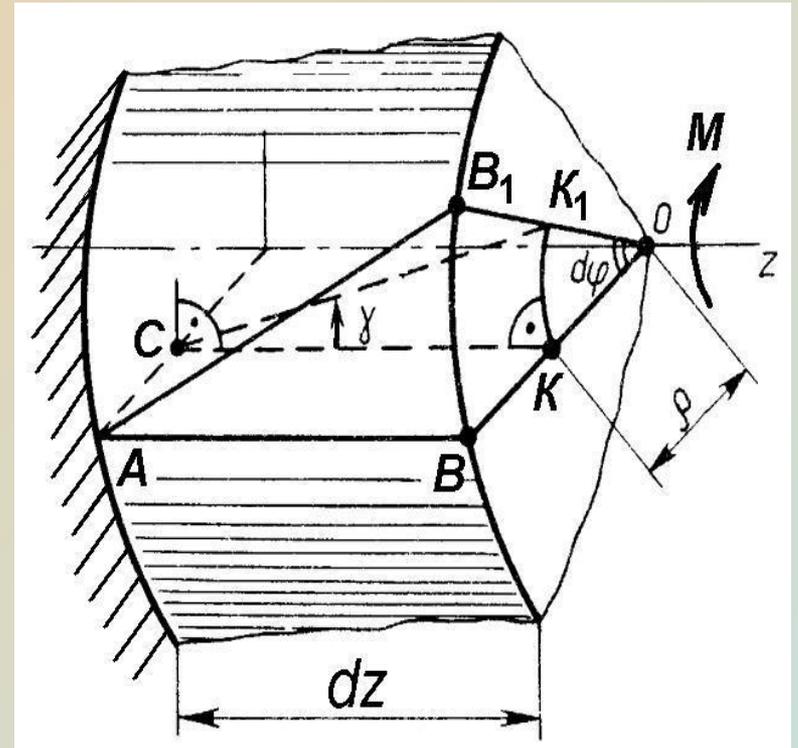


## Деформации при кручении

$$d\varphi = \frac{T}{GI_{\rho}} dz \quad \varphi = \int_l \frac{T}{GI_{\rho}} dz$$

$$\varphi = \sum \int_l \frac{T}{GI_{\rho}} dz$$

$$\varphi = \frac{T}{GI_{\rho}} l$$



$GI_{\rho}$  - жесткость сечения вала при кручении

## Расчёт вала на прочность и жёсткость

*Условие прочности вала*

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_{\rho}} \leq [\tau]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T_{\max}}{0,2[\tau]}}$$

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

$$[T] \leq [\tau]W_{\rho}$$

*Условие жесткости вала*

$$\theta_{\max} = \frac{T}{GI_{\rho}} \leq [\theta]$$



## Модуль 2.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ

### Изгиб

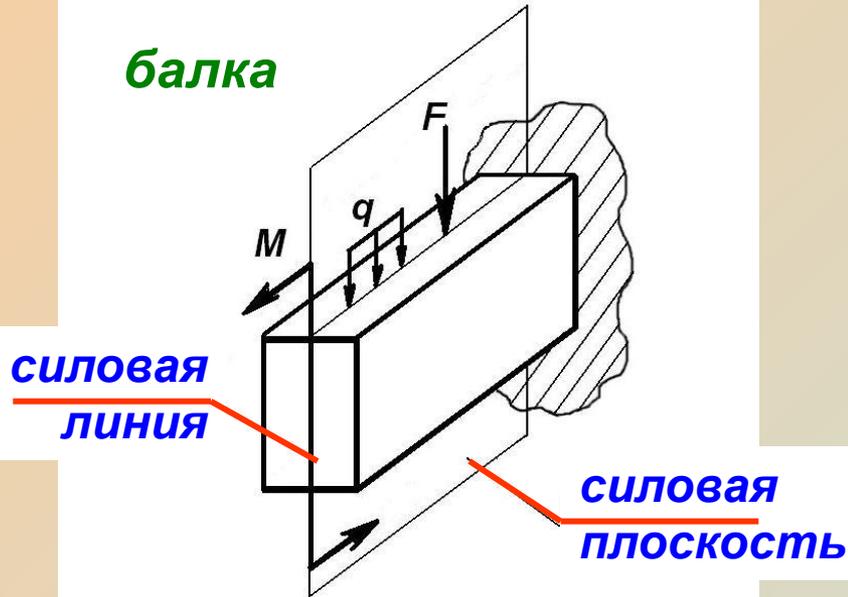
#### ЛЕКЦИЯ 7

##### План:

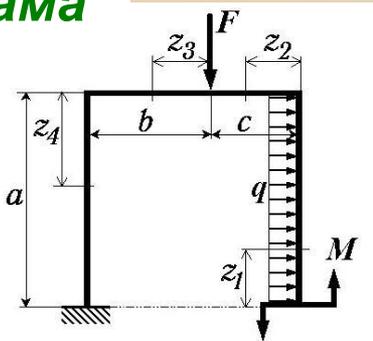
- 7.1. Общие сведения
- 7.2. Внутренние силовые факторы при изгибе балки
- 7.3. Дифференциальные зависимости Журавского
- 7.4. Внутренние силовые факторы в сечениях рам

Вид деформации, при котором продольная ось бруса искривляется - **ИЗГИБ**

**балка**



**рама**



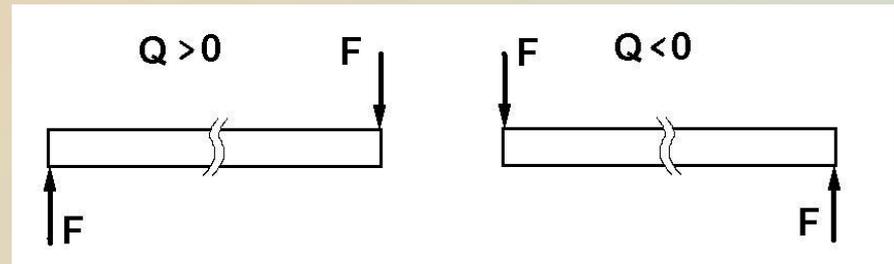
Чистый  
Поперечный

Прямой  
Косой

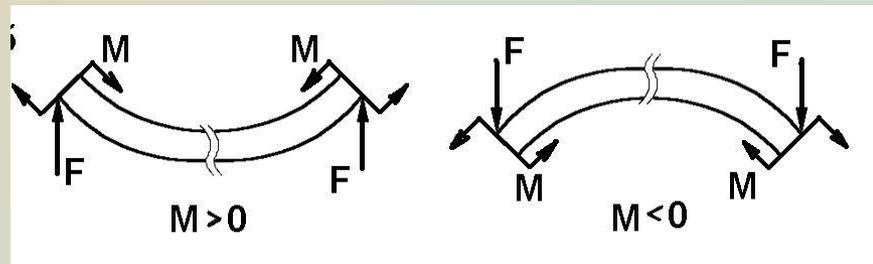
Плоский  
Пространственный

## Внутренние силовые факторы

Правило знаков для поперечных сил  $Q$ :



Правило знаков для изгибающих моментов  $M$ :



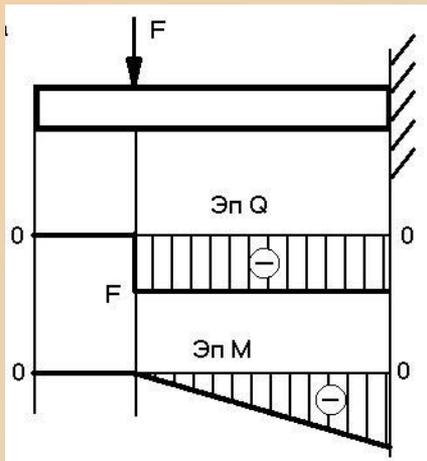
## Дифференциальные зависимости Журавского

$$Q = \frac{dM}{dz}$$

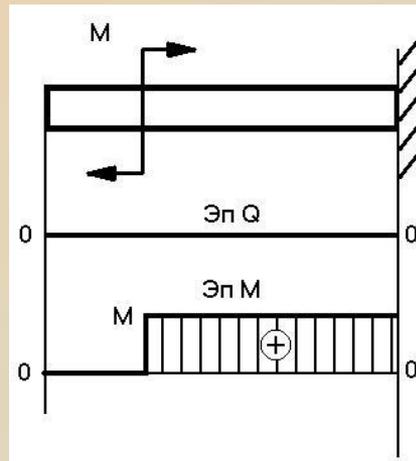
$$q = \frac{dQ}{dz}$$

$$q = \frac{d^2 M}{dz^2}$$

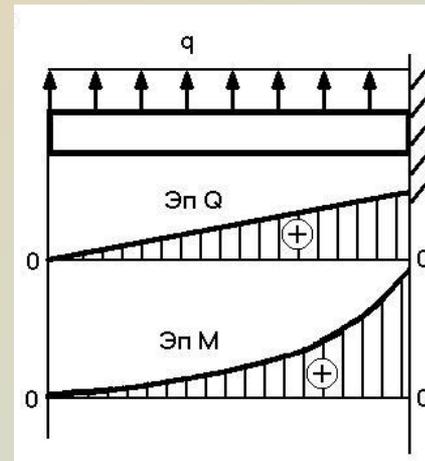
### Общие закономерности эюр $Q$ и $M$



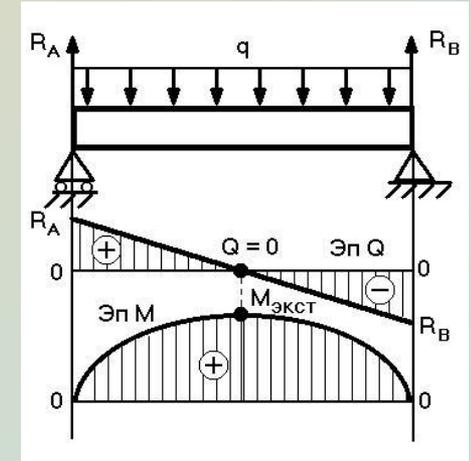
а



б



в



г

## **ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ В СЕЧЕНИЯХ РАМ**

- *В сечениях стержней рамы кроме изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$ , обычно действуют еще и продольные силы  $N$ .*
- *Границами характерных участков для рамы являются также места изменения направления оси рамы.*
- *При определении знаков внутренних силовых факторов наблюдателю удобно располагать взгляд как бы изнутри контура рамы.*
- *При построении этих эпюр положительные ординаты  $M$ ,  $Q$  и  $N$  откладывают с внешней стороны, а отрицательные – внутрь контура рамы.*



## Модуль 2.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ

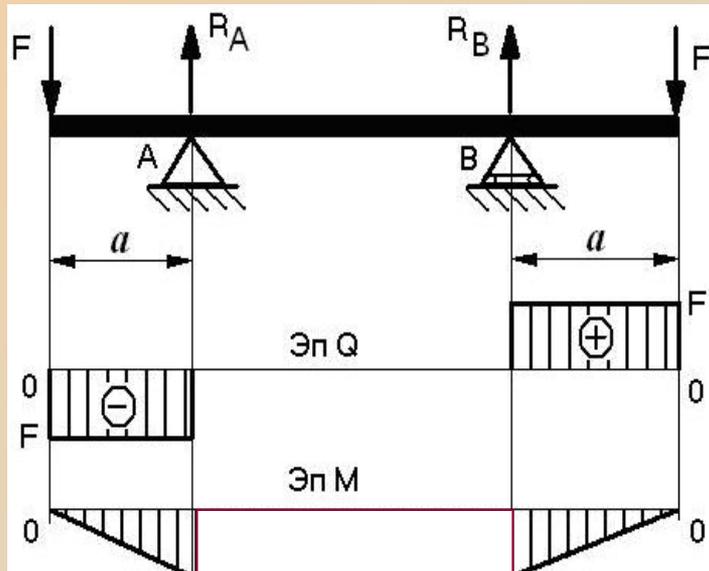
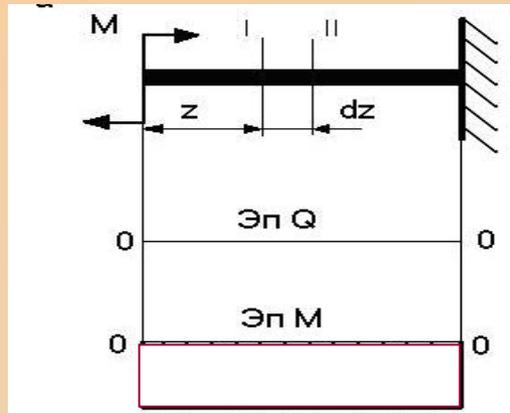
### Изгиб

