Лекция 3
Тема 2. ТИПОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ НАРАБОТКИ ОБЪЕКТА ДО ОТКАЗА

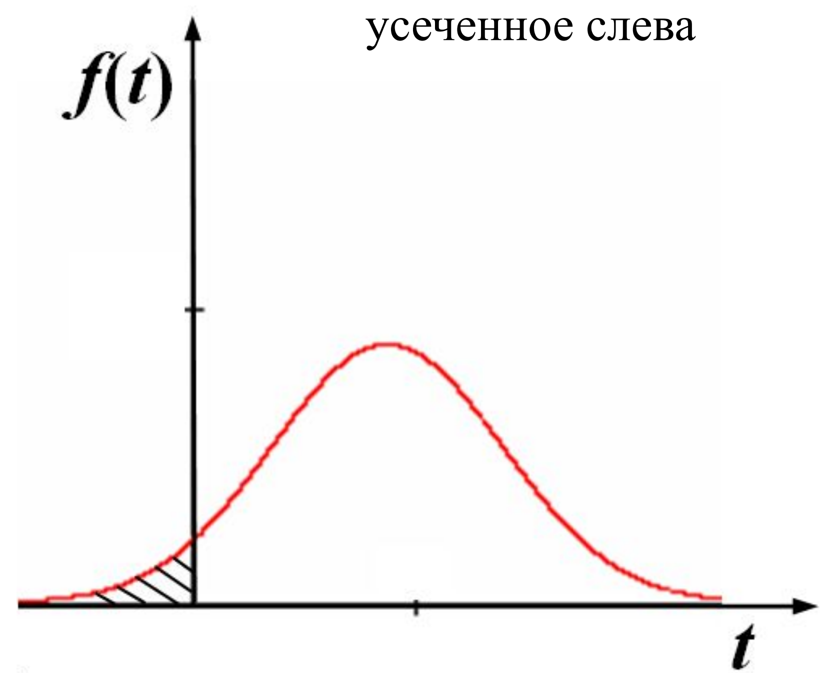
2.1 Показатели безотказности объектов АО при нормальном распределении и нормальном распределении, усеченном слева

При нормальном распределении случайная величина ξ наработки до отказа может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$. В этом случае плотность и функция распределения величины ξ имеют вид

$$f_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi}} e^{-\frac{(t-m_\xi)^2}{2\sigma_\xi{}^2}}$$

$$F_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(x-m_\xi)^2}{2\sigma_\xi{}^2}} dx$$

Нормальное распределение, усеченное слева



Так как реальное время лежит в пределах $0<t<\infty$, то необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\int_{0}^{\infty} f_{\xi}(t)dt \quad =1 \ .$$

Если заштрихованная часть рисунка ничтожно мала ($q\approx 0$), то можно расчет характеристик надежности проводить, используя функцию распределения, заменяя нижний предел в интеграле на 0.

Однако, если заштрихованная площадь под кривой $f_\xi(t)$ является значительной, то ее необходимо учитывать. Для

этого случая можно записать

$$f^{*}(t) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}} e^{-\frac{(t-m_{\xi})^2}{2\sigma_{\xi}^{2}}} = qf_{\xi}(t)$$

Нормирующий множитель q находится из условия равенства единицы площади под кривой $f_\xi(t)$. С учетом этого после преобразований получим

$$q = \frac{1}{0.5 + \Phi(t - m_\xi / \sigma_\xi)}$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Основные характеристики распределения

$$P(t) = \int_t^{\infty} q f_{\xi}(u)\,du = \{0.5 - \Phi[(t - m\xi)/\sigma\xi]\}q$$ - вероятность безотказной работы

$$F^*_{\xi}(t) = \int_0^t f_{\xi}(u)\,du = 1 - P(t)$$ – функция распределения

$$\lambda(t) = \frac{f^*_{\xi}(t)}{P(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}} e^{-\frac{(t-m_{\xi})^2}{2\sigma_{\xi}^2}} / \{0.5 - \Phi[(t-m_{\xi})/\sigma_{\xi}]\}$$ - интенсивность отказов

