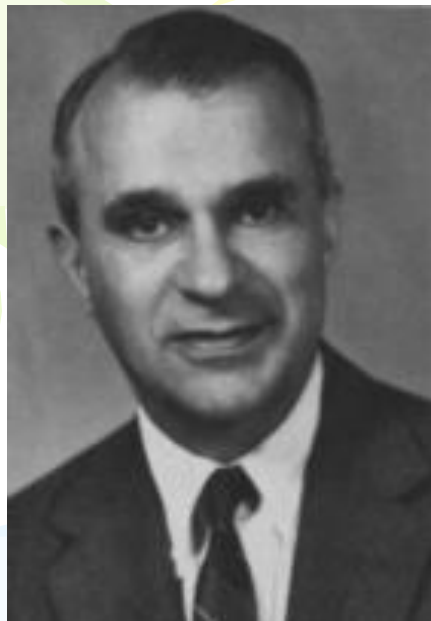


**Тема 6. «Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.  
Модель затраты-выпуск»**

*Основные понятия:*

- 1. В.В. Леонтьев**
- 2. Постановка задачи**
- 3. Основные характеристики**
- 4. Математическая модель задачи**
- 5. Методы решения**

**завершить**



# **Василий Васильевич Леонтьев (1906-1999)**

## **Американский экономист**

**1936 г. Впервые сформулирована проблема расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида.**

**1941 г. "Структура Американской экономики, 1919-1939"**

**1953 г. "Исследования структуры американской экономики"**

**1966 г. "Экономическая теория затраты-выпуск"**

**1977 г. "Будущее мировой экономики"**

**1977 г. "Очерки по экономике"**

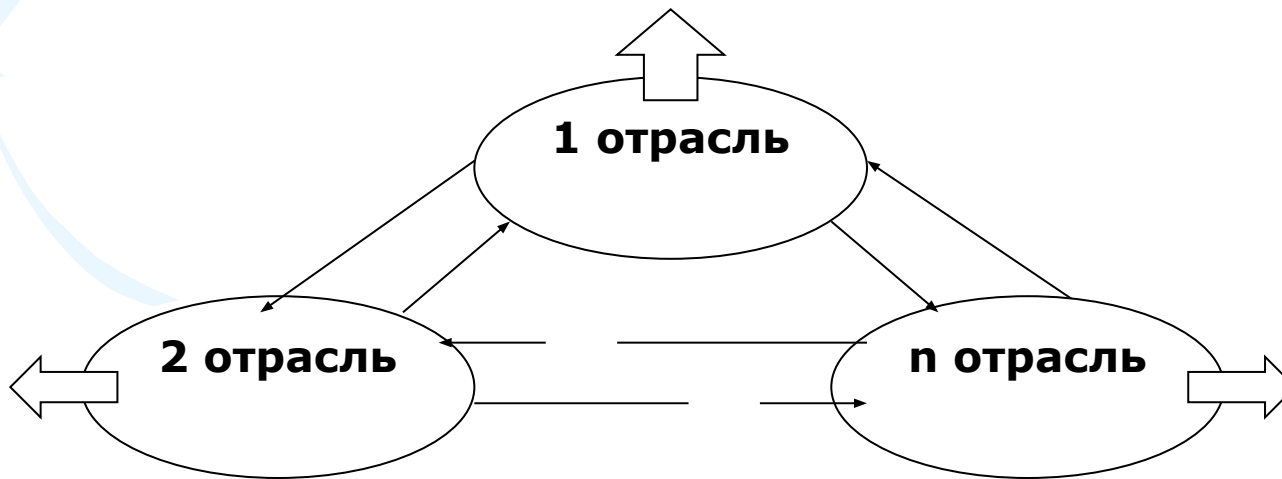
**1973 г. Нобелевская премия**

**назад**

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим производственную сферу хозяйства, состоящую из  **$n$  отраслей**, каждая из которых производит свой однородный продукт.

Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление).



