

Тема 1. «Матрицы и действия над ними»

Основные понятия:

1. Определение матрицы
2. Виды матриц
3. Действия над матрицами
4. Перестановочные матрицы

[завершить](#)

1. Определение матрицы

Прямоугольная таблица чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей**.

a_{ij} - элементы матрицы.

Размер матрицы

Главная диагональ матрицы

Побочная диагональ матрицы

[назад](#)

2. Виды матриц

- Прямоугольная
- Квадратная
- Нулевая
- Единичная
- Диагональная
- Симметричная
- Вырожденная
- Равные
- Треугольная
- Квазитреугольная (ступенчатая или трапециевидная)
- Матрица-строка или строчная матрица
- Матрица-столбец или столбцовая матриц

[назад](#)

Матрица называется *прямоугольной*, если количество ее строк не совпадает с количеством столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Матрица называется *квадратной*, если количество ее строк совпадает с количеством столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 45 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы нулевые :

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется *единичной*, если элементы по главной диагонали единицы, а остальные элементы нулевые :

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Квадратная матрица называется **диагональной**, если элементы по главной диагонали отличны от нуля, а остальные элементы нулевые:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется **симметричной**, если относительно главной диагонали для всех ее элементов выполняется условие :

$$a_{ij} = a_{ji}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 77 \\ -1 & 77 & 3 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Квадратная матрица называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю.

Матрицы A и B (одинаковых размерностей) называются *равными*, если $a_{ij} =: b_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 13 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes \text{или} & \boxtimes \\ a_{n1} & \boxtimes & 0 \end{pmatrix}$$

называются *треугольными*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Прямоугольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1m} & \boxtimes & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \boxtimes & a_{2m} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & \boxtimes & a_{mm} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *кваситреугольной* (ступенчатая или трапециевидная)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Матрица, состоящая из одной строки называется *матрицей-строкой* или *строчной матрицей*.

$$A = (1 \quad 2 \quad -3 \quad 0)$$

Матрица, состоящая из одного столбца называется *матрицей-столбцом* или *столбцовой матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Операции над матрицами

Линейные:

- 1) Сумма (разность) матриц;
- 2) Произведение матрицы на число.

Нелинейные:

- 1) Транспонирование матрицы;
- 2) Умножение матриц;
- 3) Нахождение обратной матрицы.

Суммой (разностью) двух матриц одинаковой размерности называется матрица, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц слагаемых.

Например:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Пример

назад

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = ?$$

$$A - B = ?$$

$$B - A = ?$$

[Ответ](#)

[назад](#)

Произведением матрицы на число называется матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число.

Например:

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \alpha \cdot a_{13} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \alpha \cdot a_{23} \end{pmatrix}$$

Пример

назад

Линейные операции обладают следующими **свойствами**:

$$1) A + B = B + A$$

$$2) (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$3) A + 0 = A$$

$$4) A + (-A) = 0$$

$$5) 1 \cdot A = A$$

$$6) \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$$

$$7) \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

$$8) (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** относительно данной.

Например:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Свойства

[назад](#)

Умножение матриц определяется для согласованных матриц.

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times k} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times k} = (c_{ij})$ которой $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$ т.е. каждый элемент матрицы C равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .

Например
Свойства

назад

Например:

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \dot{a}_{13} \\ \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \dot{a}_{11} \cdot b_{11} + \dot{a}_{12} \cdot b_{21} + \dot{a}_{13} \cdot b_{31} \\ \dot{a}_{21} \cdot b_{11} + \dot{a}_{22} \cdot b_{21} + \dot{a}_{23} \cdot b_{31} \end{pmatrix}$$

Пример

[назад](#)

В случае, когда $AB=BA$, матрицы A и B называют **перестановочными** или **коммутативными**.

Пример 1. Найти все перестановочные матрицы к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Найти все перестановочные матрицы к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Ответ:

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 7 & 4 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -7 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A = ?$$

$$-3B = ?$$

$$4B - 7A = ?$$

[Ответ](#)

[назад](#)

Ответ:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \\ -8 & 18 \end{pmatrix}$$

$$-3B = \begin{pmatrix} 15 & -18 \\ -21 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$4B - 7A = \begin{pmatrix} -34 & 3 \\ 28 & -28 \\ 20 & -59 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Свойства операции транспонирования:

$$1) (A^T)^T = A$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$3) (A \cdot B)^T = B^T A^T$$

[назад](#)

Матрица A называется *согласованной* с матрицей B , если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B :

Например:

$$1) \quad A_{m \times n}, \quad B_{n \times k}$$

$$2) \quad A_{2 \times 4}, \quad B_{4 \times 1}$$

$$3) \quad A_{m \times 2}, \quad B_{2 \times k}$$

[назад](#)

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = ?$$

$$B \cdot A = ?$$

$$A^T \cdot B = ?$$

$$B^T \cdot A = ?$$

$$A^T \cdot B^T = ?$$

$$B^T \cdot A^T = ?$$

[Ответ](#)

[назад](#)

Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 12 \\ -4 & 35 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A, \quad A^T \cdot B, \quad B^T \cdot A, \quad A^T \cdot B^T$ и др.

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & 12 & 35 \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Свойства операции умножение матриц:

1. Свойство сочетательности или ассоциативности

$$(AB)C = A(BC)$$

- 2.

$$\alpha(AB) = A(\alpha B) = (\alpha A)B$$

3. Свойство распределительности (дистрибутивности)
справа и слева относительно сложения матриц

$$(A+B)C = AC + BC$$
$$C(A+B) = CA + CB$$

[назад](#)

Решение (Пример 1):

1) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ общий вид всех перестановочных матриц

2) Применим определение перестановочных матриц
 $AB=BA$:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a + 3b \\ c & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Получаем:
$$\begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a + 3b \\ c & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

3) По определению равных матриц

$$\begin{cases} a - 2c = a \\ b - 2d = -2a + 3b \\ 3c = c \\ 3d = -2c + 3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in R \\ b = a - d \\ c = 0 \\ d \in R \end{cases}$$

4) Общий вид всех перестановочных матриц

$$B = \begin{pmatrix} a & a - d \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

5) Проверка

[назад](#)

Ответ:

$$B = \begin{pmatrix} a & 4c \\ c & 2c + a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} d - 2c & 4c \\ c & d \end{pmatrix}$$

ИЛИ

$$B = \begin{pmatrix} a & 2d - 2a \\ 0,5d - 0,5a & d \end{pmatrix}$$

[назад](#)

Спасибо за внимание!

(Тема следующей лекции «Определители»)