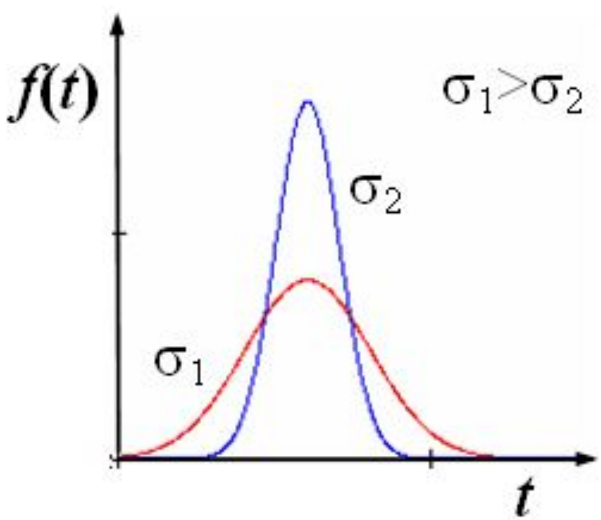
$$M^*[\xi] = m_{\xi} + \frac{q\sigma_{\xi}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_{\xi}^2}{2\sigma_{\xi}^2}}$$ - математическое ожидание наработки до отказа

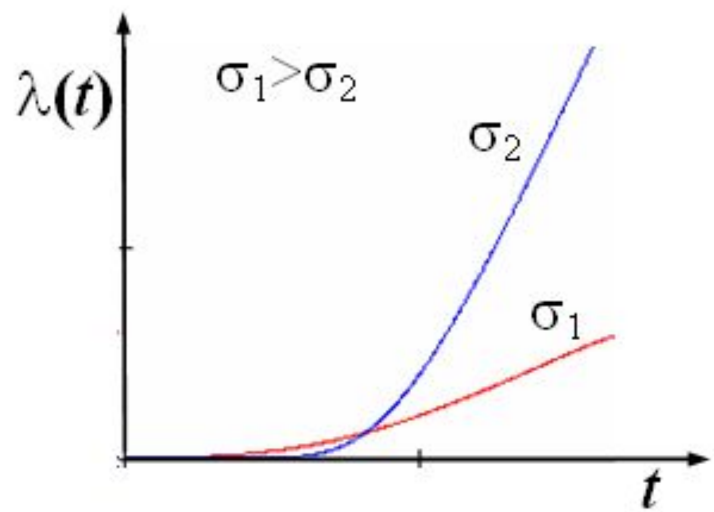
Основные характеристики распределения (продолжение)

Дисперсия времени наработки до отказа

$$D^*[\xi] = \left\{\sigma_\xi [1 - K_0^2 - K_0 m_\xi / \sigma_\xi]^{0,5}\right\}^2$$

где $K_0 = e^{-\frac{m_\xi^{\,2}}{2\sigma_\xi^{\,2}}}$,





2.2 Показатели безотказности объектов АО при экспоненциальном распределении

Случайная величина (СВ) ξ называется экспоненциально распределенной с параметром λ, если ее функция распределения имеет вид

$$F_\xi(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0,\ \lambda > 0.$$

Распределение имеет следующие характеристики:

– вероятность безотказной работы

$$P(t) = 1 - F_\xi(t) = e^{-\lambda t}$$

– плотность вероятности распределения СВ ξ

$$f_\xi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

– математическое ожидание СВ ξ : $M[\xi] = \int\limits_0^\infty t f_\xi(t)\,dt = \frac{1}{\lambda} = T_0$

– дисперсия СВ ξ: $$D[\xi] = M[t - T_0]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

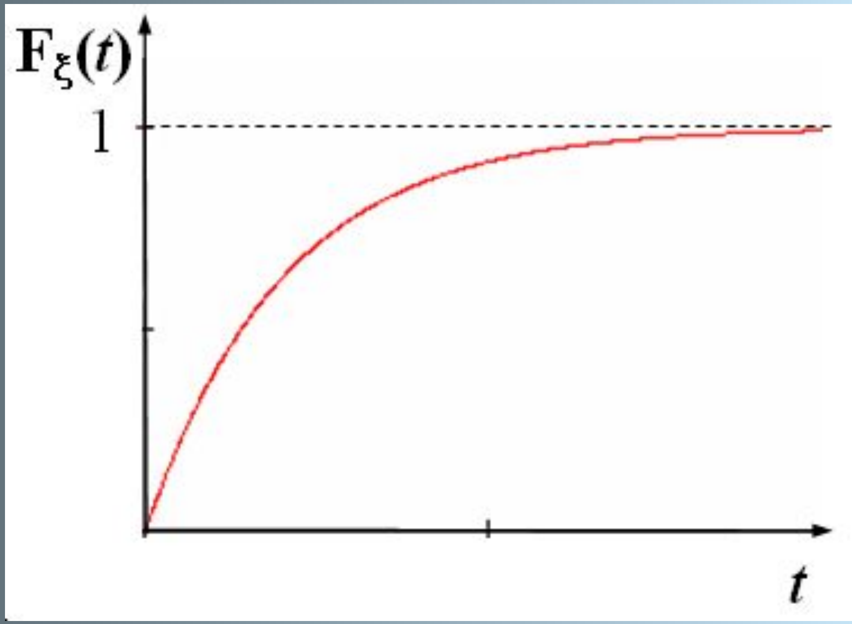
- СКО $$\sigma[\xi] = \frac{1}{\lambda}$$

