

25.05.20

Производная

Домашняя работа.

№ 39.34 а)

Дано: $y = 2x - 3$, $x_0 = 3$, $x_1 = 3,2$

Найти: прирост ф-ции.

Решение: $\Delta y = y(x_1) - y(x_0) \Rightarrow \Delta y = (2 \cdot 3,2 - 3) - (2 \cdot 3 - 3) = 3,4 - 3 = 0,4$

Ответ: $\Delta y = 0,4$

№ 39.35 а) $y = x^2 + 2x$

$x_0 = -2$, $x_1 = -1,9$

$\Delta y = y_1 - y_0 = x_1^2 + 2x_1 - x_0^2 - 2x_0 = 3,61 - 3,8 - 4 + 4 = -0,19$

№ 39.34

а) $y = 2x - 3$

$x_0 = 3$

$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$

$x_1 = 3,2$

1) $3,2 \cdot 2 - 3 = 3,4$

2) $3 \cdot 2 - 3 = 3$

3) $\Delta f = 3,4 - 3 = 0,4$

№ 39.36 а)

а) $y = \sin x$; $x_0 = 0$; $x_1 = \frac{\pi}{6}$

$f(x_1) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$f(x_0) = \sin 0 = 0$

$\Delta f = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} = 0,5$

№ 39.37
а) Дано: $y = 2 \sin x \cdot \cos x$, $x_0 = 0$, $x_1 = -\frac{\pi}{8}$

Найти: Δy

Решение: 1) $2 \sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow y = \sin 2x$. $\Delta y = y(x_1) - y(x_0)$
2) $\Delta y = \sin 2(-\frac{\pi}{8}) - \sin 2 \cdot 0 = -\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

N 39.43 b2

Dano: $y = f(x)$ $x \rightarrow x + \Delta x$ б) $f(x) = \frac{1}{x}$ 2) $f(x) = \sqrt{x}$

Найми: Δf

Решение: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$б) \Delta f = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$2) \Delta f = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

N 39.44 b2

Dano: $y = f(x)$ $x \rightarrow x + \Delta x$ б) $f(x) = \frac{1}{x}$ 2) $f(x) = \sqrt{x}$

Найми: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

Решение: б) 1) Найдем Δf (см 39.43 б)

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x) \cdot \Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

2) 1) Найдем Δf (см 39.43 2)

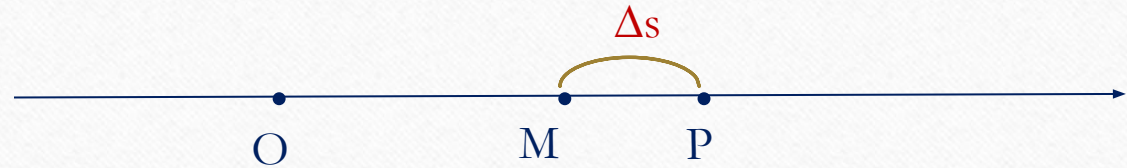
$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}) \cdot \Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

II. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 1. О скорости движения

Пусть вдоль некоторой прямой движется тело по закону $s = s(t)$, где s - пройденный путь, t - время, и необходимо найти скорость движения тела в момент t .

Пусть в момент времени t тело находится в точке M , пройденный путь будет $OM = s(t)$.



Тогда в момент времени $(t + \Delta t)$ тело переместится в точку P ; путь $OP = s(t + \Delta t)$. Получается, что за Δt тело прошло путь $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$.

