ЛЕКЦИЯ 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ.

Понятие числовой функции
Способы задания функции
Характеристики функций
Основные элементарные функции
Предел функции
Односторонние приделы
Теоремы о пределах функции
Замечательные приделы
Бесконечно малые и бесконечно большие величины
Примеры

ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ

- Понятие функции является одним из основных математических понятий, оно связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.
- Пусть даны два непустых множества действительных чисел X и У. Соответствие f, которое каждому данному числу $x \in X$ сопоставляет **одно и только одно** число $y \in Y$, называется **числовой функцией** и записывается $y = f(x)$
- Говорят еще, что функция f *отображает* множество *X* на множество У.

ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ

- Переменная *x* называется **аргументом функции** или независимой переменной, а у — **значением функции** или зависимой переменной (от x). Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в **функциональной зависимости**.
- Множество X называется **областью определения** функции f и обозначается *D(f).* Множество всех *y* называется **множеством значений** функции f и обозначается *E(f)*
- Если переменные x и y рассматривать, как декартовы координаты, то **графиком функции** *y = f(x)* называется множество точек координатной плоскости OXY с координатами (x,y).

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

- Основные формы **аналитического способа** задания функции
- 1) **явная форма:** функция задается в виде одной или нескольких формул, например

$$y = (\sqrt{x} - 1)^2 \text{ или } y = \begin{cases} 1, \text{если } x > 0 \\ -1, \text{если } x < 0 \\ 0, \text{если } x = 0 \end{cases}$$

- 2) **неявная форма:** функция задается в виде уравнения, например xy-1=0
- 3) **параметрическая форма:** значения x и y выражаются через третью величину, называемую параметром, например x=sin t, y=cos t

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

- **Табличный способ**: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.
  На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.
- **Графический способ**: задается график функции. Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком — его неточность

ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

- Функция y = f(x), определенная на множестве D, называется **четной**, если для любого x ∈ D выполняются условия -x ∈ D и f(-x)=f(x);
- **нечетной**, если для любого x ∈ D выполняются условия -x ∈ D и f(-x)=f(x).
- График четной функции симметричен относительно оси Оу, а нечетной — относительно начала координат.
- Например, $y = x^2$; $y = \sqrt{1 + x^2}$; $y = \ln|x|$; — четные функции;
- $y = \sin(x)$; $y = x^3$ — нечетные функции;
- y = x — 1, $y = \sqrt{x}$ — функции общего вида, т. е. не четные и не нечетные

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

- Функция $y = f(x)$, определенная на множестве *D*, называется **периодической** на этом множестве, если существует такое число $T > 0$, что при каждом $x \in D$ значение $(x + T) \in D$ и $f(x + T) = f(x)$.
- При этом число T называется **периодом** функции .
- Если T - период функции, то ее периодами будут также числа kT. где k== ±1; ±2, ...
- Например, для f= sinx периодами будут числа ±2π; ±4 π; ±6 π, ...**Основной** период (наименьший положительный) - это период = 2 π.

ОГРАНИЧЕННАЯ ФУНЦИЯ

- Функция f(x) называется **ограниченной сверху**, если существует такое число M, что для всех значений x∈D выполняется неравенство f(x)≤M, и **ограниченной снизу**, если существует такое число m, что для всех значений x∈D выполняется неравенство f(x)≥m,
- Функция, ограниченная и сверху и снизу, называется **ограниченной**
- Например, $f(x)=x^2$ ограничена снизу, (m=0) и не ограничена сверху,
- $f(x) = -x^2$ ограничена сверху (M=0) и не ограничена снизу.
- $f(x)= sin(x)$ ограничена сверху M=1 и снизу m=-1

МОНОТОННАЯ ФУНКЦИЯ

- Пусть функция f(x) определена на интервале (a,b);
- Функция f(x) называется **возрастающей** на (a,b), если для любой пары значений $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (a, b)$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$
- Если из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция называется **неубывающей**
- Функция f(x) называется **убывающей** на (a,b), если для любой пары значений $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (a, b)$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$
- Если из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция называется **невозрастающей**
- Возрастающие, не возрастающие, убывающие и неубывающие функции называются **монотонными**

ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

- Пусть функция *y=f(x)* - числовая функция с областью определения D(f) и множеством значений E(f)
- Для любого $y_0 \in E(f)$ в множестве D(f) найдется хотя бы одно значение $x=x_0$ такое, что $f(x_0)=y_0$.
- Если y=f(x) непрерывная и строго монотонная, то это значение x_0 единственное
- Соответствие, относящее каждому числу $y_0 \in E(f)$ единственное число $x_0 \in D(f)$, называют функцией, обратной к функции f, обозначают символом f^{-1} и пишут $x=f^{-1}(y)$
- Чтобы найти функцию, обратную данной, нужно решить уравнение *f* (x) = y относительно x.
- Примеры.
  1. Для функции y= 2x обратной функцией является функция $x=\frac{1}{2}y$:
  2. Для функции $y=x^2$, $x \in [0,\infty)$ обратной функцией является $x=\sqrt{y}$

СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

- Если функция $x=f^{-1}(y)$ является обратной для функции $y=f(x)$, то функция $y=f(x)$ будет обратной для функции $x=f^{-1}(y)$.

  Т.е. функции $y=f(x)$ *и* $x=f^{-1}(y)$ являются **взаимно обратными**.