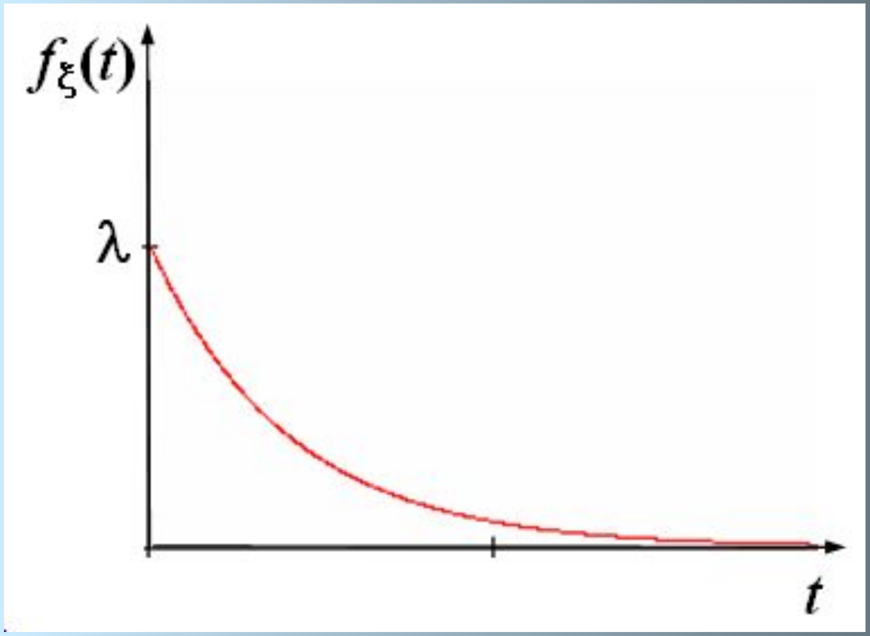
– интенсивность отказов $$\lambda(t) = \frac{f_\xi(t)}{P(t)} = \lambda = \frac{1}{T_0}.$$

Свойство экспоненциального закона распределения: вероятность безотказной работы на интервале $(t, t + \Delta t)$ не зависит от времени предшествующей работы t, а зависит только от Δt:

$$P(t, t + \Delta t) = \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t}$$

Функции для экспоненциального закона распределения

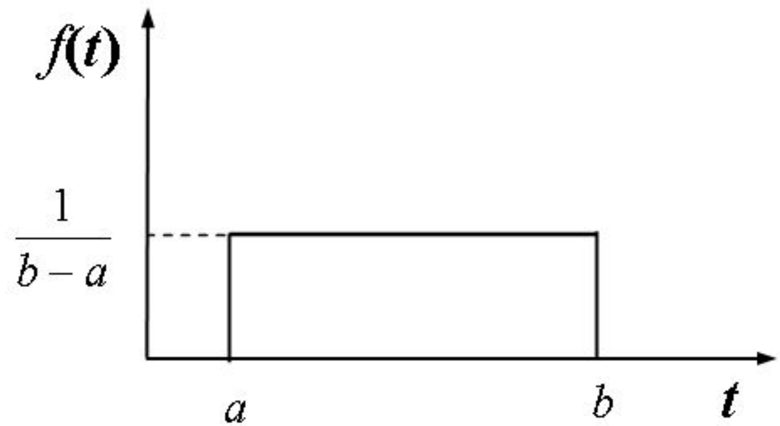




2.3. Показатели безотказности объектов АО при равномерном распределении

Случайная величина (СВ) ξ называется равномерно распределенной, если ее плотность распределения внутри интервала

(a, b) постоянна и равна нулю вне этого интервала.