#### ЛЕКЦИЯ 8

#### План:

- 8.1. Напряжения при чистом изгибе
- 8.2. Напряжения при плоском поперечном изгибе

# Чистый изгиб

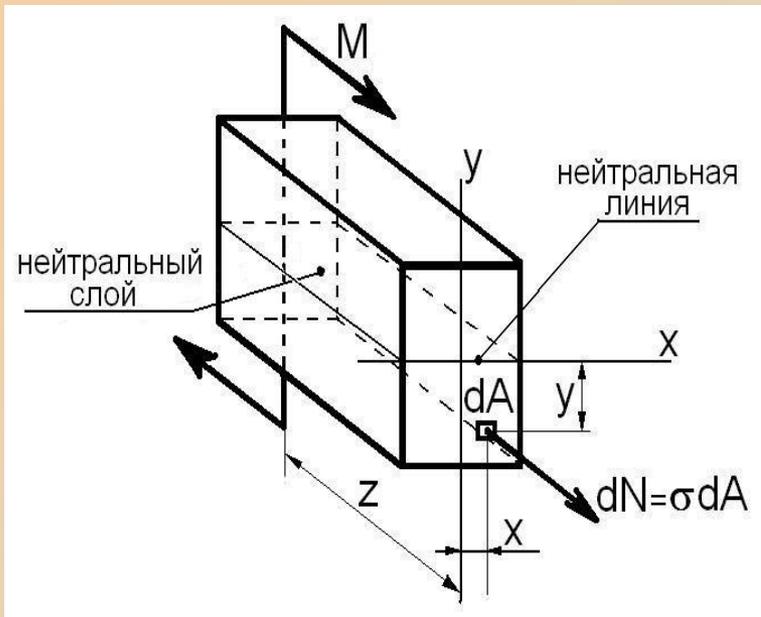
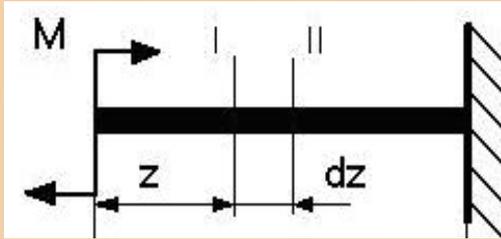


**Нейтральный слой** - продольный слой волокон, который, искривляясь, не испытывает ни растяжения, ни сжатия

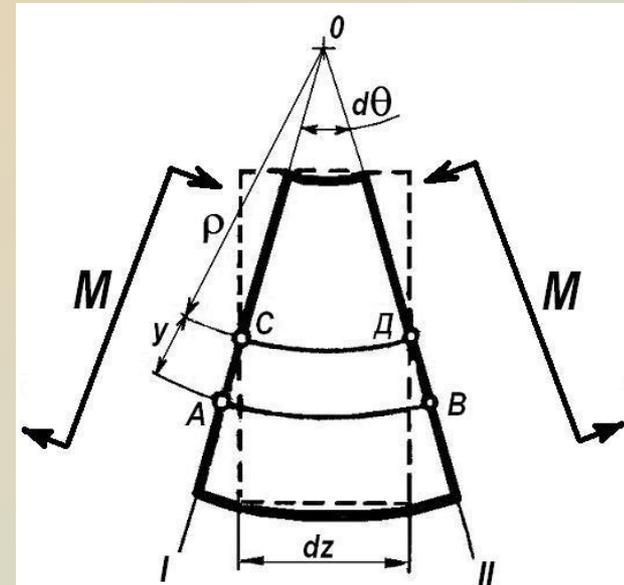
**Упругая линия** - деформированная ось балки, которая, будучи частью нейтрального слоя, длину не меняет.

**Нейтральная линия (нейтральная ось)** - линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения

## Напряжения при чистом изгибе



$$M_x = \int_A \sigma y dA$$

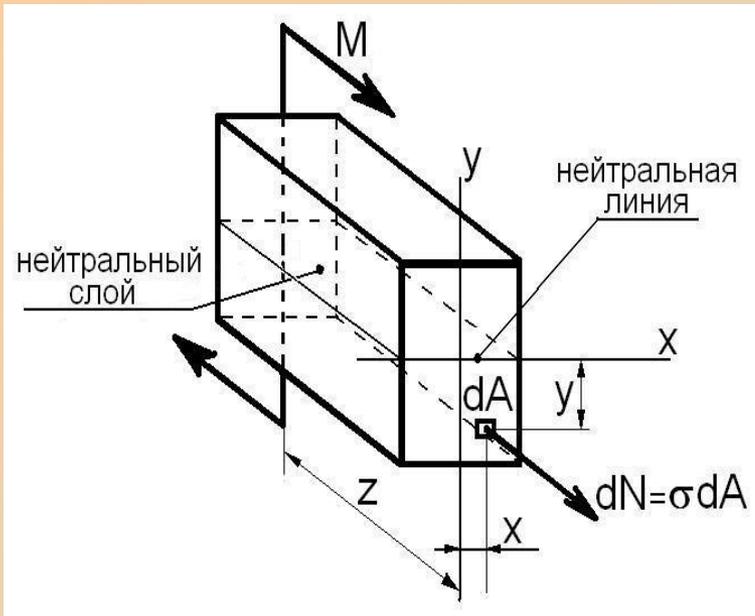


$$dz = \rho d\theta.$$

$$\varepsilon = y/\rho.$$

$$\sigma = E \cdot y / \rho.$$

## Напряжения при чистом изгибе



**Уравнения равновесия:**

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = \sigma \cdot dA = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(F_k) = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y - M = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(F_k) = \int_A \sigma \cdot dA \cdot x = 0.$$

Из первого уравнения равновесия:  $\int_A \sigma \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0,$

а так как  $\frac{E}{\rho} \neq 0,$  то  $\int_A y \cdot dA = S_y = 0$

*Нейтральная ось проходит  
через центр тяжести  
сечения*

## Напряжения при чистом изгибе

Третье из уравнений равновесия

$$\int_A \sigma \cdot dA \cdot x = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot x \cdot dA = 0.$$

Так как  $\frac{E}{\rho} \neq 0$ , то

$$\int_A y \cdot x \cdot dA = I_{xy} = 0.$$

*Нейтральная линия совпадает с главной центральной осью поперечного сечения балки.*

**Уравнения равновесия:**

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = \sigma \cdot dA = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(F_k) = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y - M = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(F_k) = \int_A \sigma \cdot dA \cdot x = 0.$$

## Напряжения при чистом изгибе

Второе из уравнений равновесия:

$$\int_A \sigma \cdot dA \cdot y = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = M.$$

Так как  $\int_A y^2 \cdot dA = I_x$  , тогда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}$$

- уравнение упругой линии

$(E \cdot I_x)$  - жесткость сечения

балки

так как  $\sigma = E \cdot y / \rho$ ,

Напряжения в любой точке сечения:

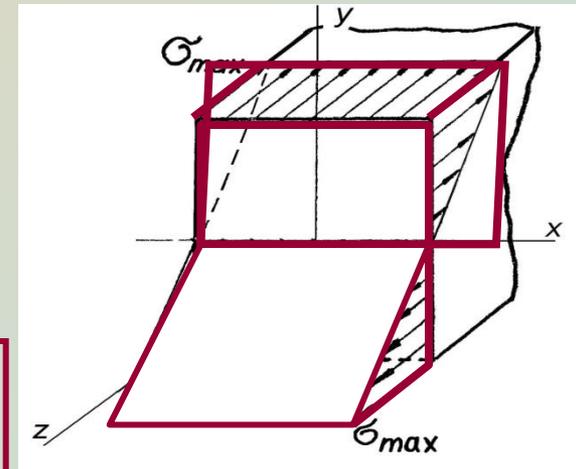
$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x}.$$

**Уравнения равновесия:**

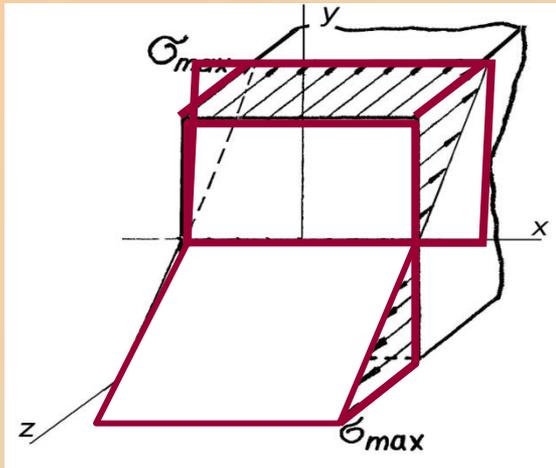
$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = \sigma \cdot dA = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(F_k) = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y - M = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(F_k) = \int_A \sigma \cdot dA \cdot x = 0.$$



## Напряжения при чистом изгибе



$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x}$$

Максимальное напряжение возникают в верхних и нижних волокнах балки:

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot y_{max}}{I_x}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_x}$$

где:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$$

- *осевой момент сопротивления сечения*  
при изгибе

# Напряжения при плоском поперечном изгибе

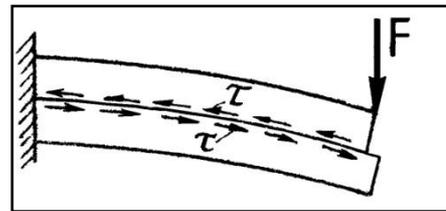
## Нормальные напряжения

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_x}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x}$$

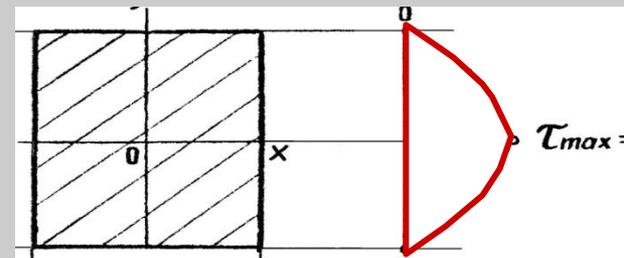
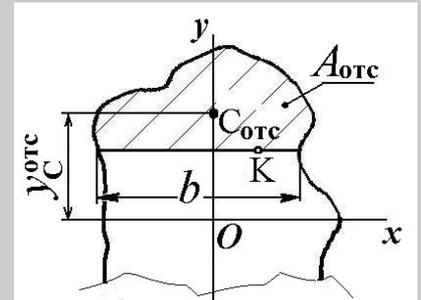
Формулы  
нормальных напряжений  
для чистого изгиба  
применимы и для  
поперечного изгиба  
из-за малости сдвиговых  
деформаций:

## Касательные напряжения



Возникновение  
касательных  
напряжений  $\tau$   
сопровождается  
появлением сдвиговых деформаций  $\gamma$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b}$$





## Модуль 2.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ

### Изгиб

#### ЛЕКЦИЯ 9

#### План:

9.1. Условие прочности при изгибе

9.2. Перемещения при изгибе

# УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

$$\sigma \gg \tau.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

**Проверочный расчет:** значение

$\sigma_{\max}$ , сравнивают с  $[\sigma]$  и делают вывод о прочности балки.

