**Правило сложения для совместных A и B выражает вероятность суммы произвольных событий, и совместных, и несовместных:**

**если A и B не пересекаются, $P(A \cdot B) = 0$**

**Поскольку в любых случаях $P(A \cdot B) \geq 0$,**

**можно записать $P(A + B) \leq P(A) + P(B)$**

**Это *неравенство вероятностей* обобщается на $k > 2$ событий:**

**Вероятность суммы нескольких событий не превосходит суммы их вероятностей**

# Формула Бернулли

от «хотя бы 1» к «ровно 1, ровно 2, ...»

**Позволяет определять вероятности «ровно одного», «ровно двух» и т.д. наступлений события в нескольких независимых экспериментах (попаданий при вы... ...спехов в сделках и др.)**

**Пояснение →**

**Если событие $A$ может произойти в каждом из $n$ независимых опытов с вероятностью $p$, то вероятность его наступления ровно $k$ раз в данной серии опытов выражается формулой Бернулли:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

**Следует из правил умножения и сложения вероятностей:**

**вероятность, что A наступит в некоторых k опытах и не наступит в n-k остальных равна $p^k q^{n-k}$ – по правилу умножения для независимых событий;**

**по правилу сложения $P_n(k)$ равна сумме таких вероятностей для всех вариантов $k$ наступлений и $n$-$k$ не наступлений A; количество таких вариантов есть число сочетаний из $n$ элементов по $k$, т.е., $C_n^k$**

# Пример

**В серии из 3-х независимых выстрелов с вероятностью попадания в каждом 0.7:**

**вероятность только одного попадания**

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0.7 \cdot 0.3^2 = 0.189,$$

**вероятность ровно двух попаданий**

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3 = 0.441$$

# Формула полной вероятности и формула Байеса

**связаны с ситуациями,
в которых эксперимент
как бы состоит из 2-х стадий:**

**на 1-ой «разыгрываются»
взаимоисключающие условия,**

**на 2-ой – определяется исход,
когда имеет место одно из условий**

Пример. Имеются 3 урны
с белыми и черными шарами.
Шар можно вынуть случайным образом
из одной из них.

Какова вероятность того,
что извлеченный наугад шар белый,
если
в 1-ой урне 2 белых и 3 черных шара,
во 2-ой 4 белых и 1 черный,
в 3-ей – 3 белых шара?

1) **Выбор урны (условий) – это**

***гипотеза*** **$H_j$,**

**что шар берется из j-ой урны**

**(*hypothesis*, предположение).**

**События $H_1$, $H_2$, $H_3$ образуют полную группу:**
**они несовместны (альтернативны),**
**одно из них обязательно произойдет →**

$$H_1 + H_2 + H_3 = \Omega,$$
$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1.$$

**Выбор случайный →**

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$$

**1) Выбор урны (условий) – это *гипотеза* $H_j$ что шар берется из j-ой урны (*hypothesis*, предположение).**

**События $H_1$, $H_2$, $H_3$ образуют полную группу: они несовместны (альтернативны), одно из них обязательно произойдет →**

$$H_1 + H_2 + H_3 = \Omega,$$

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1.$$

**Выбор случайный →**

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$$

2) Выбор белого из j-ой

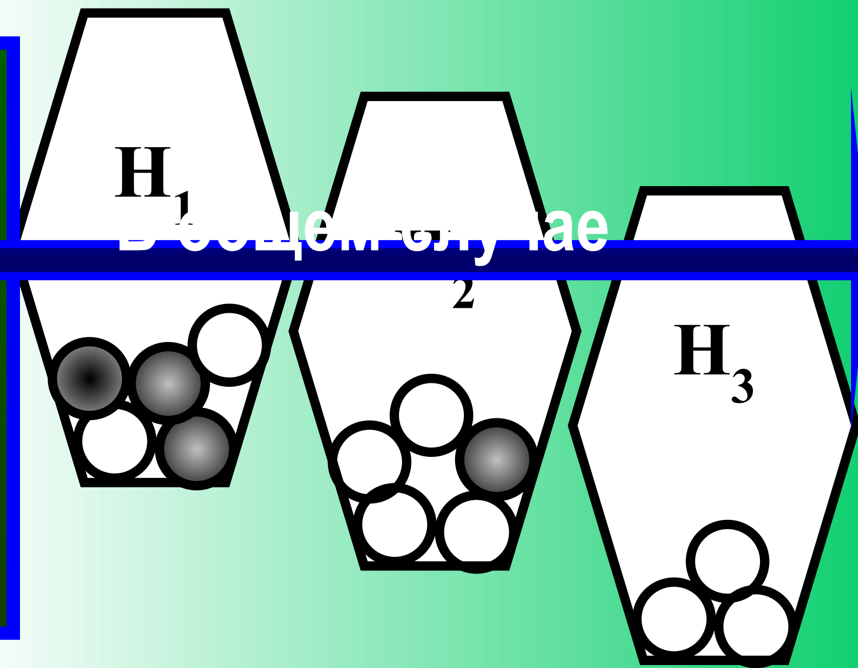
$A_j$ – это выбор

и j-ой урны,

и белого шара из нее →

по правилу умножения

$P(A_j) = P(H_j) \cdot P(A/H_j)$.




По правилу сложения

$$P(A) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3)$$

**Вероятность вынуть белый шар**

$$P(A) = 1/3 \cdot (2/5 + 4/5 + 3/3) = 11/15$$

**Если об условиях эксперимента можно сделать k исключающих друг друга предположений – гипотез $H_1$, $H_2$, …, $H_k$, и событие A может иметь место при одной из этих гипотез, то вероятность события A определяется по формуле *полной вероятности*:**

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(H_j) \cdot P(A / H_j)$$

***Абсолютная, безусловная*** **вероятность события в эксперименте с гипотетическими условиями рассчитывается как сумма произведений вероятностей гипотез на условную вероятность события при соответствующей гипотезе**

# Пример

**Нормальный режим работы устройства наблюдается в 80% случаев, в 20% – режим аномальный.**

**Вероятность отказа устройства (А) в 1-ом режиме 0.1, во 2-ом – 0.7**

***Где гипотезы, где условные вероятности?***

**Безусловная вероятность отказа, независимо от того, в каком режиме он произошел:**

$$P(A) = 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.22$$

В условиях предыдущей задачи пусть событие имело место – устройство прекратило работу. Какова вероятность что отказ произошел в нормальном ре

$$P(H_j/A) = \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j)P(A/H_j)}$$

**Для ответа на подобные вопросы используется формула Байеса (для вероятностей гипотез)**

**Доля, шансы гипотезы в наступлении А**

# *В общем случае*

**Пусть А может произой при наступлении одного**

**при**

**$H_k$**

**Какова вероятность случайно встретить в дверях длинноволосую студентку, если у 15 из 40 студенток в аудитории короткая стрижка?**

**Если до опыта вероятности гипотез были**

**$P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_k)$,**

**а в результате опыта событие А произошло,**

**то «новые» *условные* вероятности гипотез рассчитываются по *формуле Байеса***

Th
e
En
d

В «примере с устройством»:

вероятность того,
что отказ случился
при работе в нормальном режиме,
равна

$$P(H_1/A) = 0.8 \cdot 0.1 \,/\, [0.22 = 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.7] = 0.36$$