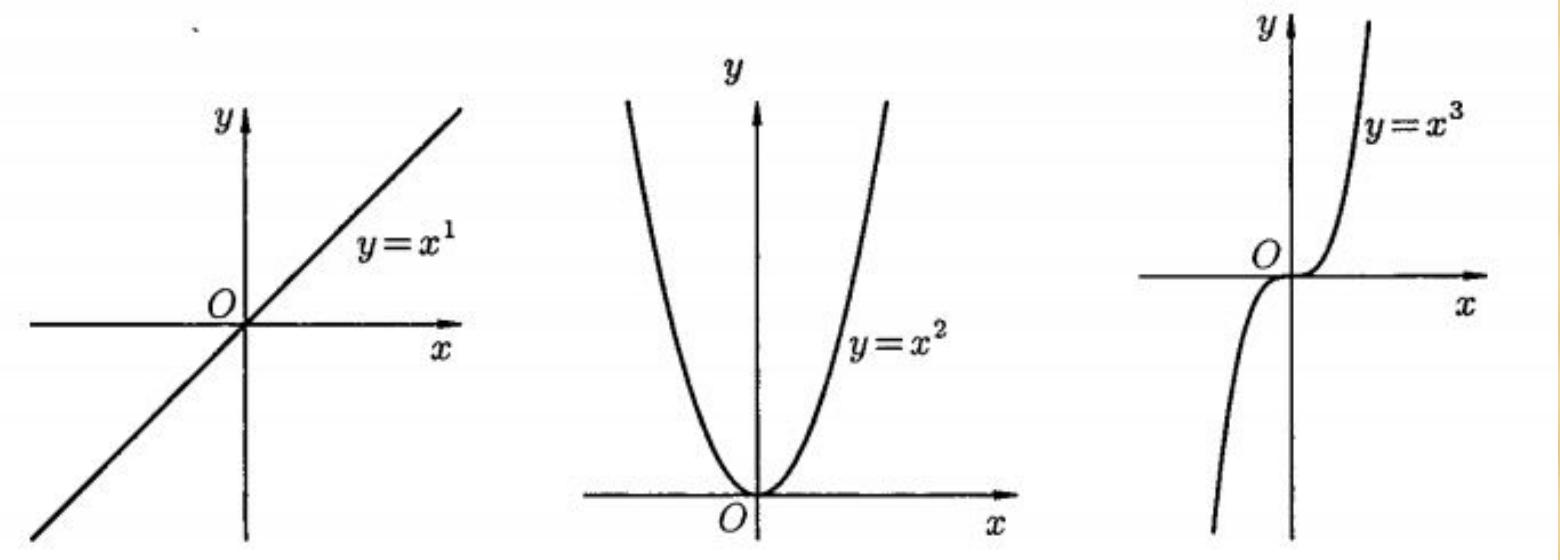
- Область определения функции $y=f(x)$ является множеством значений функции $x=f^{-1}(y)$, *а множество значений* функции $y=f(x)$ **-** областью определения функции $x=f^{-1}(y)$
- Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов координатной плоскости OXY

СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ

- Пусть $y=f(x)$ – числовая функция с областью определения D(f) и множеством значений E(f), а $z=g(y)$ – числовая функция с областью определения E(f) и множеством значений E(g)
- Соответствие, которое каждому данному числу $x \in D(f)$ сопоставляет единственное число $y \in E(f)$, а этому числу y - единственное число $z \in E(g)$, называется **сложной функцией** (или **суперпозицией заданных функций,** или **функцией от функции**) и записывается $z = g(f(x))$
- Например , функция z=sin 2x есть суперпозиция двух функций z=sin y и y=2x