**Проектный расчёт:**

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

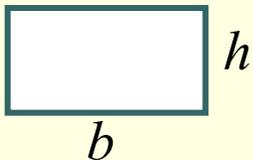
при известных значениях  $M$  и допустимого напряжения  $[\sigma]$ :

**Расчёт допустимой нагрузки:**

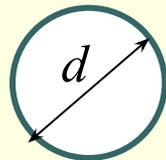
$$[M] \leq [\sigma] \cdot W_x$$

при известных  $[\sigma]$  и  $W_x$

Момент сопротивления сечения

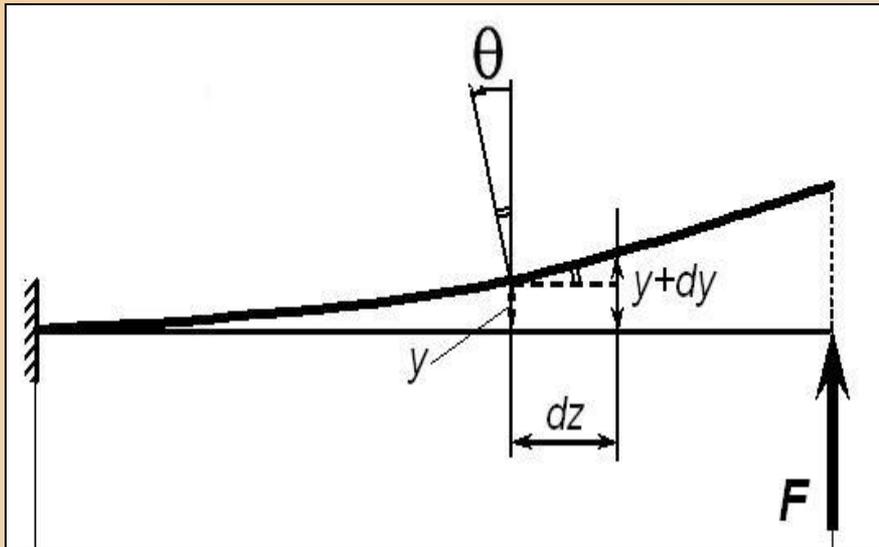


$$W_x = bh^2/6$$



$$W_x = \pi d^3/32 \approx 0,1d^3$$

## ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ



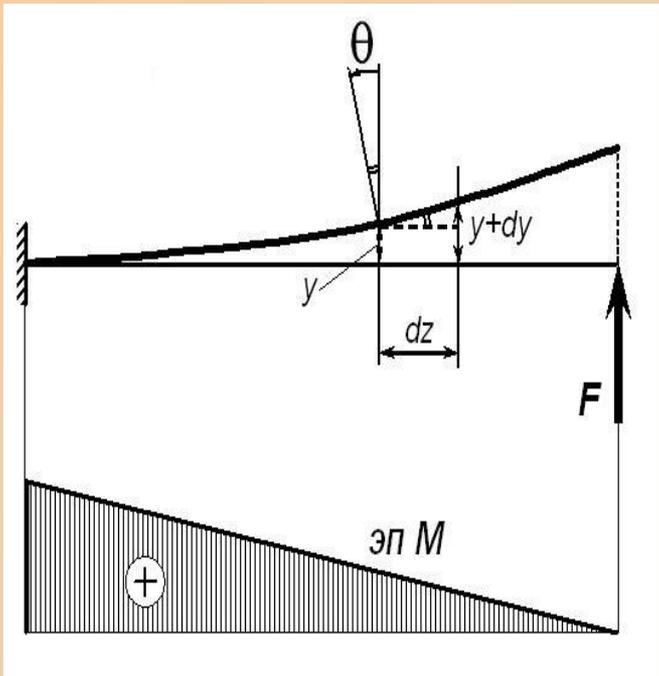
**Прогиб балки  $y$**  -  
перемещение центра тяжести  
поперечного сечения балки в  
направлении, перпендикулярном  
к ее оси.

$y > 0$  если перемещение  
происходит вверх.

**Угол поворота сечения  $\theta$**  - угол, на который поворачивается  
сечение по отношению к своему первоначальному положению.

$\theta > 0$  при повороте против хода часовой стрелки.

## ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ



Прогибы  $y$  и углы поворота  $\theta$

связаны между собой:  $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dz} = y' \approx \theta$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}$$

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{M}{EI_x}$$

дифференциальное  
уравнение упругой  
линии

Так как  $(y')^2 \ll 1$  то

$$y'' = \frac{M}{EI_x}$$

приближенное  
дифференциальное  
уравнение упругой линии

## ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Приближенное дифференциальное уравнение упругой линии:

$$EI_x y'' = M$$

Интегрируя его получим  
для углов поворота:

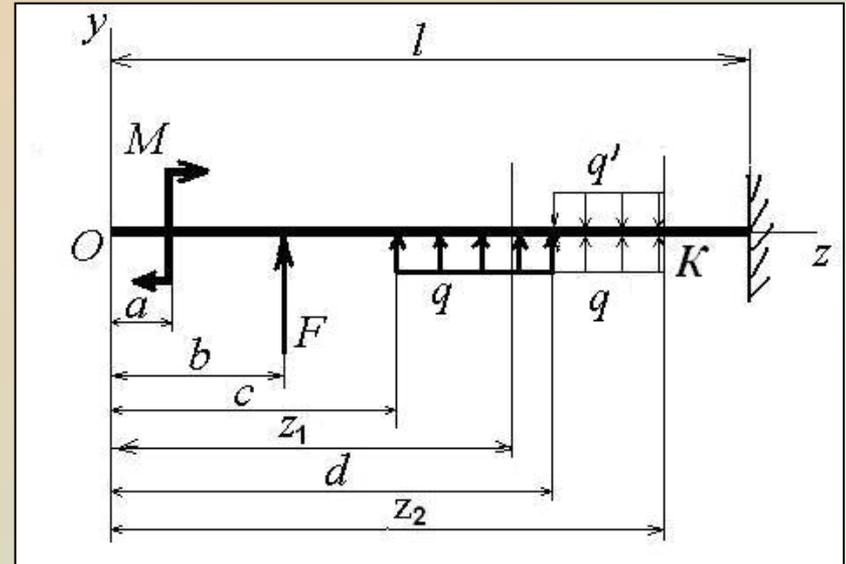
$$EI_x y'_1 = C + M(z_1 - a) + F \frac{(z_1 - b)^2}{2!} + q \frac{(z_1 - c)^3}{3!}$$

$$C = EI_x \theta_0$$

для прогибов:

$$EI_x y_1 = D + EI_x \theta_0 z_1 + M \frac{(z_1 - a)^2}{2!} + F \frac{(z_1 - b)^3}{3!} + q \frac{(z_1 - c)^4}{4!}$$

$$D = EI_x y_0$$



## ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

В общем виде **УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

для прогибов:

$$EI_x y = EI_x y_0 + EJ_x \theta_0 z + \sum M \frac{(z - l_M)^2}{2!} + \sum F \frac{(z - l_F)^3}{3!} + \sum q \frac{(z - l_q)^4}{4!}$$

для углов поворота :

$$EI_x \theta = EI_x \theta_0 + \sum M \frac{(z - l_M)}{1!} + \sum F \frac{(z - l_F)^2}{2!} + \sum q \frac{(z - l_q)^3}{3!}$$

**Начальные параметры** находят из условий закрепления балки.

- для консольной балки в заделке :  $y_0 = 0, \theta_0 = 0,$
- для балки на шарнирных опорах в опорных точках:  $y_A = 0, y_B = 0.$

## ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

### Метод Мора:

**В точке с искомым перемещением конструкцию нагружают единичной силой, которая совершает работу на возможном (искомом) перемещении.**

### Порядок определения перемещений :

1. Строят «вспомогательную систему» и нагружают ее единичной нагрузкой в точке с искомым перемещением .
2. Для каждого участка системы записывают выражения изгибающих моментов от приложенной нагрузки  $M_f$  и от единичной нагрузки -  $M_1$ .
3. По всем участкам системы вычисляют и суммируют интегралы Мора, получая в результате искомое перемещение :

$$\Delta = \sum \int \frac{M_f M_1}{EI_x} dz$$

## ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

**Правило Верещагина** (графоаналитический способ)

$A_f$  – площадь эпюры изгибающего момента  $M_f$  от заданной

нагрузки;

$$\Delta = \sum \frac{A_f y_c}{EI_x}$$

$y_c$  – ордината эпюры от

единичной

нагрузки под центром

тяжести

эпюры  $M_f$ ;

$EI_x$  – жесткость сечения участка

❖ Вычисления производятся по участкам, на каждом из которых прямолинейная эпюра должна быть без переломов.

❖ Сложная эпюра  $M_f$  разбивается на простые фигуры.

❖ Площадь каждой фигуры умножается на ординату под ее центром тяжести

# МЕХАНИКА

## Сопротивление материалов

### Раздел - 8. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Напряжено-деформированное  
состояние в точке

ЛЕКЦИЯ 10

Сложное сопротивление бруса

ЛЕКЦИЯ 11

ЛЕКЦИЯ 12



## Модуль 2.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

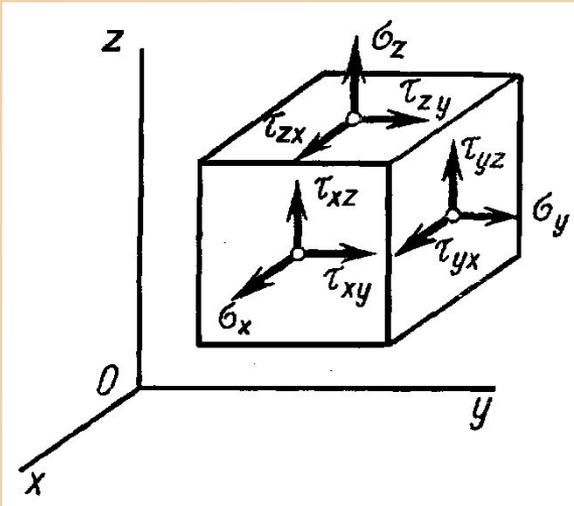
### Теория напряженно-деформированного состояния

#### ЛЕКЦИЯ 10

#### План:

- 10.1. Напряженное состояние в точке
- 10.2. Обобщенный закон Гука
- 10.3. Теории прочности

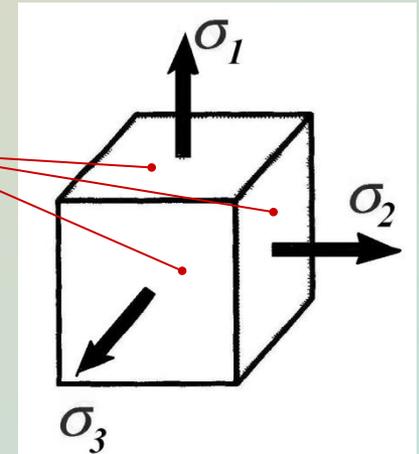
**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ** - это совокупность напряжений на множестве площадок, которые можно провести через какую-либо точку тела



**Закон парности касательных напряжений :**

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

**Главные площадки**



$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , - Главные

напряжения

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (\text{с учетом знаков})$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

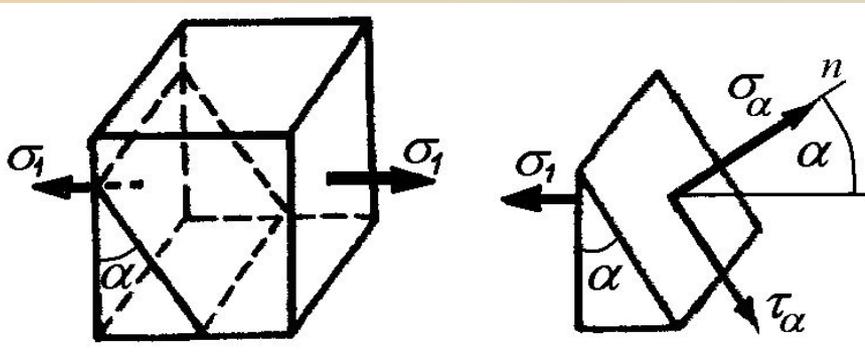
# НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

Различают  
напряженные состояния:

- одноосное (линейное);
- двухосное (плоское);
- трехосное (объемное).

