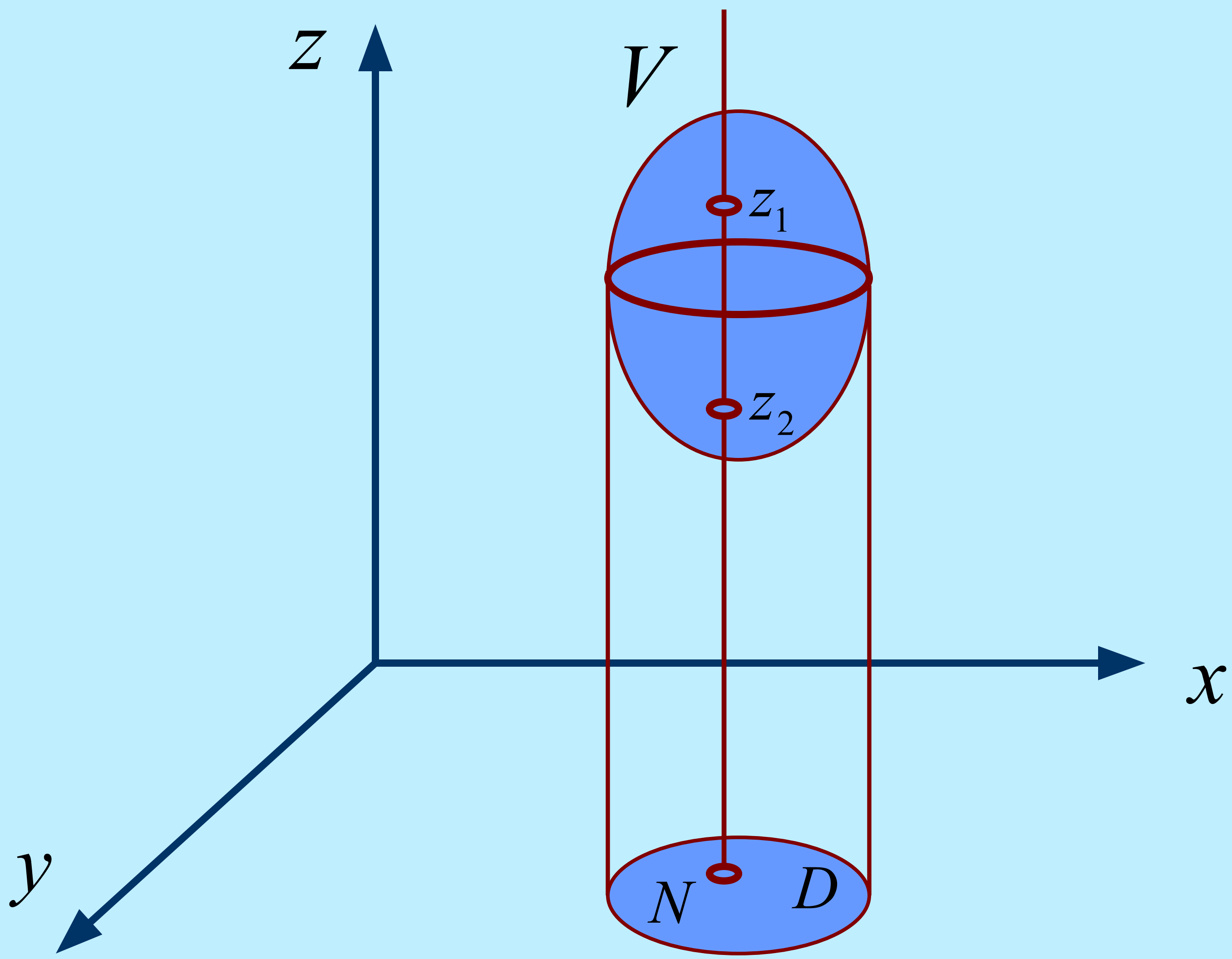
18.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Декартовы координаты

Пусть дан тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z) dV$$

$$dV = dxdydz$$


z
V
z_1
z_2
x
y
N
D

1

Проектируем поверхность, ограниченную объемом V, на плоскость XOY, получаем область D.

2

Определяем координаты точек $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ входа и выхода прямой, параллельной оси z и проведенной через точку N области D.