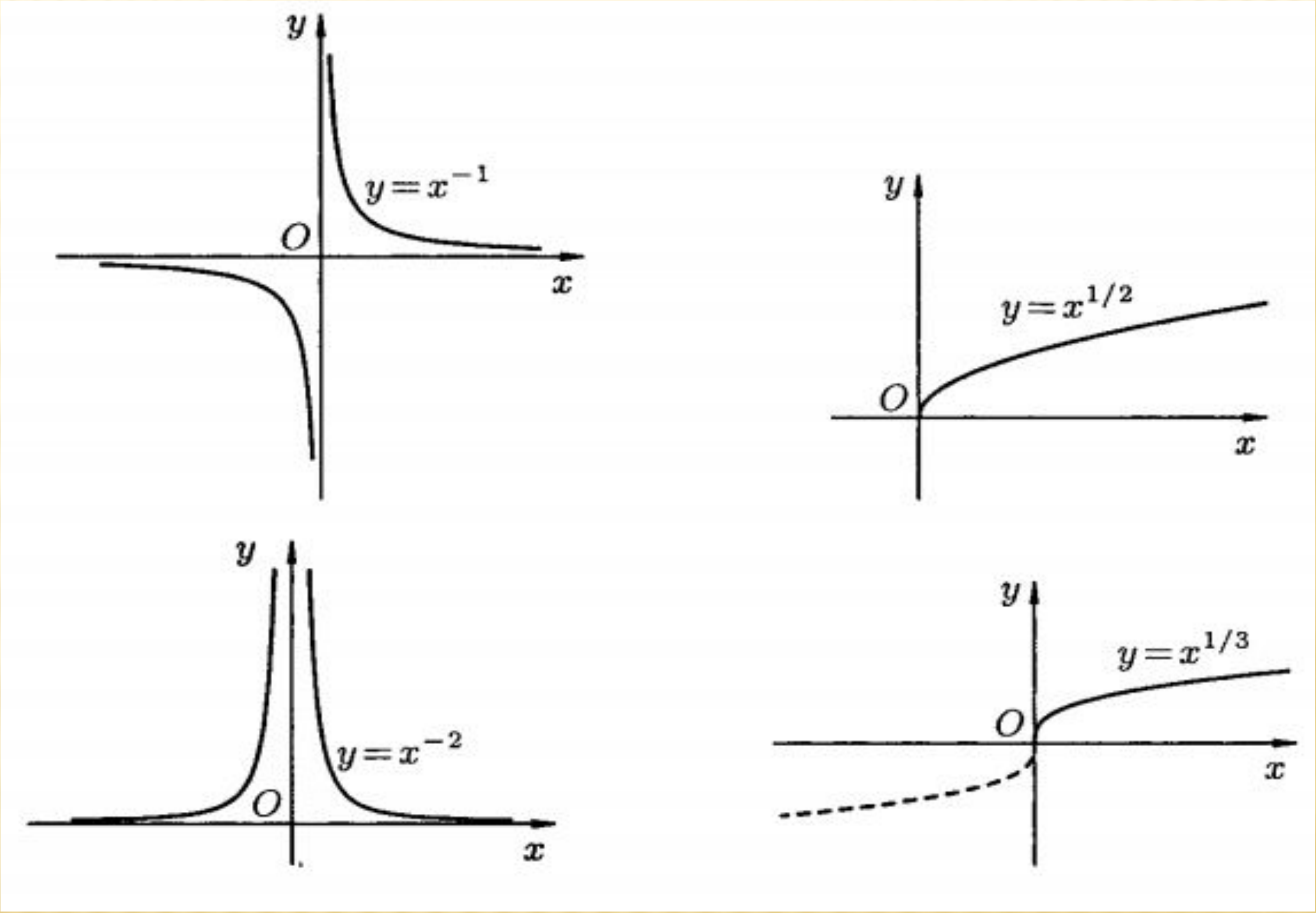
ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

- *Степенная* функция $y = x^a$



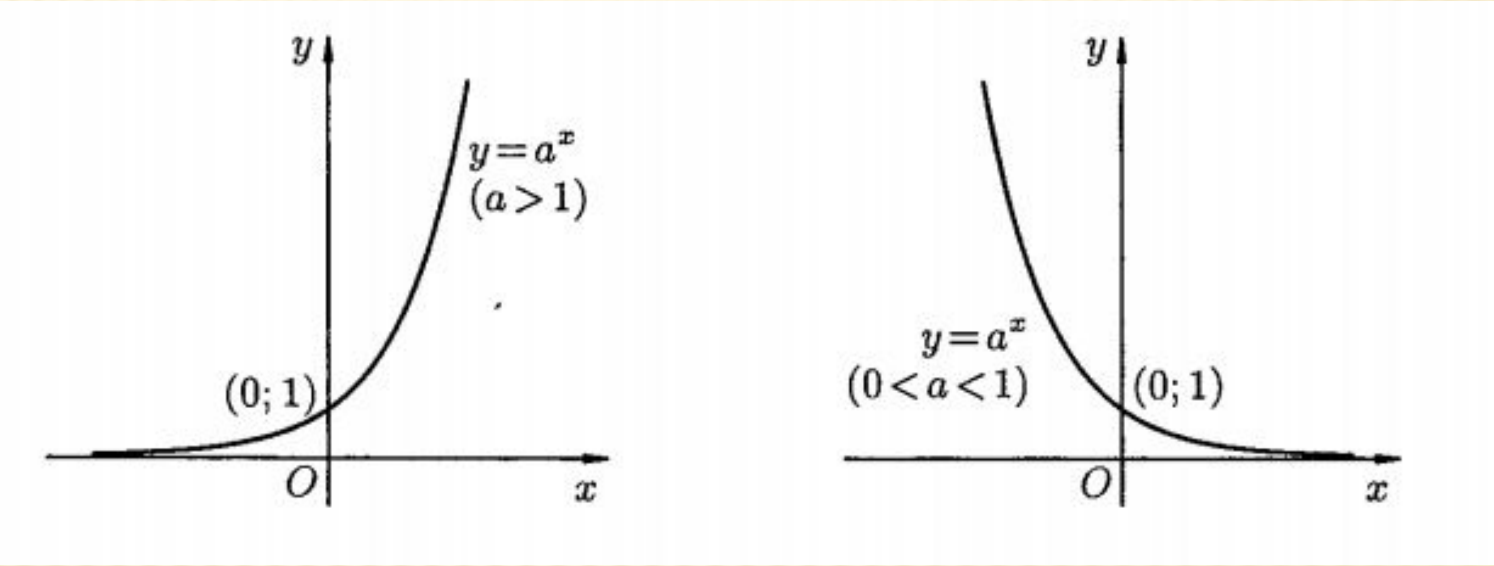
ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