**Линейное  
напряженное состояние:**

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0,$$



$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$

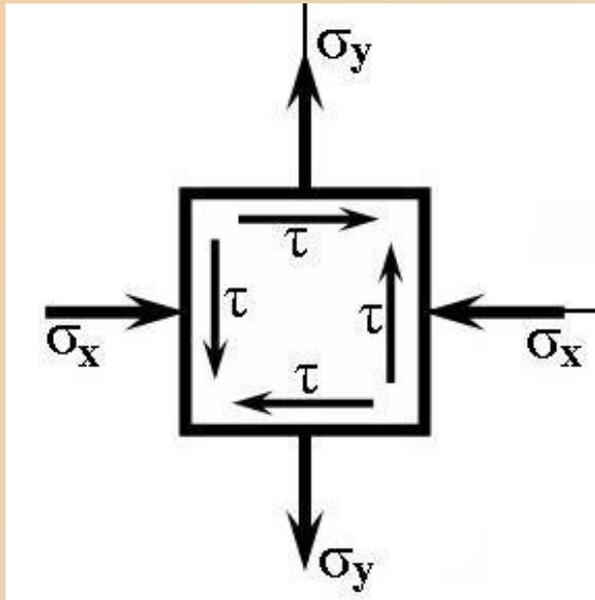
$$\tau_{\max} = \sigma_1/2 \quad \text{при} \quad \alpha = 45^\circ$$

# НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

**Плоское**

**напряженное состояние:**

$$\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 \neq 0, \quad \sigma_3 = 0,$$



$$\sigma_1 = \sigma_x; \quad \sigma_2 = \sigma_y; \quad \sigma_3 = 0$$

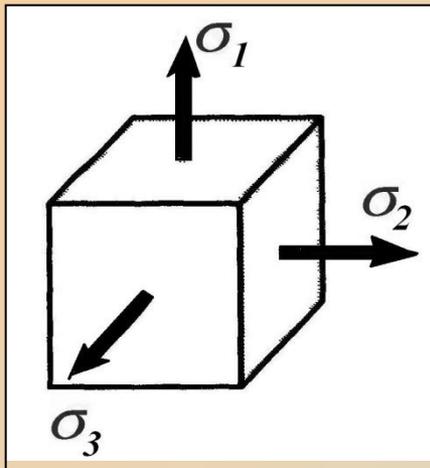
$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right]$$

*Положение главных площадок*

*определяют по углу поворота осей  $\psi_0$ :*

$$\operatorname{tg} 2\psi_0 = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ



**Объемное  
напряженное состояние:**

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$$

Максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  действует по площадке, наклоненной под углом  $45^\circ$  к  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  и параллельной  $\sigma_2$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

## ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Направление деформации	Относительные деформации $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ от действия нормальных напряжений		
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$
$x$	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_z}{E}$
$y$	$-\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_z}{E}$
$z$	$-\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$

Сложив все деформации одного направления, получают

**обобщенный закон Гука**

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

относительное изменение объема при деформации

$$v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (1 - 2\mu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / E$$

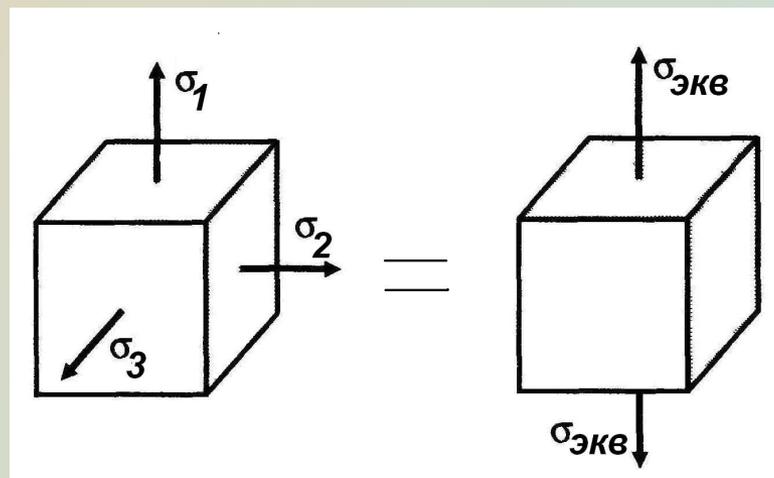
## ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

**Предельное напряженное состояние** тела характеризуется началом текучести материала, значительными остаточными деформациями или появлением трещин, свидетельствующих о начале его разрушения.

**Эквивалентным напряжением** называется напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние стало равноопасным заданному напряженному состоя

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma_p]$$

где  $[\sigma_p]$  - допускаемое напряжение при простом растяжении



## ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

### 1. Теория наибольших нормальных напряжений

(первая гипотеза прочности)  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_{\text{max}} \leq [\sigma]$

### 2. Теория наибольших относительных удлинений

(вторая гипотеза прочности)

### 3. Теория наибольших касательных напряжений

(третья гипотеза прочности)  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{(\sigma_z)^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma]$

### 4. Теория энергии формоизменения

(энергетическая теория)  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{(\sigma_z)^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$

### 5. Теория прочности Мора

(пятая гипотеза прочности)  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]$



Модуль 2.

**СОПРОТИВЛЕНИЕ  
МАТЕРИАЛОВ**

**СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ**

**Сложное сопротивление бруса**

**ЛЕКЦИЯ 11**

**План:**

11.1. Понятие сложного сопротивления

11.2. Косой изгиб

**Сложное сопротивление** - вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса одновременно возникает несколько внутренних силовых факторов.

### Случаи сложного сопротивления:

- **одноосное** напряженное состояние, или приближенное к нему (косой изгиб, внецентренное растяжение и сжатие)
- **плоское** напряженное состояние (изгиб с кручением, растяжение или сжатие с кручением, растяжение или сжатие с изгибом).

## КОСОЙ ИЗГИБ

*Косой изгиб имеет место, когда плоскость действия нагрузки не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции бруса.*

Разложим силу  $F$  на две составляющие:

$$F_x = F \sin \varphi;$$

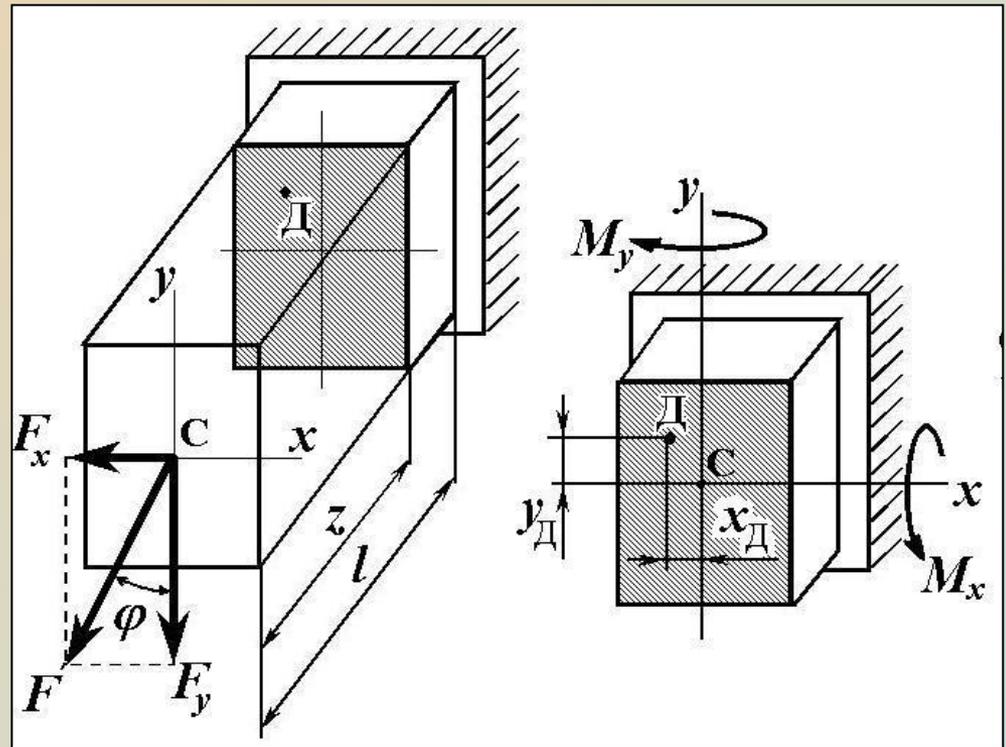
$$F_y = F \cos \varphi.$$

Изгибающие моменты в поперечном сечении бруса:

$$M_x = F_y \cdot z = (F \cos \varphi) z;$$

$$M_y = F_x \cdot z = (F \sin \varphi) z.$$

Влиянием поперечных сил  $Q$  на прочность и жесткость бруса обычно пренебрегают



## КОСОЙ ИЗГИБ

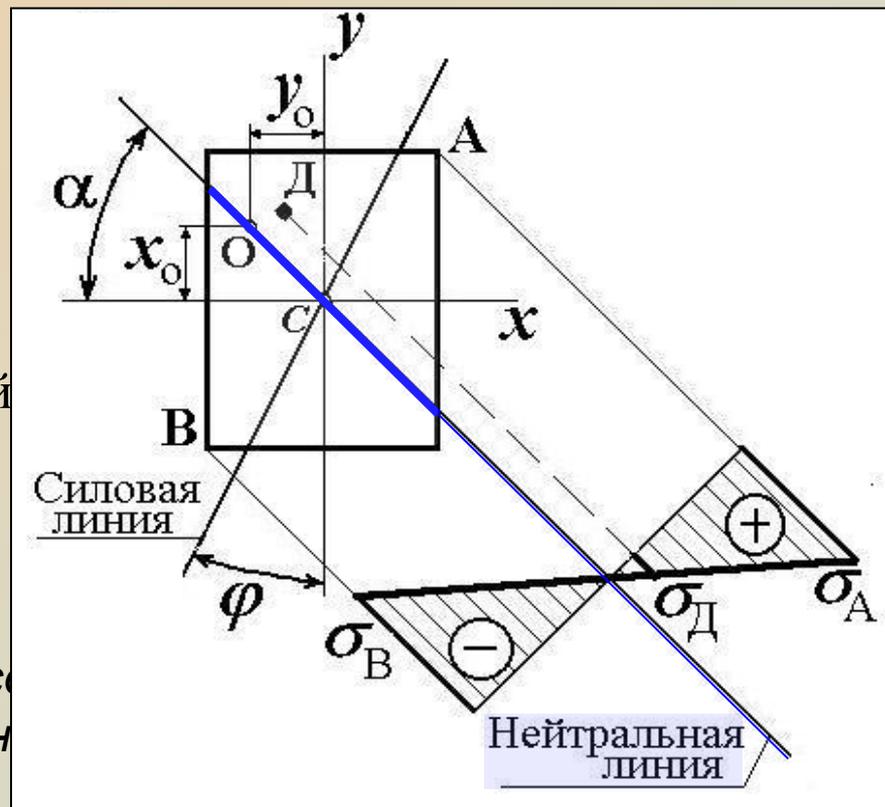
Напряжения в произвольной точке Д:

$$\sigma_D = \frac{M_x}{I_x} y_D - \frac{M_y}{I_y} x_D$$

для точки О, лежащей на нейтральной линии:

$$\sigma_O = \frac{M_x}{I_x} y_O - \frac{M_y}{I_y} x_O = 0$$

*Нейтральная линия при косом изгибе всегда проходит через центр тяжести сечения*



$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{y_O}{x_O} \right| = \frac{M_y \cdot I_x}{M_x \cdot I_y} = \frac{F \sin \varphi \cdot z \cdot I_x}{F \cos \varphi \cdot z \cdot I_y} = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi$$

