Тема 1. «Матрицы и действия над ними»

Основные понятия:

1. Определение матрицы
2. Виды матриц
3. Действия над матрицами
4. Перестановочные матрицы

1. Определение матрицы

Прямоугольная таблица чисел вида

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \ldots & \grave{a}_{1n} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \ldots & \grave{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \grave{a}_{m1} & \grave{a}_{m2} & \ldots & \grave{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей**.

$\grave{a}_{ij}$ **- элементы** матрицы.

Размер матрицы

Главная диагональ матрицы

Побочная диагональ матрицы

2. Виды матриц

- Прямоугольная
- Квадратная
- Нулевая
- Единичная
- Диагональная
- Симметричная
- Вырожденная
- Равные
- Треугольная
- Квазитреугольная (ступенчатая или трапециевидная)
- Матрица-строка или строчная матрица
- Матрица-столбец или столбцевая матриц

Матрица называется ***прямоугольной***, если количество ее строк не совпадает с количеством столбцов:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Матрица называется ***квадратной***, если количество ее строк совпадает с количеством столбцов:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} -7 & 45 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица называется ***нулевой***, если все ее элементы нулевые :

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***единичной***, если элементы по главной диагонали единицы, а остальные элементы нулевые :

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***диагональной***, если элементы по главной диагонали отличны от нуля, а остальные элементы нулевые:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***симметричной***, если относительно главной диагонали для всех ее элементов выполняется условие $a_{ij} = a_{ji}$:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 77 \\ -1 & 77 & 3 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***вырожденной***, если ее определитель равен нулю.

Матрицы А и В (одинаковых размерностей) называются ***равными***, если :

$$a_{ij} = b_{ij}$$

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называются ***треугольными***.

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется ***квазитреугольной*** (ступенчатая или трапециевидная)

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одной строки называется ***матрицей-строкой*** или ***строчной матрицей***.

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одного столбца называется ***матрицей-столбцом*** или ***столбцевой матрицей***

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами

Линейные:

1) Сумма (разность) матриц;
2) Произведение матрицы на число.

Нелинейные:

1) Транспонирование матрицы;
2) Умножение матриц;
3) Нахождение обратной матрицы.

Суммой (разностью) двух матриц одинаковой размерности называется матрица, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц слагаемых.

Например:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} + b_{11} & \grave{a}_{12} + b_{12} & \grave{a}_{13} + b_{13} \\ \grave{a}_{21} + b_{21} & \grave{a}_{22} + b_{22} & \grave{a}_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Произведением матрицы на число называется матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число.

Например*:*

$$\alpha \cdot \grave{A} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \cdot \grave{a}_{11} & \alpha \cdot \grave{a}_{12} & \alpha \cdot \grave{a}_{13} \\ \alpha \cdot \grave{a}_{21} & \alpha \cdot \grave{a}_{22} & \alpha \cdot \grave{a}_{23} \end{pmatrix}$$

Линейные операции обладают следующими **свойствами**:

1) $A+B=B+A$

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

3) $A+0=A$

4) $A+(-A)=0$

5) $1\cdot A=A$

6) $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$

7) $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$

8) $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, т**ранспонированной** относительно данной.

<u>Например:</u>

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{21} \\ \grave{a}_{12} & \grave{a}_{22} \\ \grave{a}_{13} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix}$$

Умножение матриц определяется для ***согласованных*** матриц.

Произведением матрицы $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ на матрицу $B_{n\times k}=\left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times k}=\left(c_{ij}\right)$, для которой

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj},$$

т.е. каждый элемент матрицы С равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы А на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы В.

<u>Например:</u>

$$\begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} \cdot b_{11} + \grave{a}_{12} \cdot b_{21} + \grave{a}_{13} \cdot b_{31} \\ \grave{a}_{21} \cdot b_{11} + \grave{a}_{22} \cdot b_{21} + \grave{a}_{23} \cdot b_{31} \end{pmatrix}$$

В случае, когда AB=BA, матрицы A и B называют **перестановочными** или **коммутативными**.

Пример 1. Найти все перестановочные матрицы к матрице

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Найти все перестановочные матрицы к матрице

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства операции транспонирования:

1) $\left(A^T\right)^T = A$

2) $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$

3) $\left(A \cdot B\right)^T = B^T A^T$

Матрица А называется ***согласованной*** с матрицей В, если число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В:

<u>Например:</u>

1) $\grave{A}_{m\times n}, \quad B_{n\times k}$

2) $\grave{A}_{2\times 4}, \quad B_{4\times 1}$

3) $\grave{A}_{m\times 2}, \quad B_{2\times k}$

Свойства операции умножение матриц:

1. Свойство сочетательности или ассоциативности

$$\left(AB\right)C = A\left(BC\right)$$

2. $$\alpha\left(AB\right) = A\left(\alpha B\right) = \left(\alpha A\right)B$$

3. Свойство распределительности (дистрибутивности) справа и слева относительно сложения матриц

$$\left(A+B\right)C = AC + BC$$
$$C\left(A+B\right) = CA + CB$$

Решение (Пример 1):

1) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ общий вид всех перестановочных матриц

2) Применим определение перестановочных матриц AB=BA:

$$\grave{A}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a+3b \\ c & -2c+3d \end{pmatrix}$$

Получаем: $\begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a+3b \\ c & -2c+3d \end{pmatrix}$

3) По определению равных матриц

$$\begin{cases} a-2c=a \\ b-2d=-2a+3b \\ 3c=c \\ 3d=-2c+3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in R \\ b=a-d \\ c=0 \\ d \in R \end{cases}$$

4) Общий вид всех перестановочных матриц

$$B = \begin{pmatrix} a & a-d \\ 0 & d \end{pmatrix}$$