3

Считая x,y постоянными, вычисляем интеграл:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz$$

А затем двойной интеграл:

$$\iint_D dS \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz$$

4

Двойной интеграл можно свести к повторному:

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$$

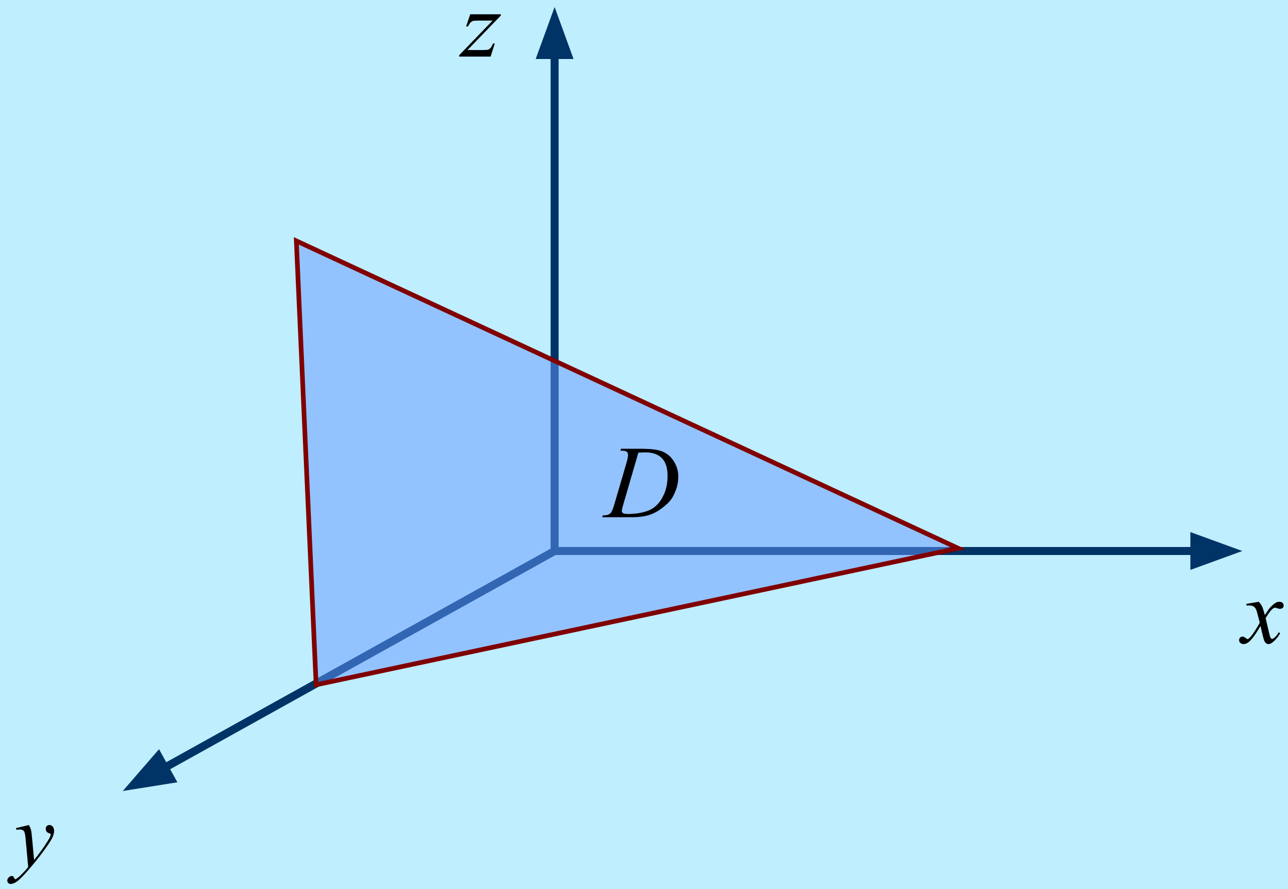
ПРИМЕР.

Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz$$

где V – область, ограниченная координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и плоскостью $x+y+z=1$

РЕШЕНИЕ.



