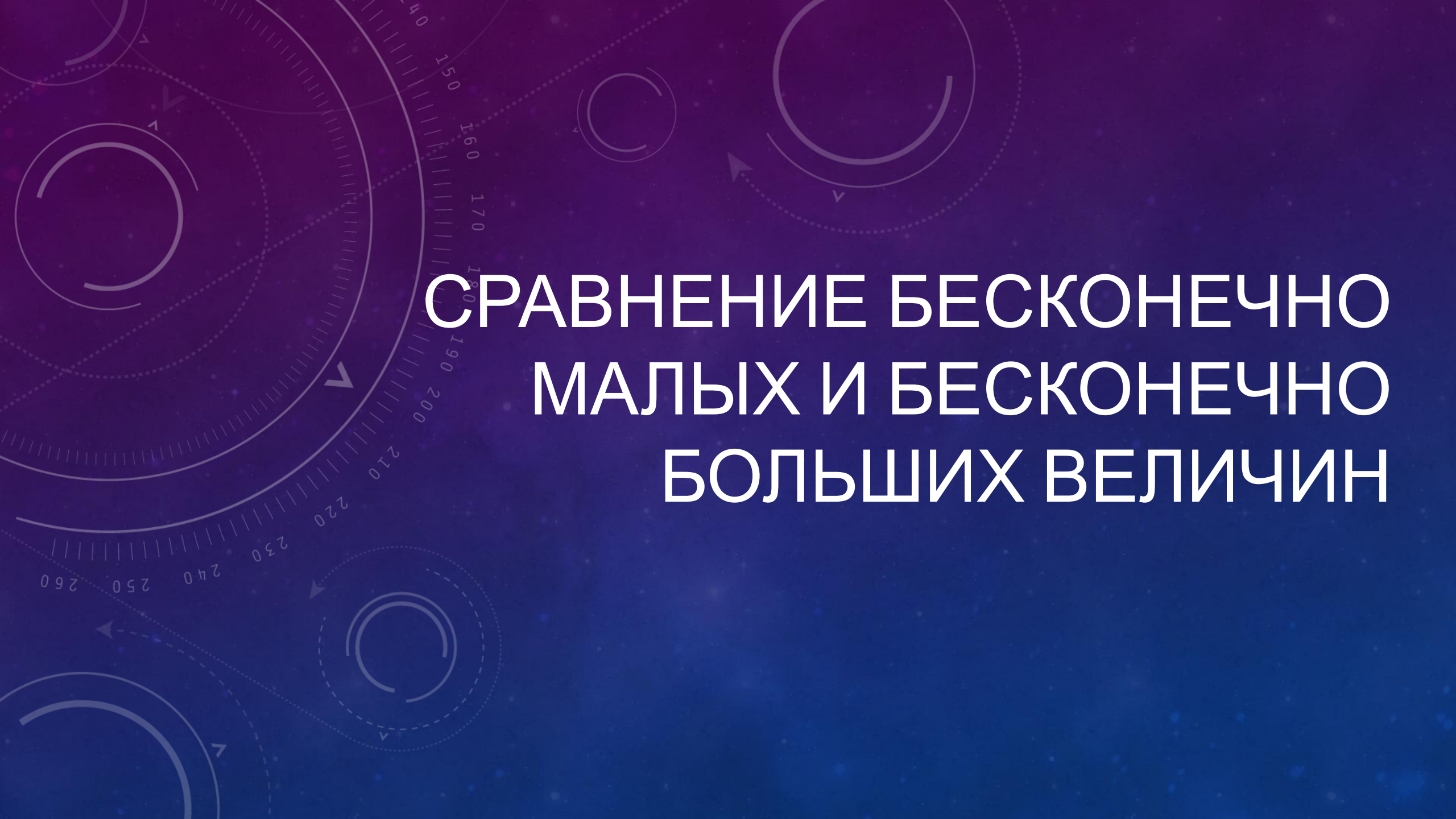


The background is a dark blue gradient with a subtle pattern of white dots. Overlaid on the left side are several concentric circles and arcs, some with arrows indicating a clockwise direction. A prominent circular scale is visible, with numerical markings ranging from 140 to 260 in increments of 10. The text is centered on the right side of the image.