- *Степенная* функция $y = x^a$



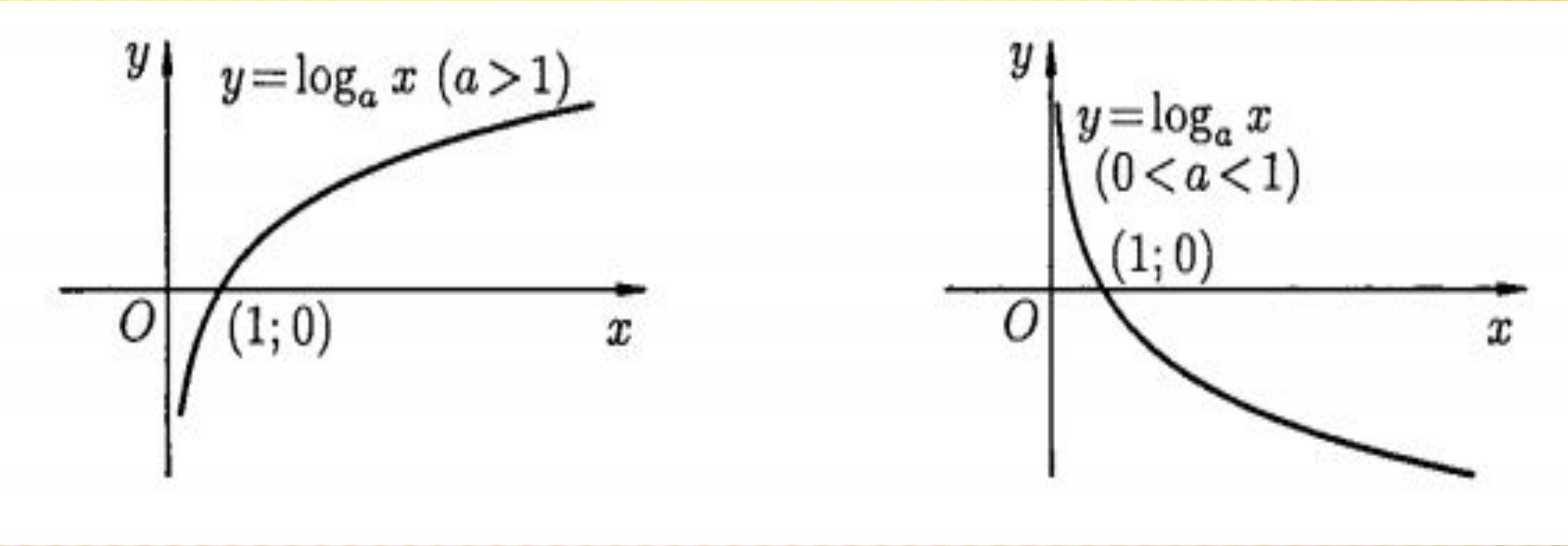
ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

- ***Показательная*** функция $y = a^x, a > 0, a \neq 1$



ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

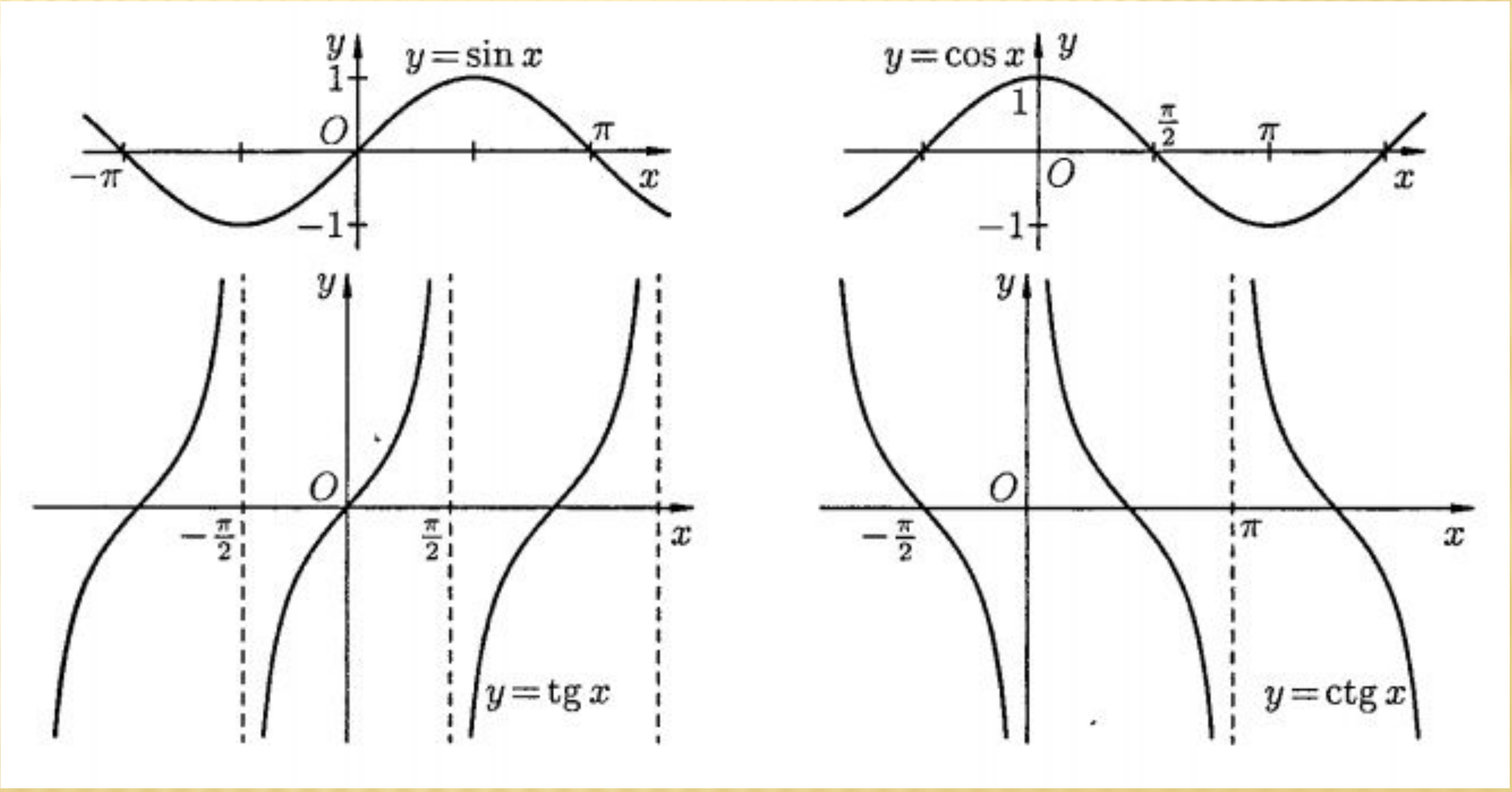
- *Логарифмическая* функция $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$



ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

- ***Тригонометрические*** функции

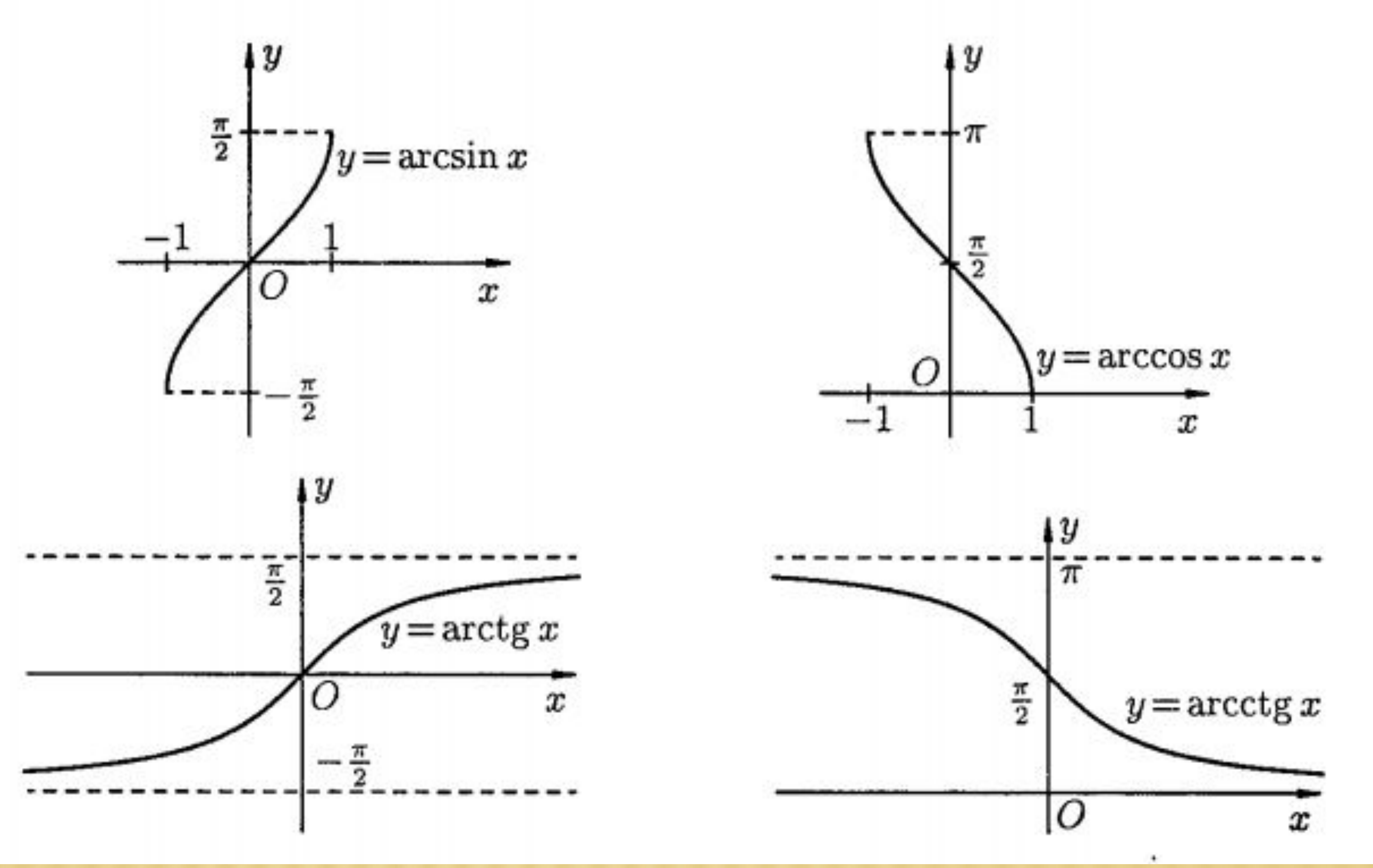
  y=sin x, y=cos x, y=tg x, y=ctg x



ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

- ***Обратные тригонометрические*** функции

  y=arcsin x, y=arccos x, y=arctg x, y=arcctg x



ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ФУНКЦИЯ

- \- эта функция, задаваемая одной формулой , составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и суперпозиций функции
- Примеры элементарных функций

$$y = (\sqrt{x} - 1)^2 \; ; y = \ln(2 + x^3) \; ; y = \sin 2x - \ln x$$

- Примеры неэлементарных функций

$$y = \begin{cases} 1, \text{если } x > 0 \\ -1, \text{если } x < 0 \\ 0, \text{если } x = 0 \end{cases}$$

$$y = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \dots$$

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ (ПО ГЕЙНЕ)