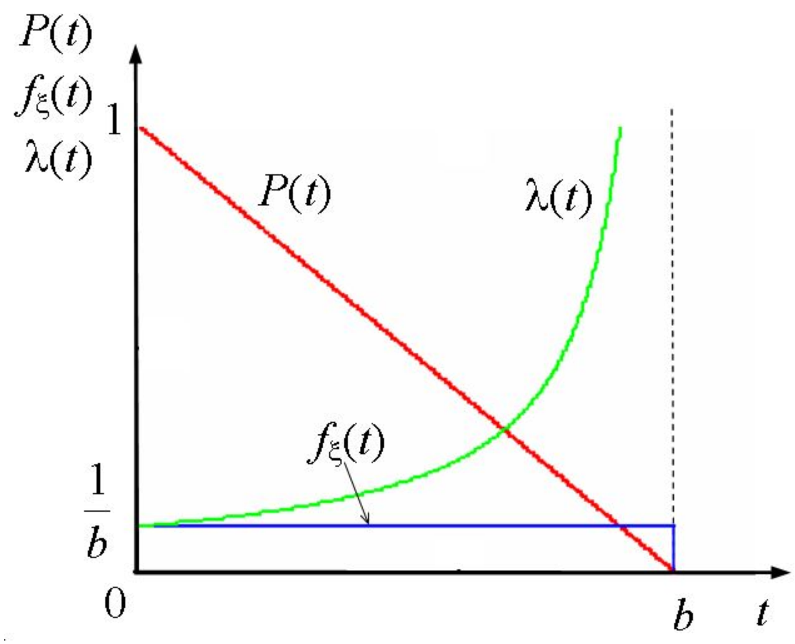
Характеристики распределения :

– плотность распределения СВ ξ

$$f_\xi(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \le a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a < t \le b; \\ 0, & \text{при } t > b; \end{cases}$$

– функция распределения СВ ξ:
$$F_\xi(t)=\begin{cases}0, & \text{при } t\le a;\\ \int\limits_a^t \dfrac{dt}{b-a}=\dfrac{t-a}{b-a}, & \text{при } a<t\le b;\\ 1, & \text{при } t>b.\end{cases}$$

При решении задач надежности принимают $a = 0$, т.е. $t\in(0,b)$ и $f_\xi(t)=0$, если $t\notin(0,b)$. В этом случае характеристики надежности имеют вид, показанный на рисунке



$$f_\xi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{b}, & \text{при } t\le b;\\ 0, & \text{при } t>b.\end{cases}$$

- функция распределения и вероятность безотказной работы

$$F_\xi(t)=\frac{t}{b};\qquad P(t)=1-\frac{t}{b};\quad t\in[0,b].$$

- математическое ожидание и дисперсия

$$\mathrm{M}[\xi]=\int_0^b\frac{t}{b}\,dt=\frac{b}{2}\qquad \mathrm{D}[\xi]=\int_0^b\frac{t^2}{b}\,dt-\frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{12}$$

- интенсивность отказов

$$\lambda(t)=\frac{f_\xi(t)}{P(t)}=\frac{1}{b-t}.$$

Равномерный закон распределения используется при моделировании надежности при априорной неопределенности параметров.

2.4. Показатели безотказности объектов АО при распределении Вейбулла-Гнеденко

Случайная величина (СВ) ξ распределена по закону Вейбулла-Гнеденко, если ее функция распределения имеет вид

$$F_\xi(t) = 1 - e^{-(t/a)^b}\ , \qquad a>0\ ,\ b>0.$$

При b=1 распределение является экспоненциальным с параметром

$\lambda=1/a$.

Характеристики распределения:

– вероятность безотказной работы: $P(t) = \overline{F}_\xi(t) = e^{-(t/a)^b}$

– плотность вероятности: $f_\xi(t) = \dfrac{dF_\xi(t)}{dt} = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{t}{a}\right)^{b-1} e^{-(t/a)b}$

– интенсивность отказов: $\lambda(t) = \dfrac{f_\xi(t)}{P(t)} = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{t}{a}\right)^{b-1} = \dfrac{b}{a^b}\,t^{b-1}$

– среднее время безотказной работы: $M[\xi] = a\Gamma(\frac{1}{b}+1)$,

где $\Gamma(\frac{1}{b}+1)$ – гамма-функция от параметра $(\frac{1}{b}+1)$ находится по таблице.