назад

### 3. Основные характеристики

$x_i$  **общий объем продукции  $i$ -й отрасли (валовой выпуск, валовой объем);**

$x_{ij}$  **объем продукции  $i$ -й отрасли, потребляемый  $j$ -й отраслью при производстве объема своей продукции (межотраслевые поставки);**

$y_i$  **объем продукции  $i$ -й отрасли, предназначенный для потребления в непроеизводственной сфере (продукт конечного потребления).**

далее

## Балансовый принцип связи различных отраслей

**промышленности:** валовой выпуск  $i$ -й отрасли должен быть равным сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + y_1, \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + y_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} + y_n \end{array} \right. \quad (*)$$

далее

Величины  $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$  в течение длительного времени  
меняются очень слабо и могут рассматриваться как  
постоянные числа, т.к. технология производства остается  
на одном и том же уровне довольно длительное время, и,  
следовательно, объем потребления  $j$ -й отрасли продукции  
 $i$ -й отрасли при производстве своей продукции объема  
есть технологическая константа.

*$a_{ij}$  коэффициенты прямых затрат*

*$A = (a_{ij})$  — матрица прямых затрат*

далее

Наряду с коэффициентами прямых затрат  $a_{ij}$  рассматривают коэффициенты косвенных затрат.

Так, например,  $j$ -я отрасль использует продукцию  $i$ -й отрасли непосредственно (прямые затраты) и опосредованно, потребляя ранее произведенную свою продукцию и продукцию других отраслей, для производства которых была использована продукция  $i$ -й отрасли. Эти опосредованные один раз затраты называются ***косвенными затратами первого порядка***.

Коэффициенты косвенных затрат первого порядка образуют матрицу  $A^{(1)} = A^2 = A \cdot A$

далее

Матрица  $(E - A)^{-1}$  называется *матрицей полных затрат*, элементы которой показывают величину валового выпуска продукции  $i$ -й отрасли, необходимой для обеспечения выпуска единицы конечного продукта  $j$ -й отрасли.

*Чистой продукцией* отрасли называется разность между валовой продукцией этой отрасли и затратами продукции всех отраслей на производство этой отрасли.

[назад](#)



#### 4. Математическая модель задачи

Согласно гипотезе линейности  $x_{ij} = a_{ij}x_j$  система (\*) примет  
вид

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \dots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + y_n \end{array} \right. \quad (**)$$

далее

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

На основании согласованности матрицы  $A$  с матрицей  $X$ :

$X = A \cdot X + Y$  - матричный вид системы (\*\*) или **уравнение межотраслевого баланса (модель Леонтьева)**.

далее



Уравнение межотраслевого баланса используется:

- 1) Необходимо рассчитать объем конечного потребления по известному объему валового выпуска

$$Y = X - A \cdot X$$

- 2) Необходимо рассчитать объем валового выпуска по известному объему конечного потребления

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y$$

назад



## 5. Методы решения

- 1) Метод последовательного исключения неизвестных (Метод Гаусса)
- 2) Метод Крамера (с помощью определителей)
- 3) Метод обратной матрицы

назад



## Метод обратной матрицы

Рассмотрим СЛУ (\*\*) в матричном виде:

$$X = A \cdot X + Y \Rightarrow X = (E - A)^{-1} \cdot Y$$



**Пример.**

назад

**Пример.** Имеются две отрасли:

<b>Отрасли</b>		<b>Потребление</b>		<b>Валово й выпуск</b>
		1-я отрасль	2-я отрасль	
<b>Произ- водств о</b>	1-я отрасль	26 ед.	164 ед.	260 ед.
	2-я отрасль	208 ед.	82 ед.	410 ед.

далее далее назад

## Необходимо:

- 1) определить прямые затраты,
- 2) определить объем конечной продукции,
- 3) определить матрицу полных затрат,
- 4) найти объем валового выпуска каждой отрасли, если в плановом периоде выпуск конечной продукции должен повысится в 1-ой отрасли на 50%, во 2-ой отрасли на 20%,
- 5) найти межотраслевые поставки в плановом периоде,
- 6) составить межотраслевой баланс в плановом периоде,
- 7) определить объем чистой продукции в плановом периоде,
- 8) определить матрицу косвенных затрат 1-го порядка.