Тогда за промежуток Δt средняя скорость будет $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Когда $\Delta t \rightarrow 0$, $P \rightarrow M$ и $v_{\text{ср}} \rightarrow v_{\text{мгн.}}$

Мгновенная скорость ($v_{\text{мгн.}}$, скорость в момент времени t) - это предел средней скорости за промежуток времени Δt при условии, что $\Delta t \rightarrow 0$.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

II. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 2. О касательной

Геометрический смысл приращения функции

$$y = kx + b$$

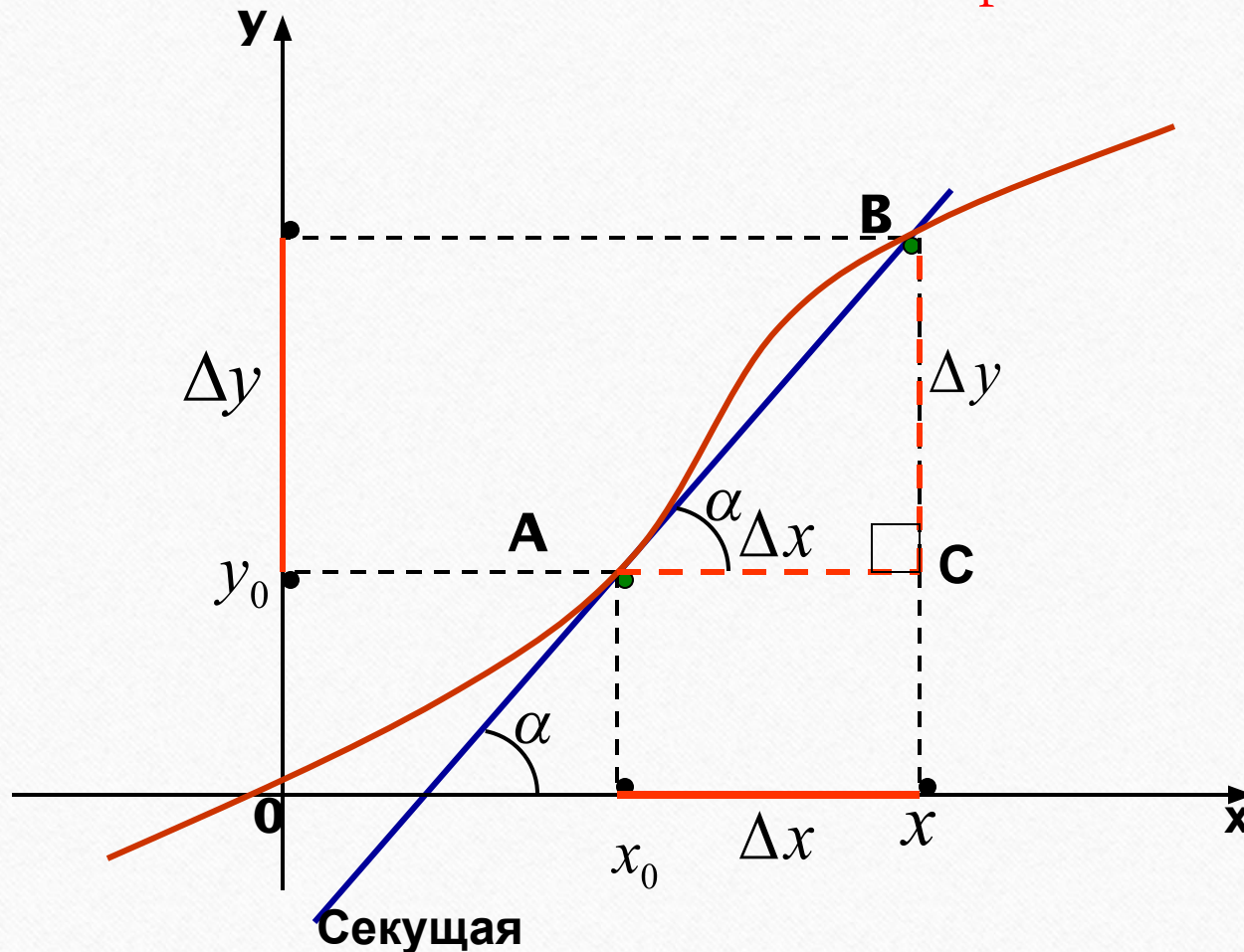
k – угловой коэффициент прямой (секущей)

$$\text{Знаем: } k = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Таким образом,