## КОСОЙ ИЗГИБ

**Условие прочности :**

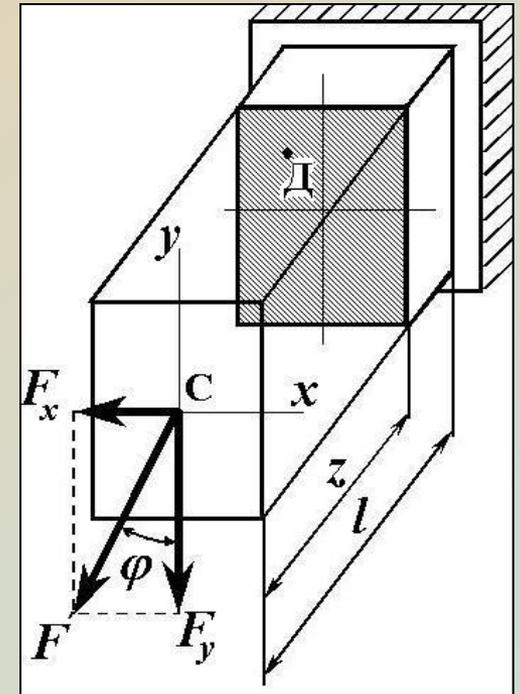
$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} + \frac{M_y}{I_y} x_{\max} \leq [\sigma]$$

Для сечений, имеющих две оси симметрии:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]$$

**Прогибы** определяют геометрическим суммированием прогибов вдоль направления главных осей:

$$y = \sqrt{y_x^2 + y_y^2}.$$





## Модуль 2.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### Сложное сопротивление бруса

#### ЛЕКЦИЯ 12

##### План:

- 12.1. Изгиб с растяжением (сжатием)
- 12.2. Внецентренное растяжение или сжатие
- 12.3. Кручение с изгибом

# ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ)

Внутренние усилия :

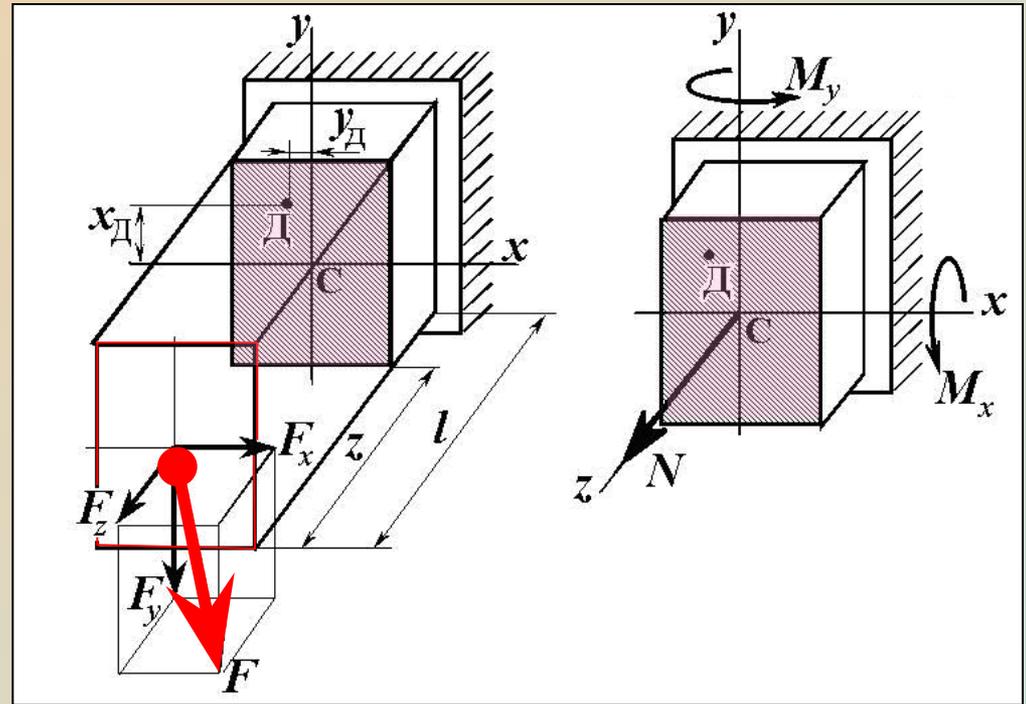
$$N = F_z,$$

$$Q_x = F_x, \quad M_x = F_y \cdot z,$$

$$Q_y = F_y, \quad M_y = F_x \cdot z$$

Напряжение в произвольно выбранной точке Д :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_D + \frac{M_y}{I_y} x_D$$



Условие прочности для сечений с двумя осями симметрии :

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]$$

# ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

Внутренние силы:

$$M_x = F \cdot y_F$$

$$y_F;$$

$$M_y = F \cdot x_F$$

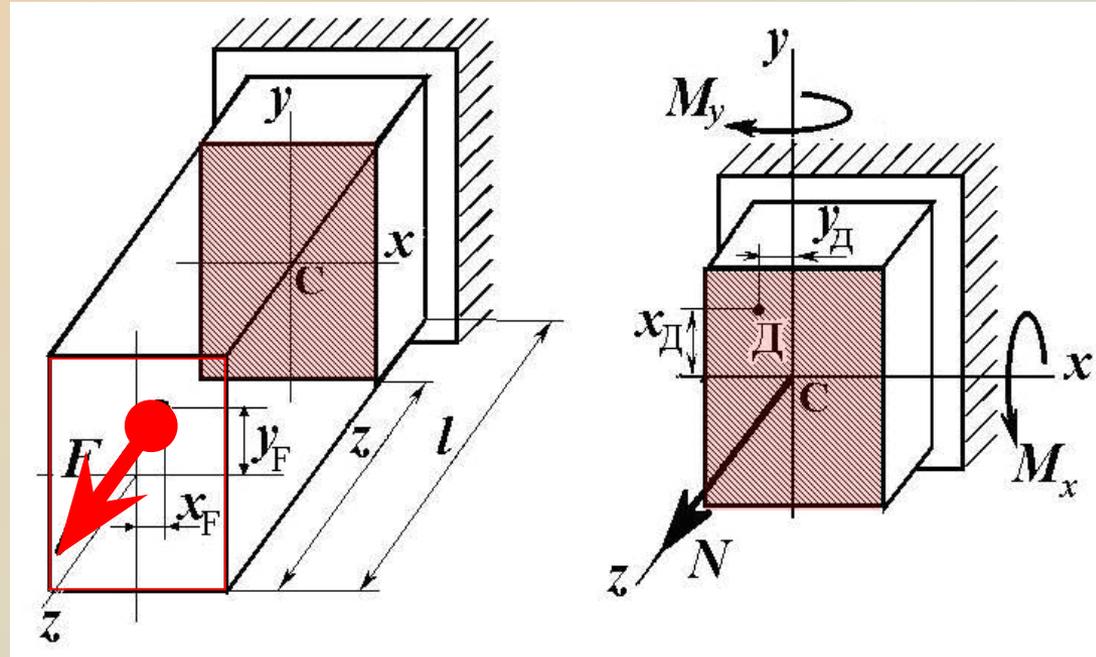
$$x_F,$$

Нормальное напряжение  
в произвольной точке Д:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_D + \frac{M_y}{I_y} x_D$$

Условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]$$



# КРУЧЕНИЕ С ИЗГИБОМ

По третьей гипотезе прочности:

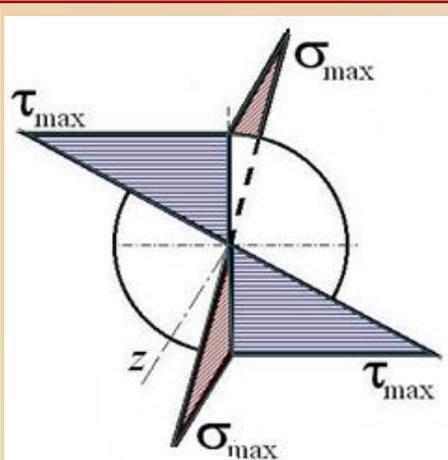
$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

ИЛИ

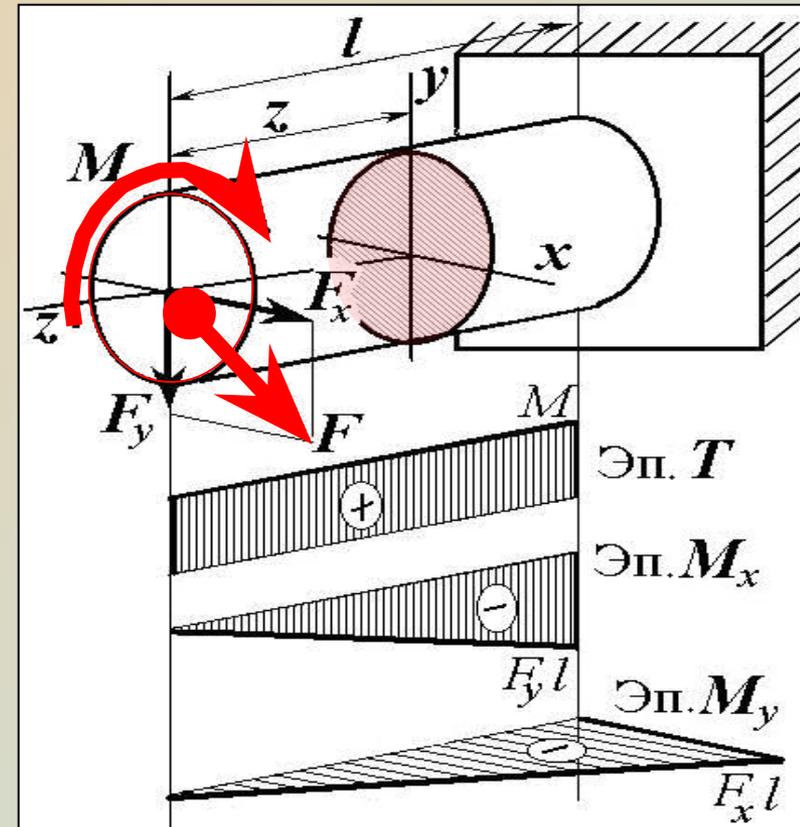
$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_{\Sigma}^2 + T^2}}{W_x}$$

где

$$M_{\Sigma} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$



Эпюры напряжений в поперечном сечении вала:



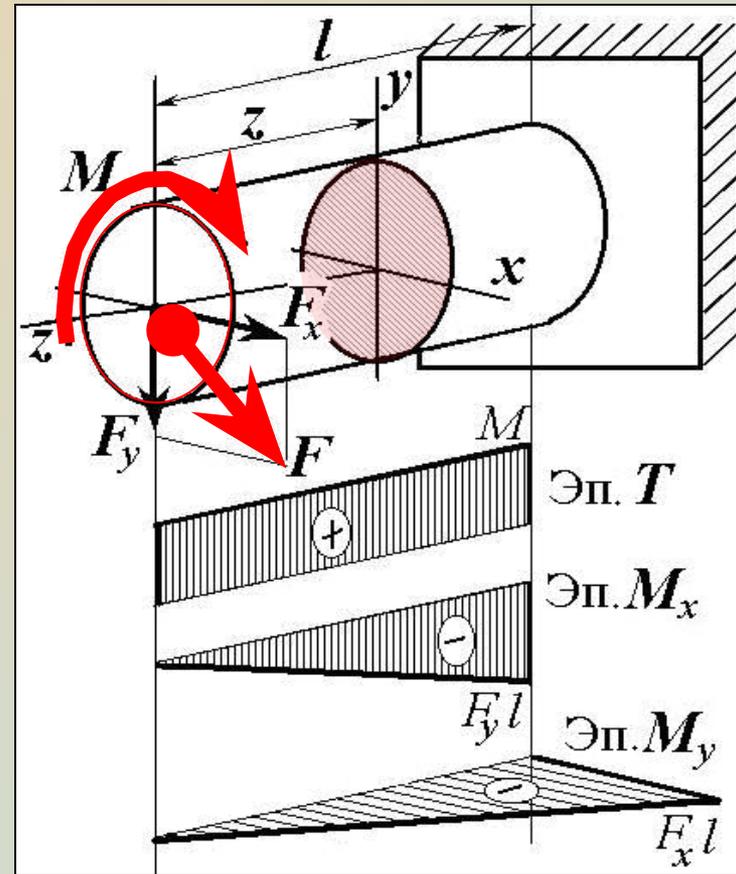
# КРУЧЕНИЕ С ИЗГИБОМ

По четвертой гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \text{ или}$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_{\Sigma}^2 + 0,75T^2}}{W_x}$$

где 
$$M_{\Sigma} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$



# МЕХАНИКА

## Сопротивление материалов

### Раздел – 9. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ И ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Прочность при переменных  
напряжениях

ЛЕКЦИЯ 13

ЛЕКЦИЯ 14

Прочность при ударе

ЛЕКЦИЯ 15

## Модуль 2.

СОПРОТИВЛЕНИЕ  
МАТЕРИАЛОВПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ И  
ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХРасчеты на прочность при переменных  
напряжениях

## ЛЕКЦИЯ 13

## План:

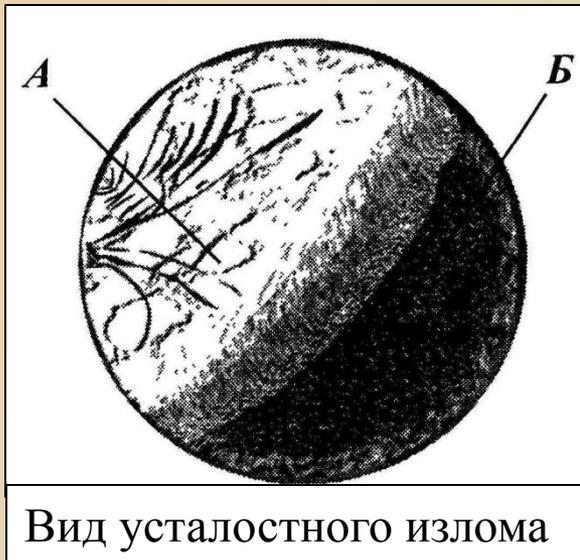
13.1. Явление усталости

13.2. Кривая усталости при симметричном цикле

## УСТАЛОСТЬ

- процесс постепенного накопления повреждений в материале под действием переменных напряжений, приводящий к изменению его свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению.

