# Уравнения и функции Бесселя

Ожогова Екатерина ПМ2–1

**Дифференциальное уравнение вида**

$$x^2y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right)y(x) = 0, x > 0,$$

**называется уравнением Бесселя индекса ν. Уравнение Бесселя есть линейное уравнение второго порядка. Поэтому для его полного интегрирования достаточно два его частных линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$.**

**Функция, определяемая равенством**

$$J_\upsilon(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\upsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, x > 0,$$

**называется функцией Бесселя первого рода индекса** $\nu, \nu \in \mathbb{R}$.

- Функцию $J_\nu(x)$ называют функцией Бесселя первого рода индекса $\upsilon \geq 0$ (порядка $\upsilon$).

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \tilde{\psi}_\upsilon(x),$$

где

$$\tilde{\psi}_\upsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(\upsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Функция $J_{-\nu}(x)$ называется функцией Бесселя первого рода отрицательного индекса $-\upsilon$ ( $-\upsilon$ -ого порядка)

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \tilde{\psi}_{-\upsilon}(x),$$

где

$$\tilde{\psi}_{-\upsilon}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(-\upsilon+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

- Уравнение Бесселя — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Значит, его фундаментальная система решений состоит из двух линейно независимых решений. В качестве одного из них можно выбрать функцию $J_\upsilon(x)$ — функцию Бесселя первого рода индекса $\nu \geq 0$.

При индексе $\nu$, не равному целому числу, решение $y(x)$ уравнения Бесселя имеет вид

$$y(x) = \alpha_1 J_\upsilon(x) + \alpha_2 J_{-\upsilon}(x),$$

- Часто в качестве второго фундаментального решения вместо функции $J_{-\upsilon}(x)$ выбирают функцию Неймана, имеющую вид

$$N_{\nu}(x) = J_{\upsilon}(x)\operatorname{ctg}\pi\nu - \frac{1}{\sin\pi\nu}J_{-\upsilon}(x).$$

Тогда общее решение уравнения Бесселя представимо в виде

$$y(x) = \alpha_1 J_{\upsilon}(x) + \alpha_2 N_{\upsilon}(x).$$

- Если индекс $\nu$ равен целому числу $n$, то функции $J_\upsilon(x)$ и $J_{-\upsilon}(x)$ линейно зависимы. Тогда общее решение уравнения Бесселя находится с помощью функции Неймана, понимая под $N_\nu(x)$ следующий предел:

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(x).$$

Функция $N_\nu(x)$, определяемая соотношениями выше и на предыдущем слайде, называется также функцией Бесселя второго рода индекса $\nu$.