1

По переменной z интегрирование идет от 0 до z=1-x-y:

$$\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)\,dz =$$

$$= \iint_D dxdy \left((x+y)\cdot z + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x-y} =$$

$$= \iint_D dxdy \left((x+y)\cdot(1-x-y) + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right) =$$

$$=\iint_D dxdy\left(x+y-x^2-xy-xy-y^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)=$$

$$=\iint_D dxdy\left((x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)=$$

2

Теперь расставляем пределы интегрирования по области D: это треугольник со сторонами x=0, y=0, x+y=1:

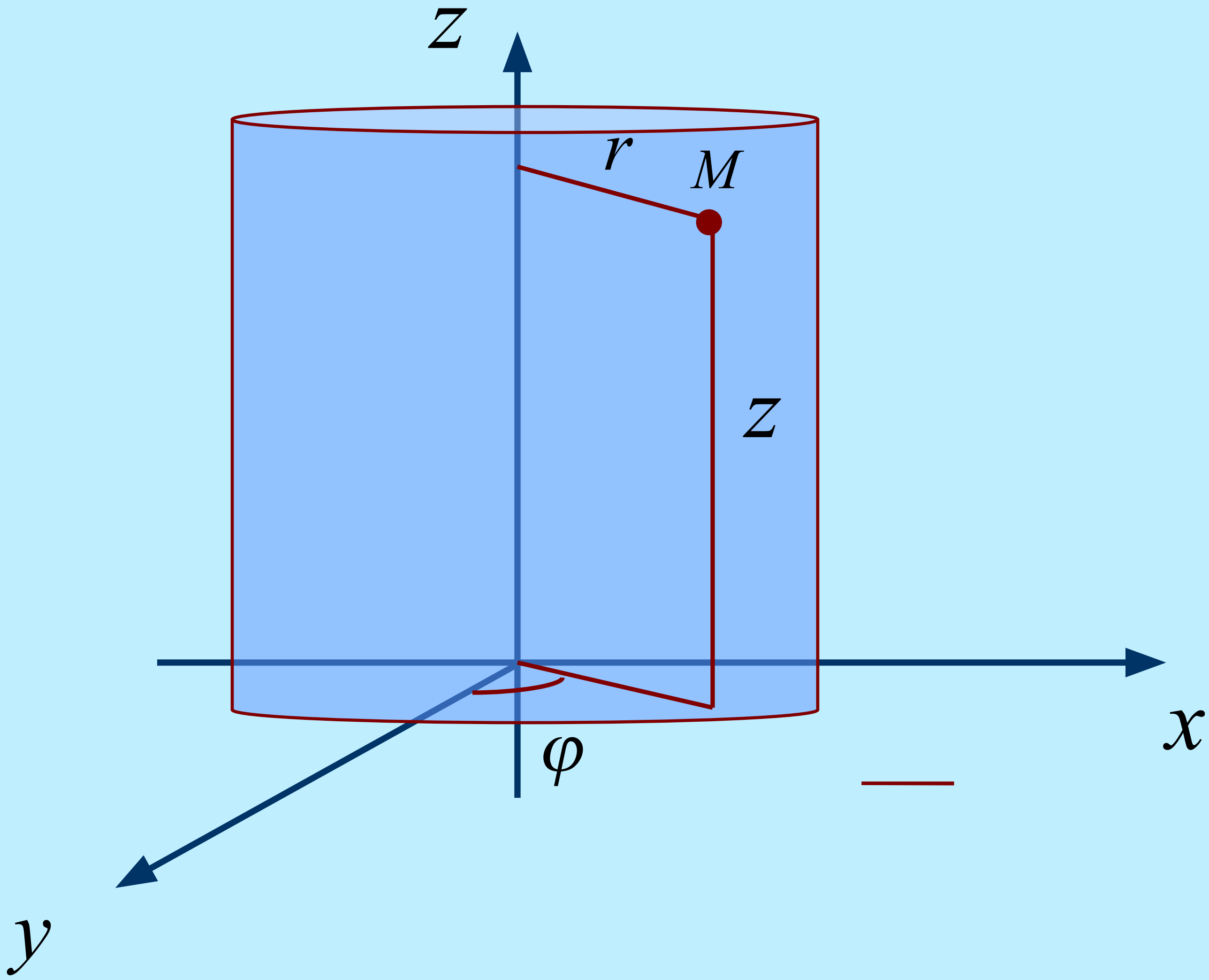
$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\left((x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)=$$

$$=\int_0^1 dx\left(\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^3}{3}-\frac{(1-x-y)^3}{6}\right)\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=\int_0^1 dx\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}+\frac{x^3}{3}-\frac{(1-x)^3}{6}\right)=$$

2. Цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

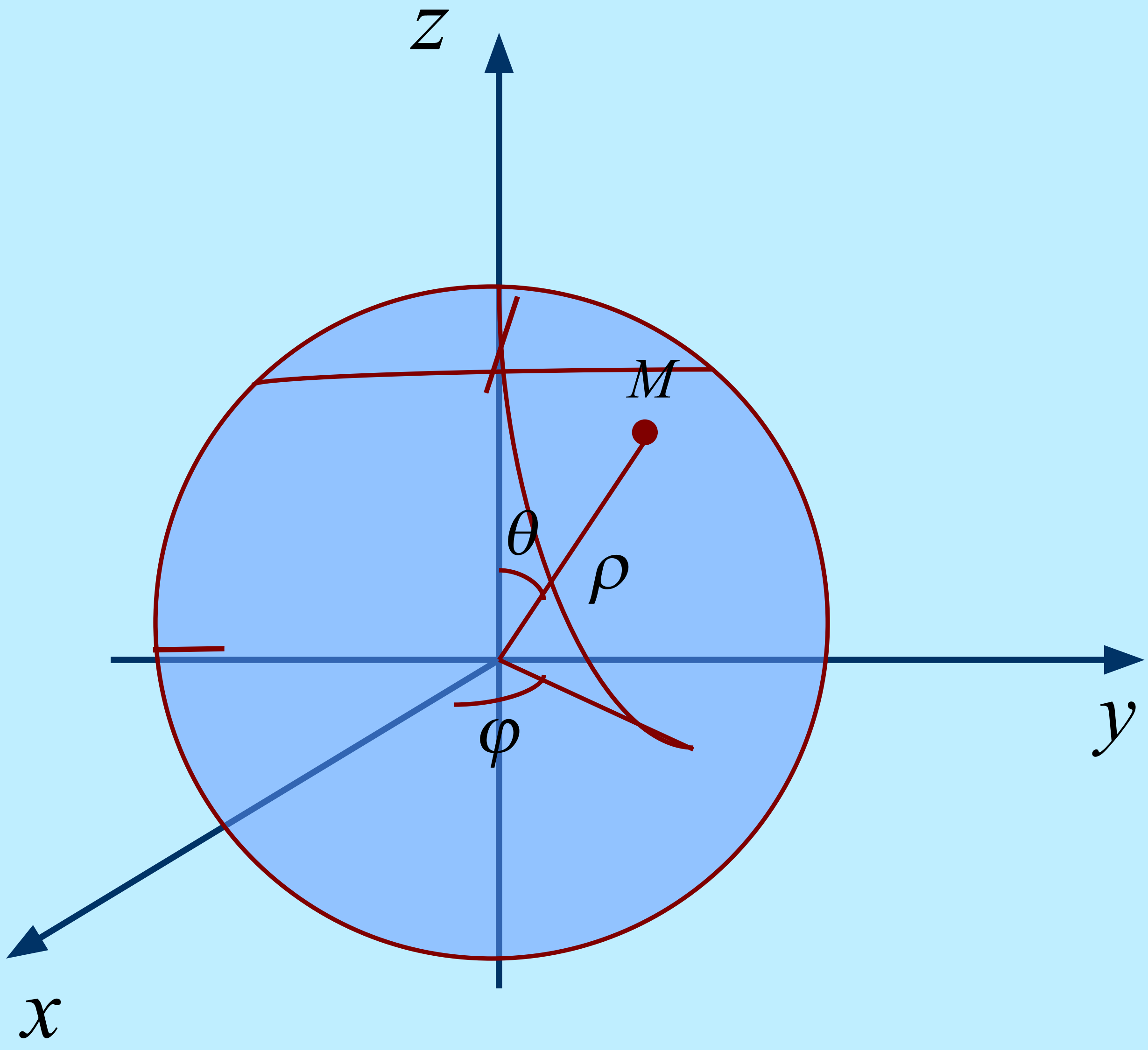

z
r
M
z
x
φ
y

$$dV = r \cdot dr\, d\varphi\, dz$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_V f(r,\varphi,z) \cdot r \cdot dr\, d\varphi\, dz$$

2. Сферические координаты

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases}$$


z
M
θ
ρ
y
φ
x

$$dV = \rho^2 \cdot \sin\theta d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dV = \iiint\limits_V f(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \cdot \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$