- Пусть функция **f(x)** определена во всех точках промежутка (a,b). Построим последовательность значений аргумента функции f(x) x_1, x_2, x_3..... такую, чтобы все $x_n \in (a,b)$ и последовательность сходилась к $x_0 \in (a,b)$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

- Тогда значения функции **f(x)** тоже образуют числовую последовательность **$f(x_1), f(x_2), f(x_3)$.....**
- Число А является **пределом функции f(x)** при x, стремящемся к x_0, если для любой последовательности значений аргумента, сходящихся к x_0, последовательность значений функции сходится к числу А

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \mathbf{A}$$

ГЕНРИХ ЭДУАРД ГЕЙНЕ (*HEINRICH EDUARD HEINE*)

- (1821-1881) — немецкий математик. Ученик Дирихле.
- Изучал математику в Гёттингенском университете, Берлинском университете и в Альбертине в Кёнигсберге, был профессором математики

  в Бонне и в Галле.
- Занимался теорией потенциала, теорией функций и дифференциальными уравнениями

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ (ПО КОШИ)

- Число А является **пределом функции f(x)** при x, стремящемся к x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \mathbf{A}$$

- если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех x ∈ (a,b), удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ (ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ ∞)

- Пусть функция f(x) определена на интервале (- ∞,+ ∞)
- Число А является **пределом функции f(x)** при x, стремящемся к + ∞,

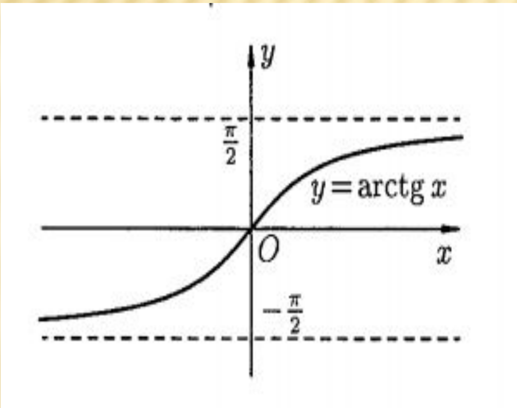
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

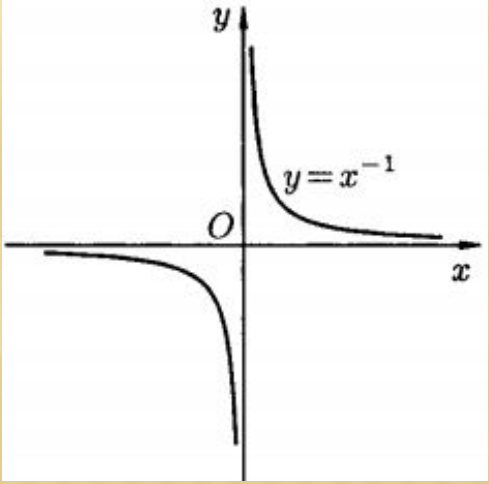
если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число Δ, зависящее от ε, что для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$x > \Delta$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$





ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ (ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ ∞)

- Функция f(x) стремится к + ∞, при стремлении x к x_0,

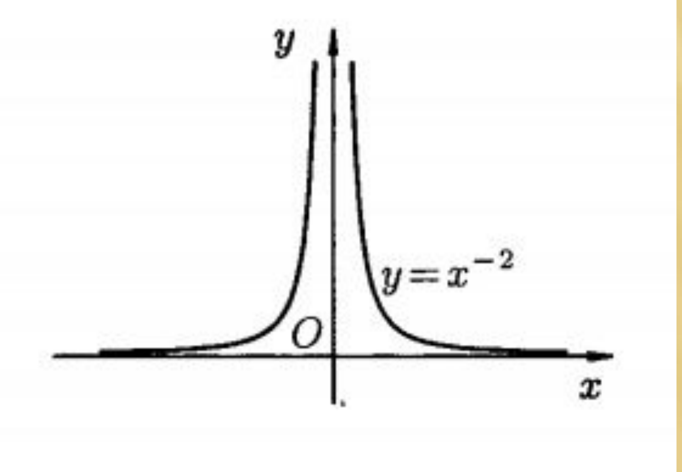
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

если для любого сколь угодно большого положительного числа Е найдется такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

выполняется неравенство

$$f(x) < E$$



ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

- В определении предела функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0. Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции.
Поэтому вводят понятия односторонних пределов

ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

- Пусть f(x) определена на (a,x_0) .Число A_1 является **левым пределом функции f(x)** при x, стремящемся к x_0 слева

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$$

если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех $x \in (a,x_0)$, удовлетворяющих неравенству $x_0 - x < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$

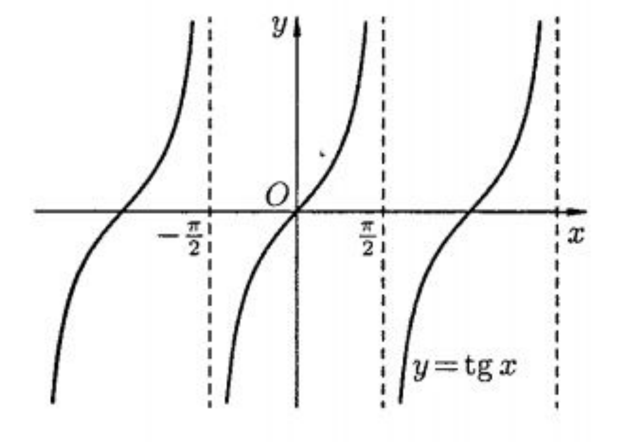
- Пусть f(x) определена на (x_0,b). Число A_2 является **правым пределом функции f(x)** при x, стремящемся к x_0 справа