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ВЕЛИЧИН

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$, если $\frac{1}{\beta(x)}$ - бесконечно малая, в этом случае $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \infty$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые (бесконечно большие) при $x \rightarrow x_0$.

Будем говорить, что $\alpha(x)$ имеет порядок k относительно $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$\alpha(x) \sim c\beta^k(x), \quad (c \in \mathbf{R}, c \neq 0).$$

Так величина $\alpha(x)$ имеет порядок k относительно $(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, если $\alpha(x) \sim c(x - x_0)^k$. При этом, если $\alpha(x)$ - бесконечно большая, то $k < 0$, если $\alpha(x)$ - бесконечно малая, то $k > 0$.

ПРИМЕРЫ СРАВНЕНИЯ ВЕЛИЧИН

Пример 2. Определить порядок бесконечно малой величины $\alpha(x) = 2^{x^2-2x+2} - 2$ при $x \rightarrow 1$ относительно $(x - 1)$.

Решение. $\alpha(x) = 2(2^{x^2-2x+1} - 1) = 2(2^{(x-1)^2} - 1) \sim 2(x-1)^2 \ln 2$ при $x \rightarrow 1$.
Следовательно, $\alpha(x)$ имеет второй порядок малости относительно $(x - 1)$ при $x \rightarrow 1$.

Пример 3. Определить порядок функции $f(x) = \frac{\sin(x^3-8)}{x^4-8x^2+16}$ относительно $(x-2)$ при $x \rightarrow 2$.

Решение. Найдем функцию вида $c(x-2)^k$, эквивалентную функции $f(x)$ при $x \rightarrow 2$.

Так как $(x^3 - 8) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 2$, то

$$\sin(x^3 - 8) \sim (x^3 - 8) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

Множитель $(x^2 + 2x + 4) \rightarrow 12$ при $x \rightarrow 2$, следовательно,

$$\sin(x^3 - 8) \sim 12(x - 2).$$

Трехчлен в знаменателе является полным квадратом разности $x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2$, которую по формуле разности квадратов преобразуем к произведению:

$$(x^2 - 4)^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2.$$

Так как $(x + 2) \rightarrow 4$ при $x \rightarrow 2$, то

$$x^4 - 8x^2 + 16 = (x - 2)^2(x + 2)^2 \sim 16(x - 2)^2.$$

Таким образом, находим эквивалентную функцию:

$$\frac{\sin(x^3-8)}{x^4-8x^2+16} \sim \frac{12(x-2)}{16(x-2)^2} = \frac{3}{4}(x-2)^{-1}$$

так как степень $(x - 2)$ отрицательна, делаем вывод, что $f(x)$ есть бесконечно большая функция относительно $\frac{1}{x-2}$ порядка 1.

Пример 4. Функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow 1$.
Определить порядок малости $f(x)$:

а) относительно x ; б) относительно $(x - 1)$.

Р е ш е н и е. а) Для определения порядка относительно x преобразуем разность, вынесем общий множитель за скобки:

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3} = x^{2/3} - x^{3/2} = x^{2/3} (1 - x^{5/6}) \sim x^{2/3} \cdot 1 = x^{2/3}.$$

Таким образом, при $x \rightarrow 0$ функция $f(x)$ имеет порядок $\frac{2}{3}$ относительно x .

б) Для исследования $f(x)$ при $x \rightarrow 1$ введём переменную $t = x - 1$, $t \rightarrow 0$, тогда $x = t + 1$ и:

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3} = (1+t)^{2/3} - (1+t)^{3/2} = \left((1+t)^{2/3} - 1 \right) - \left((1+t)^{3/2} - 1 \right).$$

Так как $(1+t)^{2/3} - 1 \sim \frac{2}{3}t$, а $(1+t)^{3/2} - 1 \sim \frac{3}{2}t$ при $t \rightarrow 0$, то

$$\left((1+t)^{2/3} - 1 \right) - \left((1+t)^{3/2} - 1 \right) \sim \frac{2}{3}t - \frac{3}{2}t = -\frac{5}{6}t = -\frac{5}{6}(x - 1).$$

Следовательно, при $x \rightarrow 1$ функция $f(x)$ имеет первый порядок относительно $(x - 1)$.

