Презентация по Математическому Анализу Семинар 35

Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Уравнение в полных дифференциалах

Если для дифференциального уравнения $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ (1)

выполнено тождество $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то уравнение **(1)** может быть записано в виде $dU(x,y)=0$

и называется уравнением в полных дифференциалах.

Общий интеграл уравнения **(1)** есть ***U(x, y)=C***.

Функция ***U(x, y)*** определяется по формуле:

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

Интегрирующий множитель

Если левая часть уравнения **(1)** е является полным дифференциалом и выполнены условия теоремы Коши, то существует функция $\mu = \mu(x,y)$ (интегрирующий множитель) такая, что

$$\mu(Pdx + Qdy) = dU \qquad (2)$$

Отсюда получаем, что функция $\mu = \mu(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

Интегрирующий множитель $\mu = \mu(x, y)$ легко находится в двух случаях:

$$1)\ \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F(x) \Rightarrow \mu = \mu(x);$$

$$2)\ \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F_1(y) \Rightarrow \mu = \mu(y);$$

Примеры с решениями:

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$$

<u>**Решение**</u> Это уравнение в полных дифференциалах, так как

.

$$\frac{\partial(3x^2 + 6xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial(6x^2 y + 4y^3)}{\partial x} = 12xy$$ и, следовательно, уравнение имеет вид ***dU=0***

Здесь $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2; \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3;$ отсюда

$$U = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

Дифференцируя ***U*** по ***y***, найдем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

(по условию);

отсюда $\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4 + C_0$

Окончательно получаем

$$U(x) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C_0$$

Следовательно,

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$$

есть искомый общий интеграл данного уравнения.

2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$$

Решение. Здесь

$$P(x,y) = e^x + y + \sin y; Q(x,y) = e^y + x + x\cos y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y$$

Следовательно, левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции

U(x,y), то есть $\frac{\partial U}{\partial x} = e^x + y + \sin y; \frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x + x\cos y$

Проинтегрируем $\frac{\partial U}{\partial x}$ по x: $U = \int (e^x + y + \sin y)dx + C(y) = e^x + xy + x\sin y + C(y)$

Найдем функцию ***C(y)****,* продифференцировав последнее выражение по ***y***:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + x\cos y + C'(y)$$

Получаем уравнение: $$x + x\cos y + C'(y) = x + x\cos x + e^y$$ откуда находим

$$C'(y) = e^y \Rightarrow C(y) = e^y$$

Таким образом, общий интеграл уравнения имеет вид

$$e^x + xy + x\sin y + e^y = C$$

3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(x + y + 1)dx + (e^y + x)dy = 0$$

<u>Решение</u>. Здесь $P(x,y) = x + y - 1; Q(x,y) = e^y + x;$ $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$

Таким образом, условие полного дифференциала выполнено, т.е. данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл по формуле $$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

Взяв $x_0 = 0; y_0 = 0$,
получим

$$\int_0^x (x+y-1)dx + \int_0^y e^y dy = C_1 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}x^2 + xy - x\right]_0^x + e^y\Big|_0^y = C_1$$

Подставляя пределы,
находим

$$\frac{1}{2}x^2 + xy - x + e^y - 1 = C_1 \Rightarrow e^y + \frac{1}{2}x^2 + xy - x = C, C = C_1 + 1$$

4. Решить уравнение

$$\left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

Решение. Здесь

$$P(x,y) = 2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}; Q(x,y) = x^2 + y^2; \Rightarrow \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow \mu = \mu(x)$$

Так как

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{d\mu}{dx} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx = dx \Rightarrow \ln\mu = x \Rightarrow \mu = e^x$$

Умножая уравнение на $\mu = e^x$
получим:

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0$$

уравнение в полных дифференциалах. Проинтегрировав его, будем иметь общий интеграл

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^3}{3}\right) = C$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Решить уравнения

a) $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dx = 0$

b) $(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0$

c) $(xy + \sin y)dx + (0{,}5x^2 + x\cos y)dy = 0$

d) $(x^2 + \sin y)dx + (1 + x\cos y)dy = 0$

e) $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$

f) $(\arcsin x + 2xy)dx + (x^2 + 1 + arctgy)dy = 0$

2. Проинтегрировать следующие уравнения, имеющие интегрирующий множитель, зависящий только от x или только от ***y***:

a) $ydx - xdy + \ln x dx = 0; (\mu = \mu(x))$

b) $(x^2 \cos x - y)dx + xdy = 0; (\mu = \mu(x))$

c) $ydx - (x + y^2)dy = 0; (\mu = \mu(y))$

d) $y\sqrt{1-y^2}\,dx + (x\sqrt{1-y^2} + y)dy = 0; (\mu = \mu(y))$