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$$

если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех $x \in (x_0,b)$, удовлетворяющих неравенству $x - x_0 < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$

ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

- Пределы функции слева и справа называются **односторонними** пределами.
- Очевидно, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \mathbf{A}$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$
- Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$ и они равны, то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \mathbf{A}$
- Если же $A_1 \neq A_2$, то предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \mathbf{A}$ не существует



ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ

- 1) Функция может иметь только один предел
- 2) Если функции f(x) и g(x) имеют пределы при $x \to a$, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ также имеют пределы при $x \to a$, причем

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМ О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ

- 1) Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0}\left(cf(x)\right) = c\lim_{x\to x_0} f(x)$$

- 2) Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n=(\lim_{x\to x_0} f(x))^n,$$

в частности

$$\lim_{x\to x_0} x^n = {x_0}^n,$$

ПРИМЕР 1

- Вычислить предел

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x^2+5}{2x^2-x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}x^3+3x^2+5}{\lim\limits_{x\to1}2x^2-x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}x^3+\lim\limits_{x\to1}3x^2+\lim\limits_{x\to1}5}{\lim\limits_{x\to1}2x^2-\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to1}x^3+3\lim\limits_{x\to1}x^2+5}{2\lim\limits_{x\to1}x^2-\lim\limits_{x\to1}x+2}=\frac{(\lim\limits_{x\to1}x)^3+3(\lim\limits_{x\to1}x)^2+5}{2(\lim\limits_{x\to1}x)^2-1+2}=\frac{1+3+5}{2-1+2}=\frac{9}{3}=3$$

- Использованы теоремы о пределе частного, суммы, произведения

ПРИМЕР 2

- Вычислить предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x^2-9)}{x^2+x-3x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+3)(x-3)}{x(x+1)-3(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+3)}{x+1}=\frac{12}{4}=3$$

- Числитель и знаменатель разложены на множители, дробь преобразована, затем использованы теоремы о пределе частного, суммы, произведения

ПРИМЕР 3

- Вычислить предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{\sqrt{2x}-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)(\sqrt{2x}+2)}{2x-4}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{2x}+2\right)=4$$

- Числитель и знаменатель дроби умножен на выражение, сопряженное знаменателю, дробь преобразована, затем использованы теоремы о пределе частного, суммы, произведения

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

- В теории пределов важное место занимают следующие пределы, с помощью которых вычисляются многие пределы от элементарных функций:
- $1)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- $2)\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$
- $3)\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e\,, \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$
- $4)\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a\,,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,$
- $5)\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$

ПРИМЕР 4

- Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 3x}{\sin x-\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+3\sin x-4\sin^3 x}{\sin x-2\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x(1-\sin^2 x)}{\sin x(1-2\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos x}{1-2\cos x}=\frac{4}{-1}=-4$$

- Использованы тригонометрические формулы двойного и тройного угла, преобразование дроби и первый замечательный придел

БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

- Функция f(x) называется **бесконечно большой функцией** (ББФ) при $x \to a$, если для любого сколь угодно большого положительного числа Е найдется такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - a| < \delta$$

выполняется неравенство

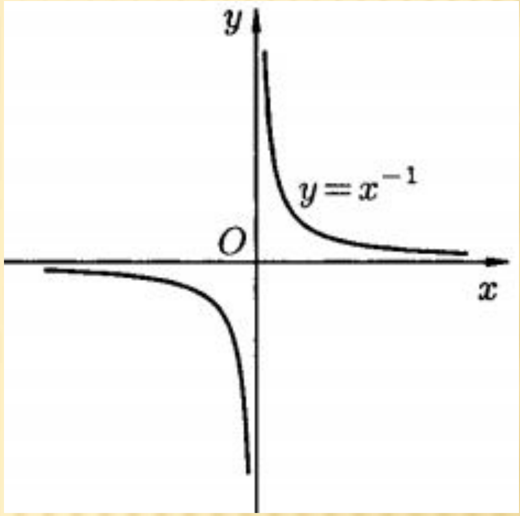
$$|\mathrm{f(x)}| < \mathrm{E}$$

- Т.е. если f(x) стремится к $\pm\infty$, при стремлении x к a

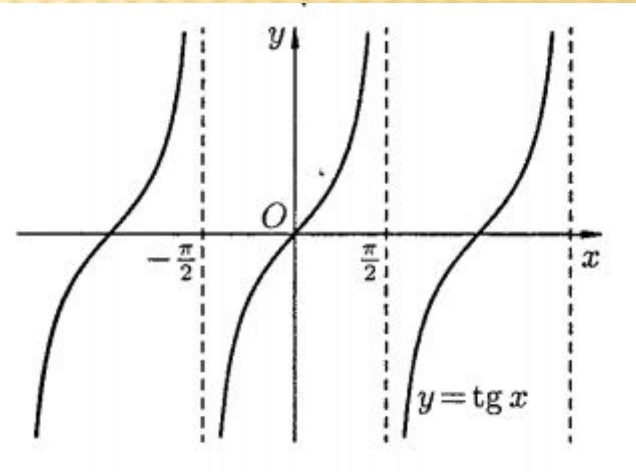
$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \pm\infty$$