Пример 5. Определить порядок бесконечно большой функции $\beta(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 1$ относительно x при $x \rightarrow \infty$.

Решение. Так как при $x \rightarrow \infty$ многочлен эквивалентен своему старшему члену, то

$$3x^4 - 5x^2 + x - 1 \sim 3x^4,$$

следовательно, $\beta(x)$ – бесконечно большая порядка 4 относительно x .

Пример 6. Определить порядок бесконечно большой функции $\beta(x) = \arctg^2 x - \sqrt{x}$ относительно x при $x \rightarrow \infty$.

Решение. Функция $\arctg x$ является ограниченной:

$$-\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

следовательно, $0 \leq \arctg^2 x < \frac{\pi}{2}$ и старшим слагаемым функции $\beta(x)$ является $-\sqrt{x}$.

Так как при $x \rightarrow \infty$

$$\arctg^2 x - \sqrt{x} \sim -\sqrt{x} = -x^{1/2},$$

то $\beta(x)$ – бесконечно большая порядка $\frac{1}{2}$ относительно x при $x \rightarrow \infty$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Определить порядок функции $\beta(x) = \sqrt{9x^4 - 12x^3 + x^2}$ относительно x при $x \rightarrow \infty$.

2

Определить порядок функции $\beta(x) = \sqrt{9x^4 - 12x^3 + x^2}$ относительно x при $x \rightarrow 0$.

1

Определить порядок величины $\alpha(x) = \sin^2 x - x^3 + 1 - \cos x^2$ относительно x при $x \rightarrow \infty$.

2

Определить порядок величины $\alpha(x) = \sin^2 x - x^3 + 1 - \cos x^2$ относительно x при $x \rightarrow 0$.

3

Определить порядок величины $\alpha(x) = (1 - x)^4 - (1 + x)^4$ относительно x при $x \rightarrow \infty$.

1

Определить порядок величины $\alpha(x) = (1 - x)^4 - (1 + x)^4$ относительно x при $x \rightarrow 0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для функции $f(x) = \sqrt{1 - (x + 1)^4} - 1$, бесконечно малой при $x \rightarrow -1$, найти порядок относительно $\Delta x = (x + 1)$.

4

Определить порядок функции $f(x) = \operatorname{arctg} x^2 - x - 2x^4$ относительно x при $x \rightarrow 0$.

1

Определить порядок функции $f(x) = \sin \sqrt{x} + x - x^2 \sqrt{x}$ относительно x при $x \rightarrow +0$.

1/2

Установить, какие функции являются бесконечно большими при $x \rightarrow \infty$.

☐ $F(x) = x \operatorname{tg} x$

☐ $F(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

☐ $F(x) = \ln x - \ln \frac{x}{2}$

☐ $F(x) = x \sin x$

☐ $F(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Какие из следующих пар функций являются функциями одного порядка

☐ $f(x) = \sin(\sqrt{x^2 + 9} - 3)$ и $g(x) = 2^{x^2} - 1$ при $x \rightarrow 0$

☐ $f(x) = 3 \ln x$ и $g(x) = e^x - e$ при $x \rightarrow 1$

☐ $f(x) = 3 \sin^2 x^2 - 5x^5$ и $1 - x^4 - \cos x^2$ при $x \rightarrow 0$

☐ $f(x) = \arcsin(e^{x^3} - 1)$ и $g(x) = \ln(1 + 3x)^3$ при $x \rightarrow 0$

☐ $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ и $g(x) = x^3 - x$ при $x \rightarrow 1$

Определить порядок малости относительно бесконечно малой x

при $x \rightarrow 0$ следующих функций

$2x - 3x^2 + x^3$

Выберите... ▾

$\operatorname{tg} x - \sin x$

Выберите... ▾

$\sqrt{1 - 2x} - \sqrt[3]{1 - 3x}$

Выберите... ▾

$2 \sin^3 x - x^2$

Выберите... ▾

$\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$

Выберите... ▾