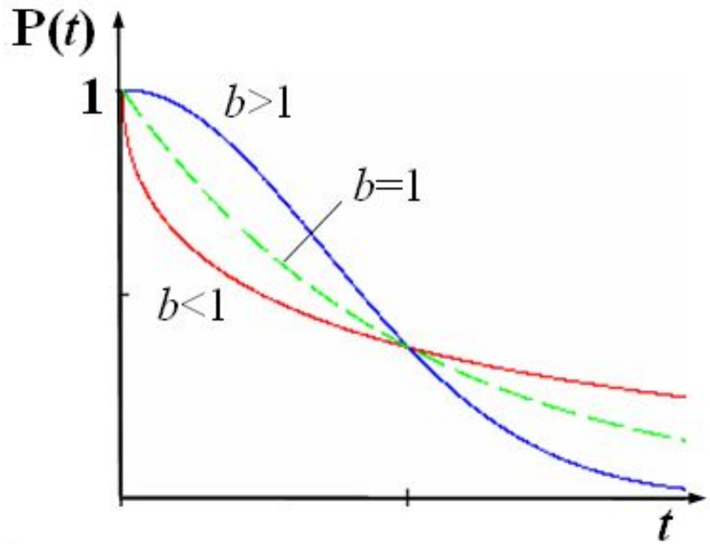
- дисперсия времени наработки до отказа

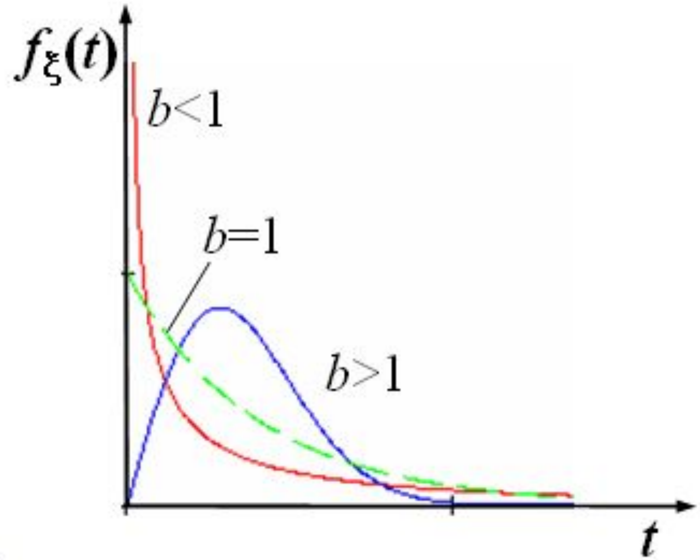
$$D[\xi] = a^2[\{\Gamma(\frac{2}{b}+1)\} - \{\Gamma\frac{1}{b}+1)\}^2]$$

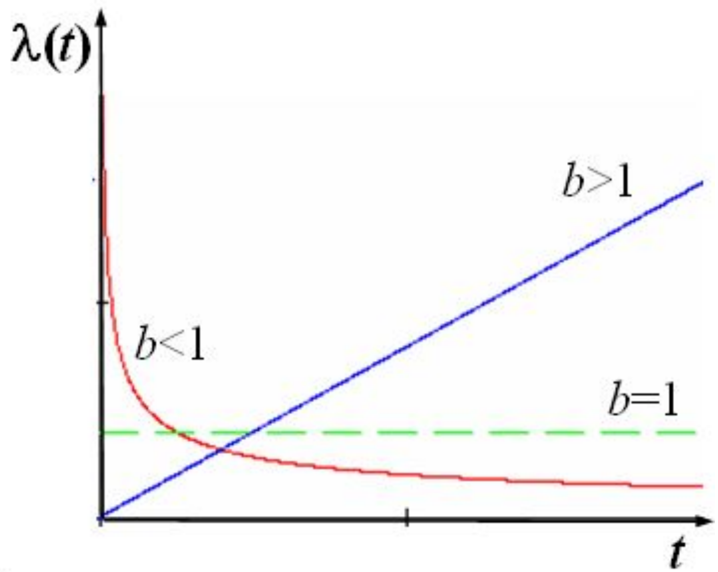
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1); \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi};$$

Областью применения распределения Вейбулла-Гнеденко являются стареющие объекты: гироскопические приборы, электродвигатели и некоторые типы полупроводниковых приборов.

$\lambda(0) = 0;$ при $b > 1$ $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$; при $b < 1$ $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$.