ПРИМЕРЫ ББФ

- $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x \to 0$



- $f(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \to {}^{\pi}/_{2}$



БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

- Функция f(x) называется **бесконечно малой функцией** (БМФ) при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - a| < \delta$$

выполняется неравенство

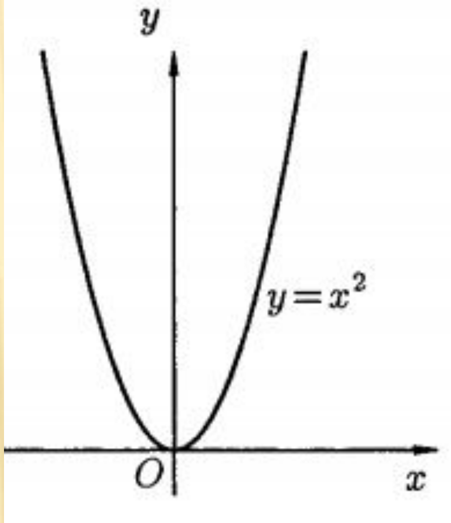
$$|\mathrm{f(x)}| < \varepsilon$$

- Т.е. если f(x) стремится к 0, при стремлении x к a

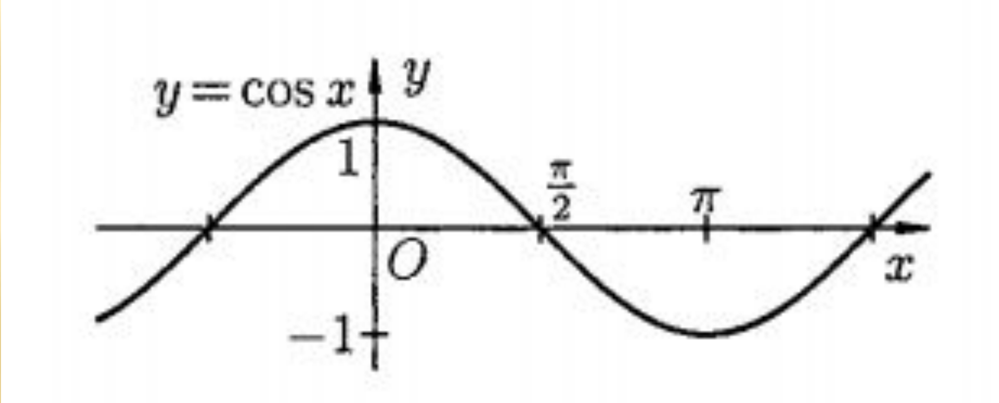
$$\lim_{\boldsymbol{x \to a}} \boldsymbol{f(x) = 0}$$

ПРИМЕРЫ БМФ

- $f(x) = x^2$ при $x \to 0$



- $f(x) = \cos x$ при $x \to {}^{\pi}/_{2}$



Теоремы о бесконечно малых функциях

- 1) Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция
- 2) Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция

Следствие 1 Произведение двух БМФ есть БМФ

Следствие 2 Произведение БМФ на число БМФ

- 3) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть бесконечно малая функция
- 4) Если функция a(x)— бесконечно малая ($a \neq 0$), то функция $\frac{1}{a(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция *f{x)* — бесконечно большая, $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

- Две БМФ сравниваются между собой с помощью их отношения.
- Как известно, сумма, разность и произведение двух БМФ. есть БМФ. Отношение же двух БМФ может вести себя различным образом: быть конечным числом, быть бесконечно большой функцией, бесконечно малой или вообще не стремиться ни к какому пределу.

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

- Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ – две БМФ при $x \to x_0$.

$$\lim_{x\to x_0} \boldsymbol{\alpha(x) = 0}, \lim_{x\to x_0} \boldsymbol{\beta(x) = 0}$$

- 1) Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \boldsymbol{A \neq 0}$, то α и β- бесконечно малые **одного порядка**
- 2) Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \boldsymbol{0}$, то α - бесконечно малая **более высокого порядка,** чем β
- 3) Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то α - бесконечно малая **более низкого порядка,** чем β
- 4) Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β- **несравнимые** бесконечно малые

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

- Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\mathbf{1}$, то α и β- **эквивалентные** бесконечно малые $\boldsymbol{\alpha\sim\beta}$
- эквивалентные бесконечно малые играют особую роль среди БМФ одного порядка
- Т.1. Предел отношения двух БМФ не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей БМФ.
- Т.2. Разность двух эквивалентных БМФ есть БМФ более высокого порядка, чем каждая из них.
- Т.3, Сумма конечного числа БМФ разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Основные эквивалентные бесконечно малые функции

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x$ $(x \to 0)$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ $(x \to 0)$;
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$;
6. $e^x - 1 \sim x$ $(x \to 0)$;
7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ $(x \to 0)$;
8. $\ln(1 + x) \sim x$ $(x \to 0)$;
9. $\log_a(1 + x) \sim x \cdot \log_a e$ $(x \to 0)$;
10. $(1 + x)^k - 1 \sim k \cdot x$, $k > 0$ $(x \to 0)$;
 в частности, $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{2}$.

ПРИМЕР 5

- Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2x}{\sin 3x}$$

- Так как $\sin 3x \sim 3x$ и $\mathrm{tg}\,2x \sim 2x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$