**Усталостное разрушение** – разрушение, происходящее при напряжениях, значительно меньших предела прочности  $\sigma_B$ , а иногда даже и предела пропорциональности  $\sigma_{пц}$ .



Зона А - область распространения трещины

Зона Б - зона разрыва

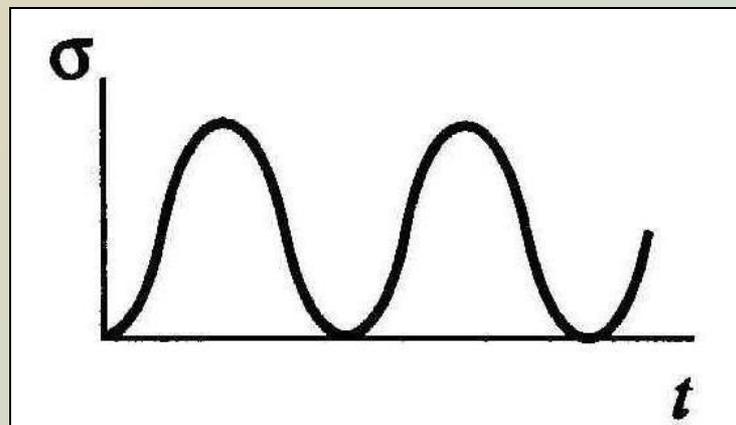
Вид усталостного излома

# УСТАЛОСТЬ

**Неустановившийся режим** (*закон изменения напряжений во времени может быть любым*)

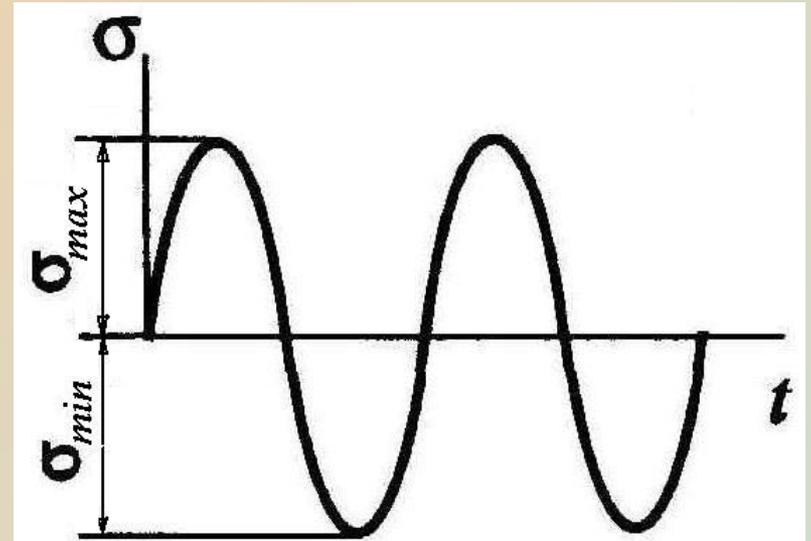
**Установившийся режим** (*изменение напряжений во времени носит циклически повторяющийся характер*)

**Цикл напряжений** -  
совокупность  
последовательных значений  
напряжений за один период  
нагружения при  
установившемся режиме



# УСТАЛОСТЬ

Характеристики  
цикла напряжений:



$\sigma_{\max}$  - максимальное (наибольшее по модулю) напряжение;

$\sigma_{\min}$  - минимальное (наименьшее по модулю) напряжение;

$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$  - среднее напряжение

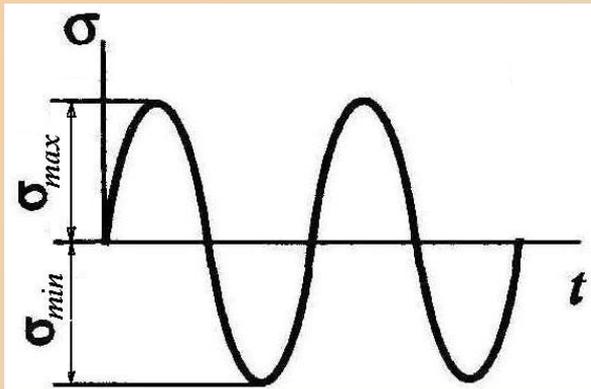
$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$  - амплитудное напряжение

$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$  - коэффициент асимметрии цикла

## УСТАЛОСТЬ

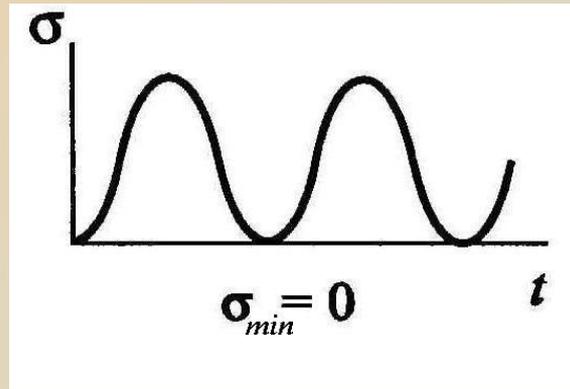
## ЦИКЛЫ НАГРУЖЕНИЯ

симметричный



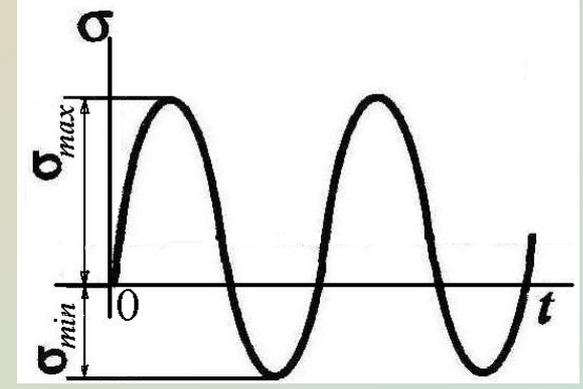
$$\begin{aligned}\sigma_m &= 0, \\ \sigma_a &= \sigma_{\max} = \sigma_{\min}; \\ r &= -1.\end{aligned}$$

пульсационный



$$\begin{aligned}\sigma_{\min} &= 0; \\ \sigma_m &= \sigma_a = \sigma_{\max}/2; \\ r &= 0.\end{aligned}$$

асимметричный

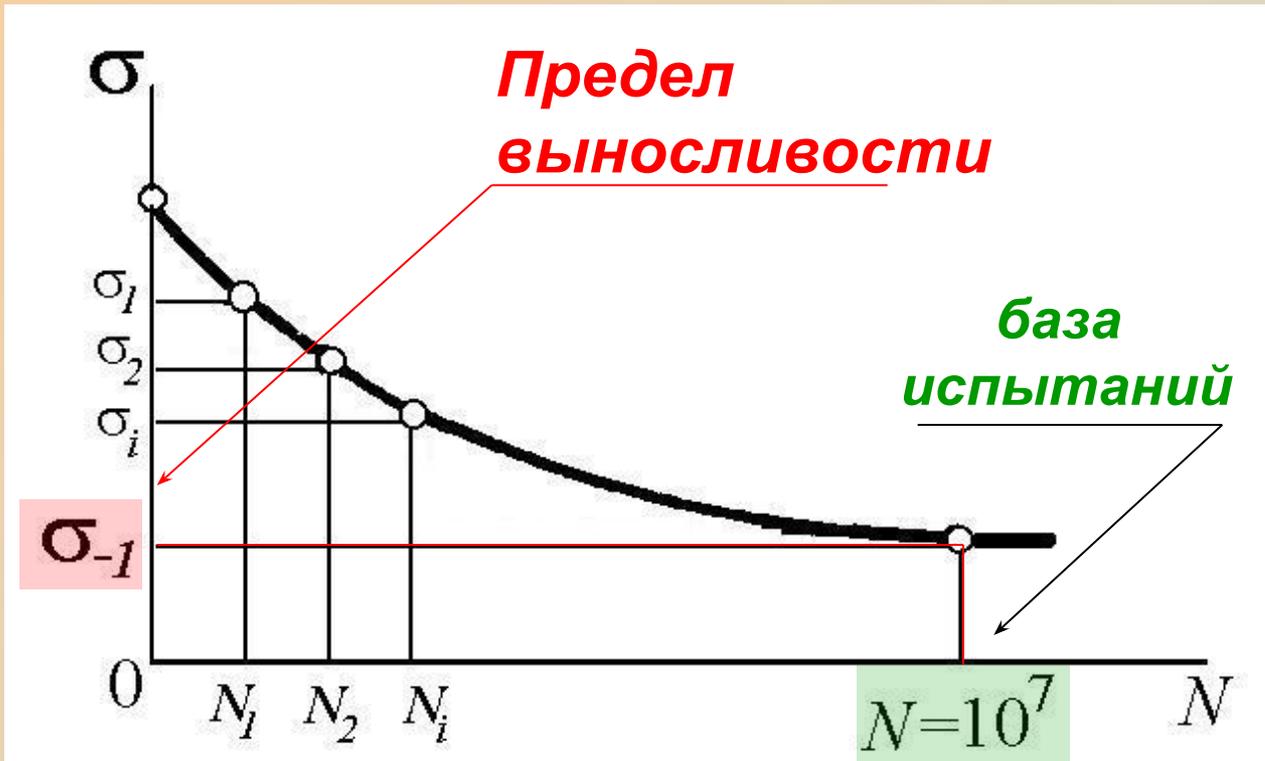


$$\begin{aligned}\sigma_m &\neq 0, \\ \sigma_{\max} &\neq \sigma_{\min};\end{aligned}$$

наиболее опасный

## УСТАЛОСТЬ

## Кривая усталости при симметричном цикле



для сталей:

$$\sigma_{-1} \approx (0,4 \dots 0,5) \sigma_B,$$

для цветных металлов:

$$\sigma_{-1} \approx (0,25 \dots 0,5) \sigma_B$$



## Модуль 2.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ И ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ

### Расчеты на прочность при переменных напряжениях

#### ЛЕКЦИЯ 14

#### План:

14.1 Факторы, влияющие на предел выносливости.