назад

# 1) Решение: (определить прямые затраты):

Для нахождения матрицы прямых затрат воспользуемся гипотезой линейности  $x_{ij} = a_{ij}x_j$  тогда

$$x_{11} = a_{11}x_1 \Rightarrow a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{26}{260} = 0,1$$


$$x_{12} = a_{12}x_2 \Rightarrow a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{164}{410} = 0,4$$

$$x_{21} = a_{21}x_1 \Rightarrow a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{208}{260} = 0,8$$

$$x_{22} = a_{22}x_2 \Rightarrow a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{82}{410} = 0,2$$

далеедалее назад





Матрица прямых затрат имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$



Матрица  $A$  продуктивна.



назад

## 2) Решение: (определить объем конечной продукции):

Чтобы рассчитать объем конечного потребления по известному объему валового выпуска необходимо вычислить:

$$Y = X - A \cdot X =$$
$$= \begin{pmatrix} 260 \\ 410 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 260 \\ 410 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Следовательно, конечный продукт 1-ой отрасли составит 70 ед., 2-отрасли 120 ед.

назад

3) Решение: (определить матрицу полных затрат):

По определению матрица полных затрат:  $(E - A)^{-1}$

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,4 \\ -0,8 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$\det(E - A) = 0,4$$

$$(E - A)_{ij} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,4 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{\det(E - A)} (E - A)_{ij}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2,25 \end{pmatrix}$$

назад

4) **Решение:** (найти объем валового выпуска каждой отрасли, если в плановом периоде выпуск конечной продукции должен повысится в 1-ой отрасли на 50%, во 2-ой отрасли на 20%):

По условию 
$$Y_{\text{конечн}} = \begin{pmatrix} 70 \cdot 1,5 \\ 120 \cdot 1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 \\ 144 \end{pmatrix}$$

Для нахождения объема валового выпуска по известному объему конечного потребления необходимо вычислить:

$$X_{\text{валов}} = (E - A)^{-1} \cdot Y_{\text{конечн}} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 105 \\ 144 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 354 \\ 534 \end{pmatrix}$$

Следовательно, объем валового выпуска 1-ой отрасли составит 354 ед., 2-отрасли 534 ед.

[назад](#)

**5) Решение:** (найти межотраслевые поставки в плановом периоде):

Для нахождения межотраслевых поставок воспользуемся гипотезой линейности  $x_{ij} = a_{ij}x_j$  тогда

$$x_{11} = a_{11}x_1 = 0,1 \cdot 354 = 35,4$$

$$x_{12} = a_{12}x_2 = 0,4 \cdot 534 = 213,6$$

$$x_{21} = a_{21}x_1 = 0,8 \cdot 354 = 283,2$$

$$x_{22} = a_{22}x_2 = 0,2 \cdot 534 = 106,8$$

[назад](#)

**б) Решение:** (составить межотраслевой баланс в плановом периоде):

Отрасли		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		1-я отрасль	2-я отрасль		
Производство	1-я отрасль	35,4	213,6	105	354
	2-я отрасль	283,2	106,8	144	534

[назад](#)

7) **Решение:** (определить объем чистой продукции в плановом периоде):

Отрасли		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
		1-я отрасль	2-я отрасль		
Производство	1-я отрасль	35,4	213,6	105	354
	2-я отрасль	283,2	106,8	144	534
Чистая продукция		35,4	213,6		

назад

**8) Решение:** (определить матрицу косвенных затрат 1-го порядка):

Матрица косвенных затрат первого порядка равна

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= A^2 = A \cdot A = \\ &= \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,33 & 0,12 \\ 0,24 & 0,36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[назад](#)





**Спасибо за внимание!**

**Не забывайте готовиться к  
лекциям и семинарам!**  
(Тема следующей лекции «Собственные  
значения и собственные векторы»)

**Удачи!**