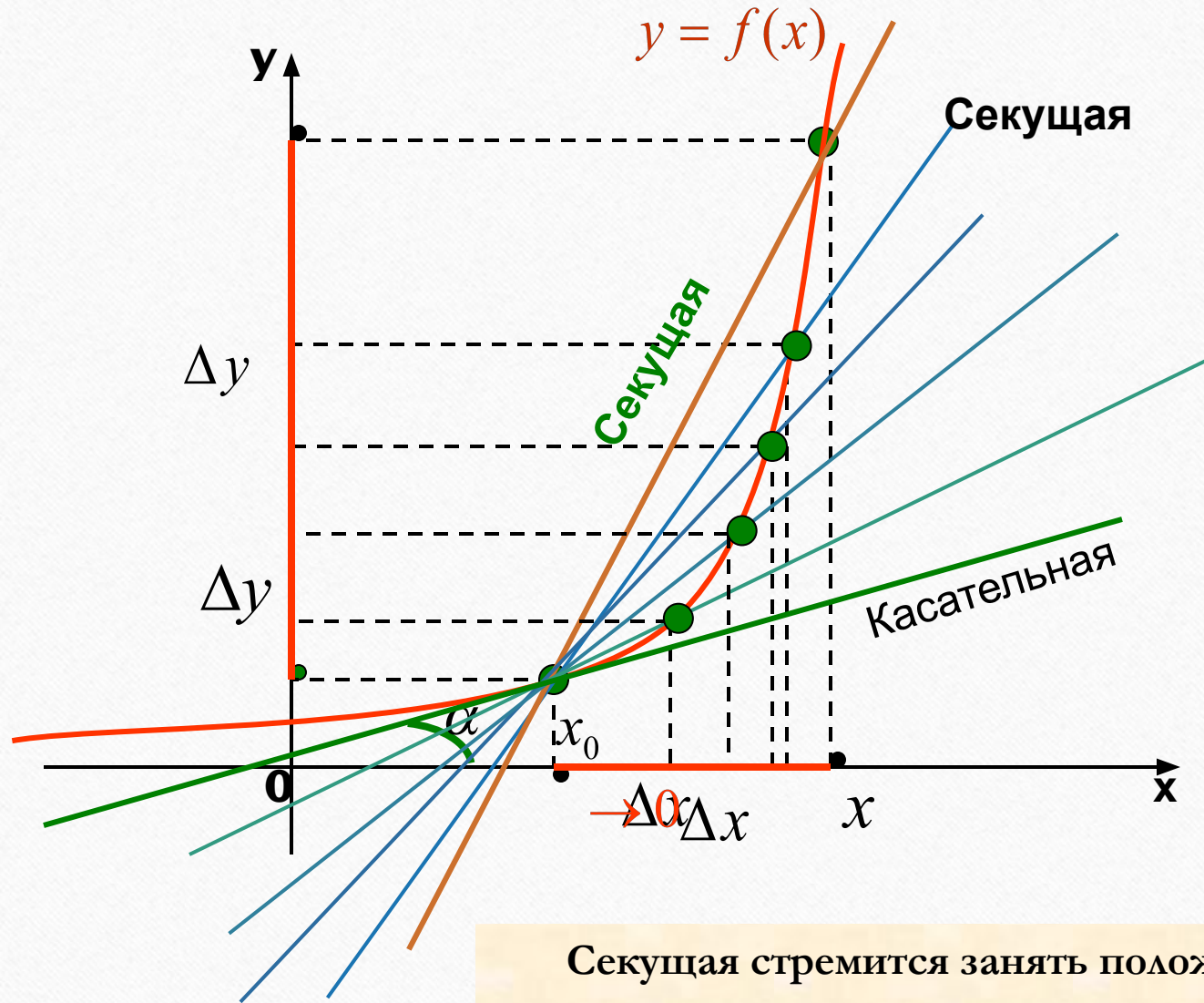
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k$$



Отношение приращения функции к приращению аргумента равно тангенсу угла наклона секущей к положительному направлению оси Ox .