14.2 Расчеты конструкций на усталость

## ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ

- концентрация напряжений,
- масштабный фактор,
- состояние поверхности,
- внешняя среда

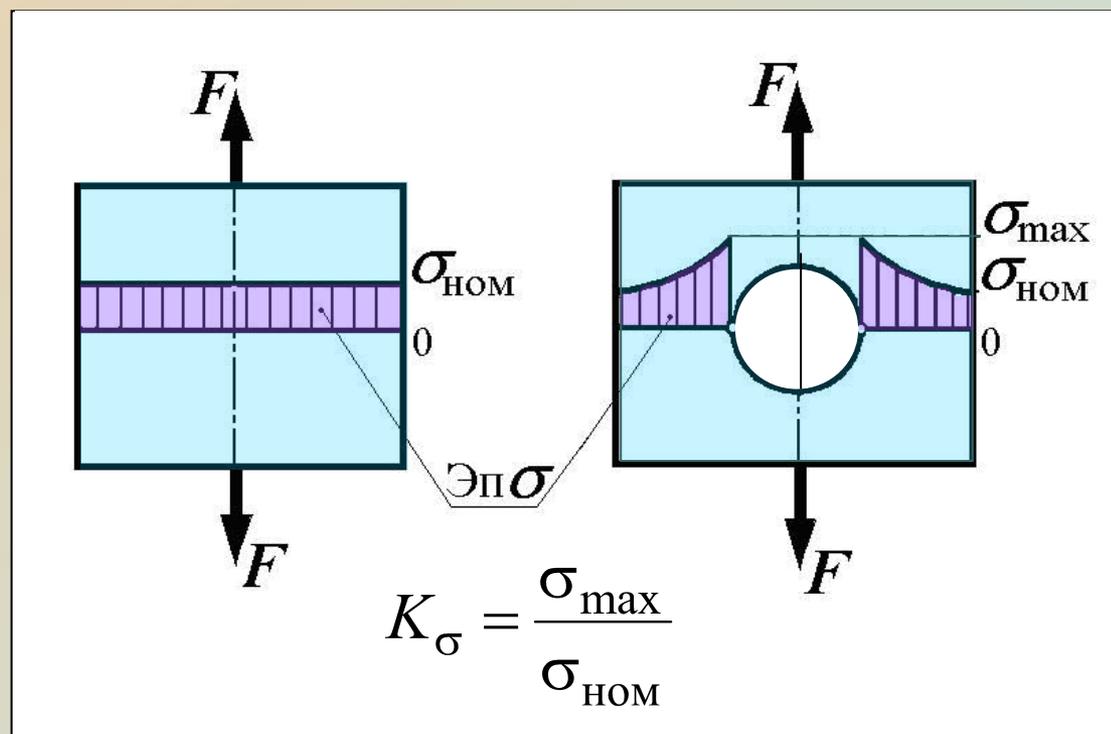
## ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ

### Концентрация напряжений

Концентраторы напряжений - надрезы, отверстия, выточки, резкие изменения размеров и др. ослабления в детали

$K_\sigma$  - эффективный коэффициент концентрации напряжений

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}$$



## ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ

### Масштабный фактор

- ✓ **статистический фактор** (высокая вероятность появления дефектных зон - раковин, неметаллических включений, микротрещин);
- ✓ **технологический фактор** (способ обработки детали в процессе ее изготовления);
- ✓ **производственный фактор** (ухудшение качества материала с увеличением объема детали).

$\varepsilon_{\sigma}$  - масштабный коэффициент

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1}^o}$$

Предел выносливости материала в гладком образце диаметром  $d$

Предел выносливости того же материала в стандартном образце диаметром  $d_o = 6...10$  мм

## ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ

### Состояние поверхности детали

$\beta$  - коэффициент состояния поверхности (для шлифованной неупрочненной поверхности  $\beta = 1$ )

Способ повышения  $\sigma_{-1}$  - поверхностное упрочнение детали (наклеп, ХТО, закалка ТВЧ и др.),

### Внешняя среда

Коррозия металлов (в поверхностных слоях возникают трещины коррозионной усталости)

Способ повышения  $\sigma_{-1}$  - защита от коррозии (антикоррозионные покрытия, окраска).

## РАСЧЕТЫ КОНСТРУКЦИЙ НА УСТАЛОСТЬ

**Условие усталостной прочности :**

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \geq [n]$$

$$[n] = 1,5 - 4.$$

$n$  - коэффициент запаса усталостной прочности,

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \cdot \beta} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}$$

$$\sigma_a = \frac{M_{\Sigma}}{W_x} \quad \sigma_m = 0$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \cdot \beta} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m}$$

$$\tau_a = \tau_m = \frac{T}{2W_{\rho}}$$

## Модуль 2.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ И ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ

### Прочность при ударе

#### ЛЕКЦИЯ 15

#### План:

15.1 Ударная нагрузка

15.2. Динамический коэффициент

15.3. Расчеты на прочность при динамическом нагружении

## Ударная нагрузка

**Ударная нагрузка** - всякая быстроменяющаяся нагрузка.

### Гипотезы теории удара:

- Удар считают неупругим;
- Ударяемое тело имеет одну степень свободы и вся масса тела сосредоточена в точке удара;
- Ударяемая конструкция считается идеально упругой;
- Вся кинетическая энергия ударяющего тела преобразуется в потенциальную энергию упругой деформации ударяемой конструкции.

Потенциальная энергия статической упругой деформации растянутого стержня :

$$U = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{EA(\Delta l)^2}{2l}$$

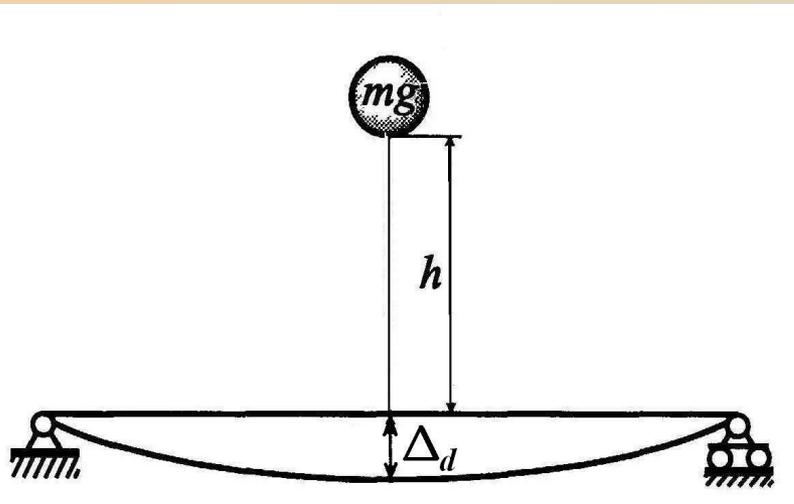
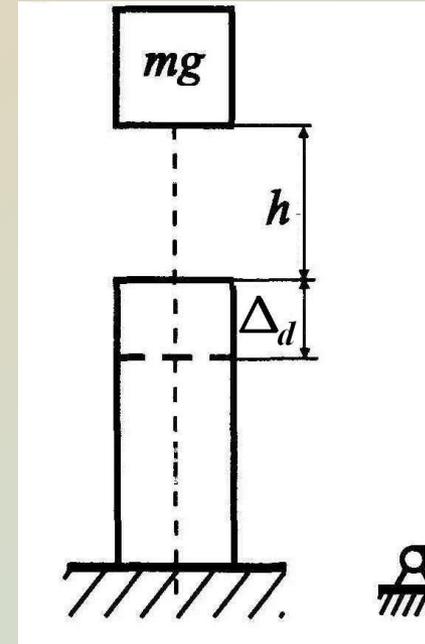
# Динамический коэффициент

Работа падающего груза:  $A = mg(h + \Delta_d)$

$\Delta_d = k_d \Delta_{CT}$  - динамический прогиб системы

$k_d$  - динамический коэффициент

$\Delta_{CT}$  - прогиб системы при статическом нагружении.



$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}}$$

$$\sigma_d = k_d \sigma_{CT}$$

# Расчеты на прочность при динамическом нагружении

Частные случаи удара:

## 1. Внезапное динамическое приложение нагрузки

$$\text{При } h = 0 \quad k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 2$$

$$\text{тогда} \quad \Delta_d = 2\Delta_{\text{ст}} \quad \sigma_d = 2\sigma_{\text{ст}}$$

## 2. Высота падения значительно больше статической деформации

$$\text{При } h \gg \Delta_{\text{ст}} \quad k_d \approx \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}$$

# МЕХАНИКА

## Сопротивление материалов

### Раздел –10. УСТОЙЧИВОСТЬ

Устойчивость сжатых стержней

ЛЕКЦИЯ 16

ЛЕКЦИЯ 17

## Модуль 2.

СОПРОТИВЛЕНИЕ  
МАТЕРИАЛОВ

## УСТОЙЧИВОСТЬ

## Устойчивость сжатых стержней

## ЛЕКЦИЯ 16

## План:

16.1. Понятие об устойчивости первоначальной формы равновесия

16.2. Формула Эйлера для критической силы

## Понятие об устойчивости первоначальной формы равновесия

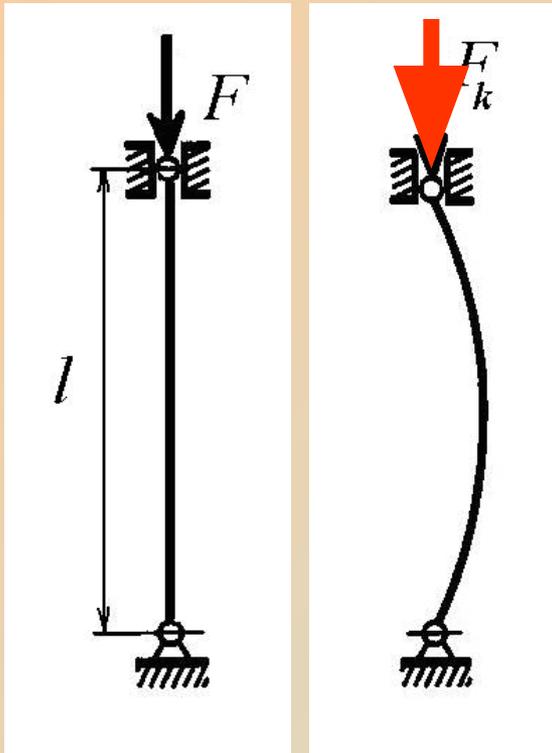
*При отклонении системы от положения равновесия после устранения причин, вызывающих это отклонение, различают три формы равновесия системы:*

**Устойчивое равновесие** - *система возвращается в первоначальное положение.*

**Неустойчивое равновесие** - *система не возвращается в исходное положение, а отклоняется от него еще больше.*

**Безразличное равновесие** - *новое положение системы после отклонения от исходного остается равновесным и после удаления внешнего воздействия.*

## Понятие об устойчивости первоначальной формы равновесия



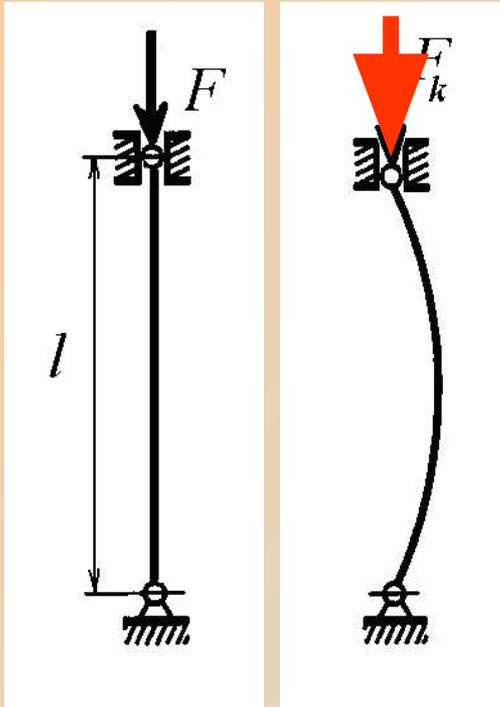
Устойчивое равновесие при  $F > F_k$ ,  
(ось стержня прямолинейная)

Неустойчивое равновесие при  $F < F_k$ ,  
(ось стержня искривляется)

$F_k$  - критическая сила

**Продольный изгиб** - явление изгиба стержня продольной силой

## Понятие об устойчивости первоначальной формы равновесия



Для обеспечения устойчивости определяют допускаемую нагрузку на сжатый стержень.