2.5 Показатели безотказности объектов АО при линейной интенсивности отказов

Случайная величина ξ при линейной интенсивности отказов $\lambda(t)=a_0+a_1 t$ имеет следующие характеристики:

– функция распределения

$$F_\xi(t) = 1 - e^{-(a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2})}$$

- вероятность безотказной работы

$$P(t) = e^{-(a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2})}$$

– плотность распределения времени безотказной работы

$$f_\xi(t) = (a_0 + a_1 t) e^{-(a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2})}$$

– средняя наработка до первого отказа

$$T_0 = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty e^{-(a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2})} dt \qquad (*)$$

Проведем в (*) замену переменных

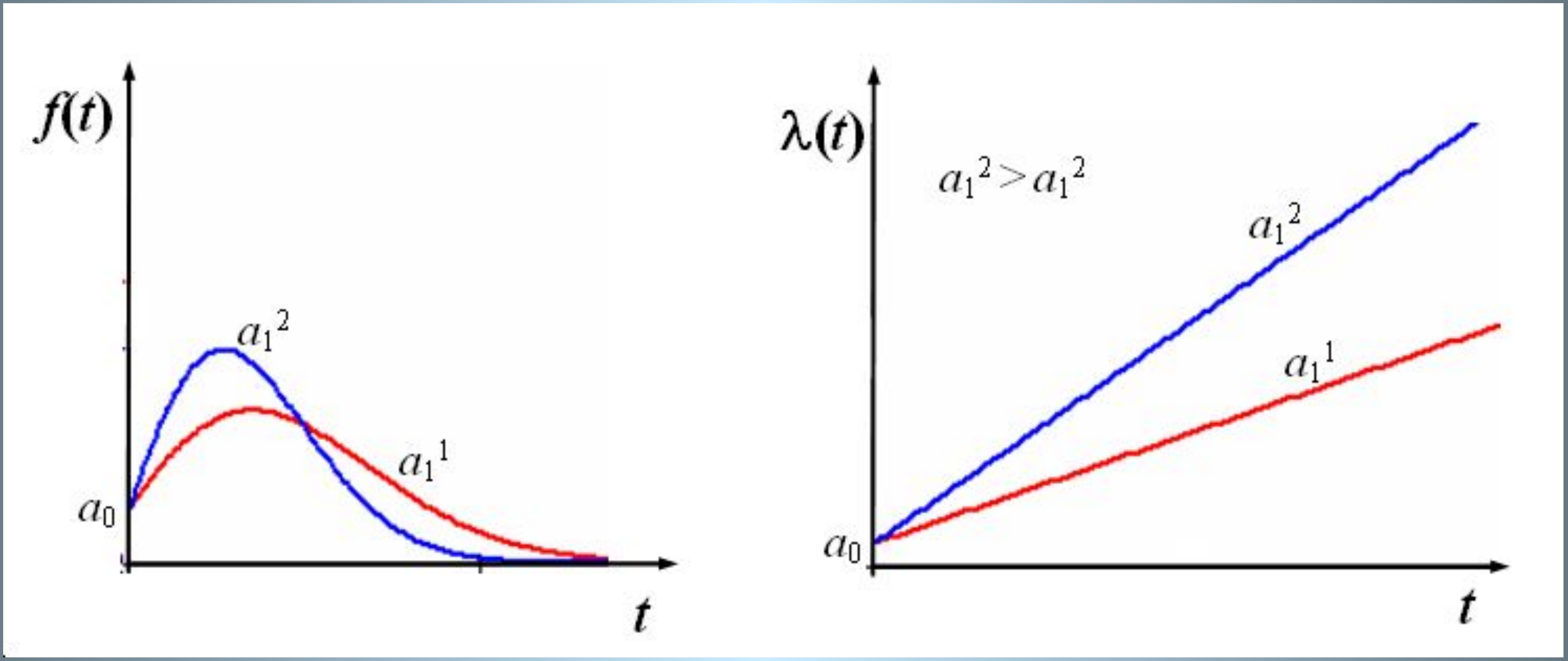
$$\left(\sqrt{\frac{a_1}{2}}t + \frac{a_0}{\sqrt{2a_1}}\right) = \frac{z}{\sqrt{2}} \qquad dz = \sqrt{a_1}\,dt$$

Тогда выражение (*) можно преобразовать к виду

$$T_0 = e^{\frac{a_0^2}{2a_1}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1}} \cdot \int\limits_{t+\frac{a_0}{\sqrt{a_1}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{a_1}} e^{\frac{a_0}{2a_1}} \left[1 - \Phi\left(\frac{a_0}{\sqrt{a_1}}\right)\right]$$

Используя таблицы для нормальной функции распределения, рассчитывается средняя наработка объекта до отказа.



f(t)
a_1^2
a_1^1
a_0
t
λ(t)
a_1^2 > a_1^2
a_1^2
a_1^1
a_0
t