II. Задачи, приводящие к понятию производной

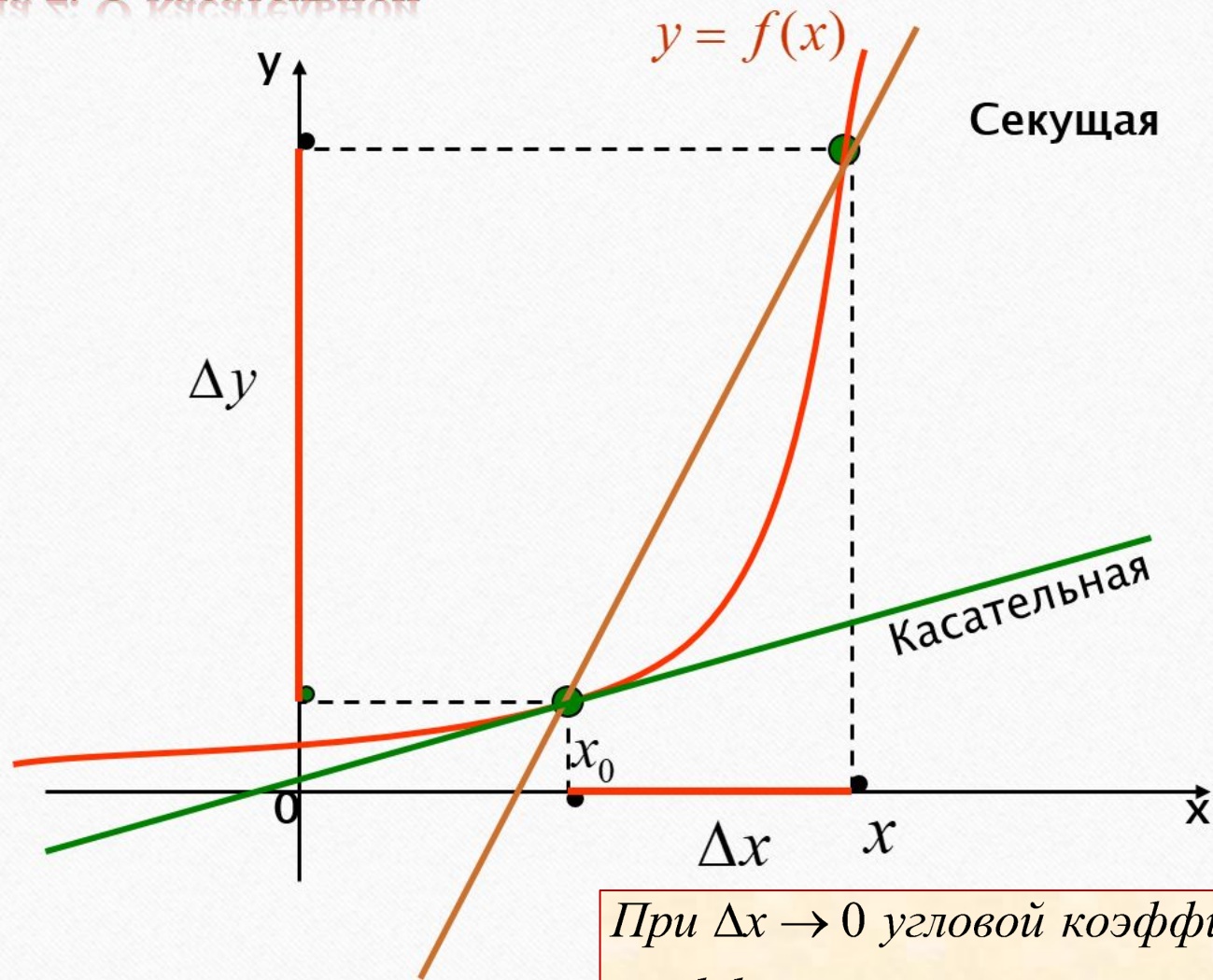
Задача 2. О касательной



Секущая стремится занять положение касательной. То есть, касательная есть предельное положение секущей.

II. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 2: О касательной



$$y = kx + b$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ $k_{\text{кас}} \rightarrow k_{\text{сек}}$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ угловой коэффициент секущей \rightarrow к угловому коэффициенту касательной.

II. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 3. О скорости химической реакции

Пусть некоторое вещество вступает в химическую реакцию. Количество этого вещества Q изменяется в течение реакции в зависимости от времени t и является функцией от времени.

Пусть за время Δt количество вещества изменяется на ΔQ , тогда отношение $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ будет выражать среднюю скорость химической реакции за время Δt .

Предел этого отношения $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ - это скорость химической реакции в данный момент времени t .

Задача 4. О скорости радиоактивного распада

Если m - масса радиоактивного вещества и t - время, то явление радиоактивного распада в момент времени t при условии, что масса радиоактивного вещества с течением времени уменьшается, характеризуется функцией $m = m(t)$.

Средняя скорость распада за время Δt выражается отношением $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m(t_0 + \Delta t) - m(t_0)}{\Delta t}$,

а мгновенная скорость распада в момент времени t - $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$

III. Определение производной

Вышеприведенные задачи приводят к одному и тому же выводу – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

$$k_{\text{ср}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{ср}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

1) Пусть $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой ее окрестности.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy (Δf) в этой точке к приращению аргумента Δx , при стремлении приращения аргумента к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2) Обозначение. Производную функции $y = f(x)$ обозначают $f'(x)$, или $y'(x)$, или y' (говорят: «эф штрих от икс», «игрек штрих от икс»).

3) $y' = f'(x)$ – это новая функция, связанная с функцией $y = f(x)$, определенная во всех точках, в которых существует указанный предел.

III. Определение производной

4) Если $f(x)$ имеет производную в точке x , то функцию называют **дифференцируемой** в этой точке.

Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**.

5) Алгоритм вычисления производной $f'(x)$

1. Найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

2. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Найти предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$ (если этот предел существует).

Примеры.

1. Дано: $y = kx + b$.

Найти: y' .

Решение: (см. пример 6 из предыдущей лекции)

$$1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$$

$$2) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = k.$$

$$(kx + b)' = k$$

2. Дано: $y = x^3$.

Найти: y' .

Решение: (см. пример 5 из предыдущей лекции)

$$1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$$

$$2) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + \underbrace{3x\Delta x}_0 + \underbrace{\Delta x^2}_0) = 3x^2$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

III. Определение производной

Пример 3.

$$(kx + b)' = k$$

$$(2x + 3)' = 2$$

$$(4x - 1)' = 4$$

$$(x + 5)' = 1$$

$$(3 - x)' = -1$$

$$(-2 - 5x)' = -5$$

$$(7x)' = 7$$

$$(-0,3x)' = -0,3$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}$$

$$(x)' = 1$$

$$(-x)' = -1$$

$$(x)' = 1$$

$$(-x)' = -1$$

5. Дано: $y = C$.

Найти: y' .

Решение: 1) Найдем Δy : $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$

$$\Delta y = C - C = 0$$

$$2) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

$$C' = 0$$

$$(2)' = 0, (-1,5)' = 0$$

Пример 4.

4. Дано: $y = x^2$.

Найти: y' .

Решение: 1) Найдем Δy : $\Delta y = y_1 - y_0 = y(x + \Delta x) - y(x)$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$$

$$2) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$(x^2)' = 2x$$

6. Дано: $y = \frac{1}{x}$.

Найти: y' .

Решение: 1) Воспользуемся № 39.44 в (ДОМ.)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(x + \Delta x)}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

III. Определение производной

7. Дано: $y = \sqrt{x}$.

Найти: y' .

Решение: 1) Воспользуемся № 39.44 г (дом.)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

IV. Таблица производных

$f(x)$	C	x	$kx + b$		x^3	x^n			...
$f'(x)$	0	1	k	2x		nx^{n-1}			...