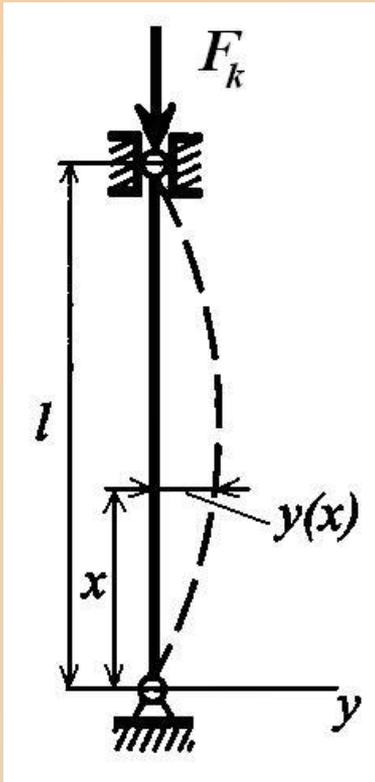
$$F_{\text{доп}} = \frac{F_k}{n_y}$$

$F_k$  - критическая сила

$n_y$  - коэффициент запаса устойчивости

для стали  $n_y = 2 \dots 4$ ,

# Формула Эйлера для критической силы



$$M = -F_k y;$$

$$EI_{\min} y'' = \pm M.$$

$$EI_{\min} y'' = -F_k y.$$

Пусть  $F_k / (EI_{\min}) = \alpha^2$ ,

$$y'' + \alpha^2 y = 0,$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

$B = 0$ , т.к.

при  $x = 0$  прогиб  $y = 0$ .

$$y = A \sin \alpha x.$$

при  $x = l$  прогиб  $y = 0$

Поэтому

$$y = A \sin \alpha l = 0$$

$\sin \alpha l = 0$ , или  $\alpha l = \pi n$

$$\alpha = \sqrt{\frac{F_k}{EI_{\min}}}$$

$$F_k = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot EI_{\min}}{l^2}$$

при  $n = 1$  получаем

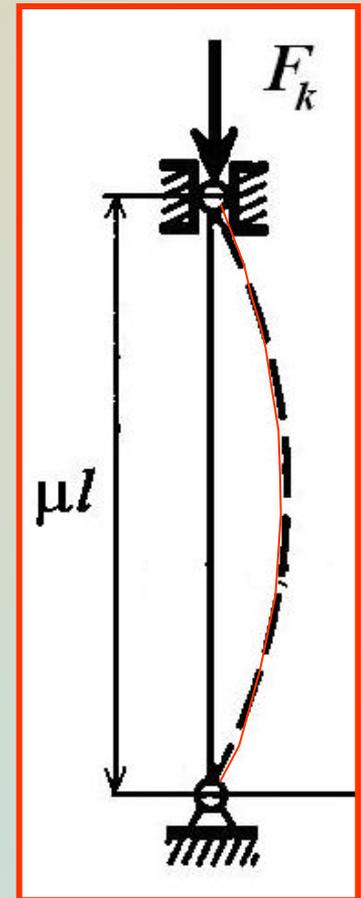
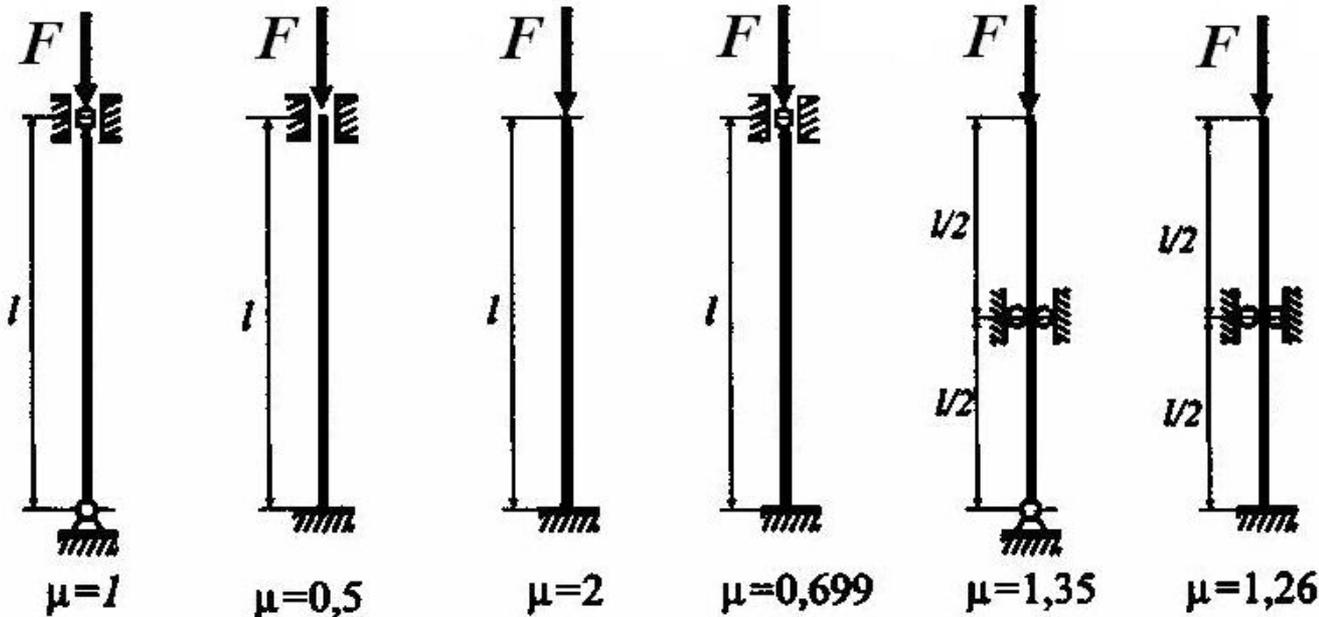
$$F_k = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{l^2}$$

# Формула Эйлера для критической силы

$$F_k = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{(\mu l)^2}$$

$(\mu l)$  – приведенная длина стержня

$\mu$  – коэффициент  
приведения длины  
стержня





## Модуль 2.

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## УСТОЙЧИВОСТЬ

### Устойчивость сжатых стержней

#### ЛЕКЦИЯ 17

##### План:

- 17.1. Пределы применимости формулы Эйлера.
- 17.2. Устойчивость сжатых стержней за пределами упругости
- 17.3. Расчет на устойчивость с помощью коэффициента снижения допускаемого напряжения

# УСТОЙЧИВОСТЬ

## УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

---

### ЛЕКЦИЯ 8

---

#### План

- 17.1. Пределы применимости формулы Эйлера.
- 17.2. Устойчивость сжатых стержней за пределами упругости
- 17.3. Расчет на устойчивость с помощью коэффициента снижения допускаемого напряжения

# ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\min}}{(\mu l)^2 A} \leq \sigma_{\text{пц}}$$

$I_{\min} / A, = i_{\min}^2$ , тогда

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{\min}^2}{(\mu l)^2} \leq \sigma_{\text{пц}}$$

$\frac{\mu l}{i_{\min}} = \lambda$  - *гибкость стержня*

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}}$$

**Условие применимости  
формулы Эйлера:**

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}$$

или

$$\lambda \geq \lambda_0$$

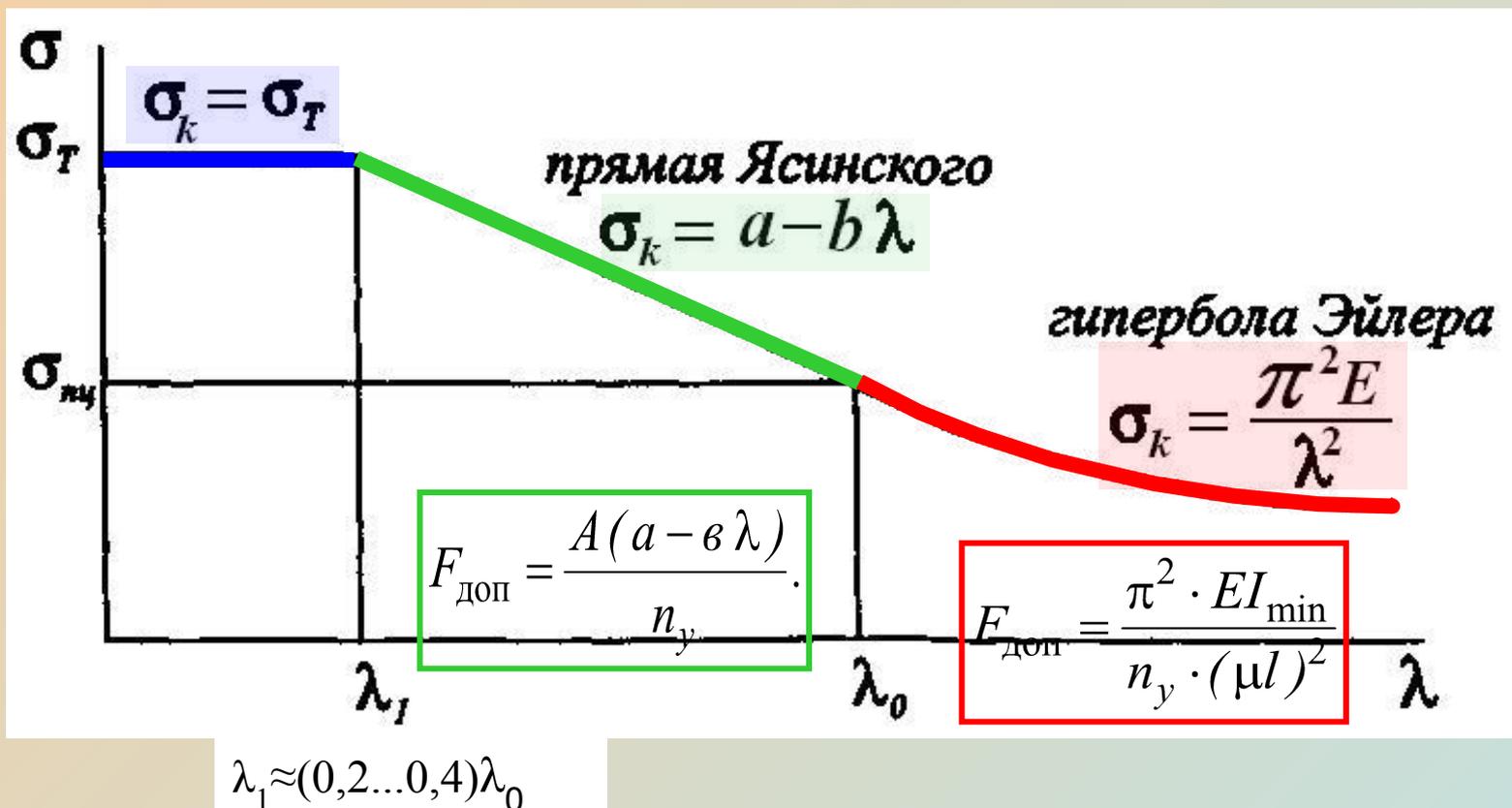
для стали -  $\lambda \geq 100$

для чугуна -  $\lambda \geq 80$ ,

для алюминиевого сплава -  $\lambda \geq 60$

# УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Полная диаграмма критических напряжений



## РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ С ПОМОЩЬЮ КОЭФФИЦИЕНТА СНИЖЕНИЯ ДОПУСКАЕМОГО НАПРЯЖЕНИЯ

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi [\sigma_c],$$

где:  $[\sigma_c]$  - допускаемое напряжение сжатия;

$\varphi$  - коэффициент снижения

допускаемого напряжения (коэффициент продольного изгиба)

*Допускаемое напряжение*

*при расчете на устойчивость:*

$$[\sigma]_y = \varphi \cdot [\sigma_c].$$

*Площадь сечения стержня:*

$$A \geq \frac{F}{\varphi [\sigma_c]}.$$

*Значение  $\varphi$  подбирается последовательно, начиная с  $\varphi_1 = 0,5$*