



# Сложная система

- Наличие большого количества разнородных взаимодействующих элементов
- Сложность выполняемой системой функции
- Возможность разбиения на подсистемы, цели функционирования которых подчинены общей цели функционирования системы
- Наличие управления, разветвленной информационной сети и интенсивных потоков информации
- Функционирование в условиях действия большого количества случайных факторов

# Случайные воздействия на систему

## внешние



связаны со случайными изменениями той среды, в которой работает система  
Например, «колебание нагрузки»:

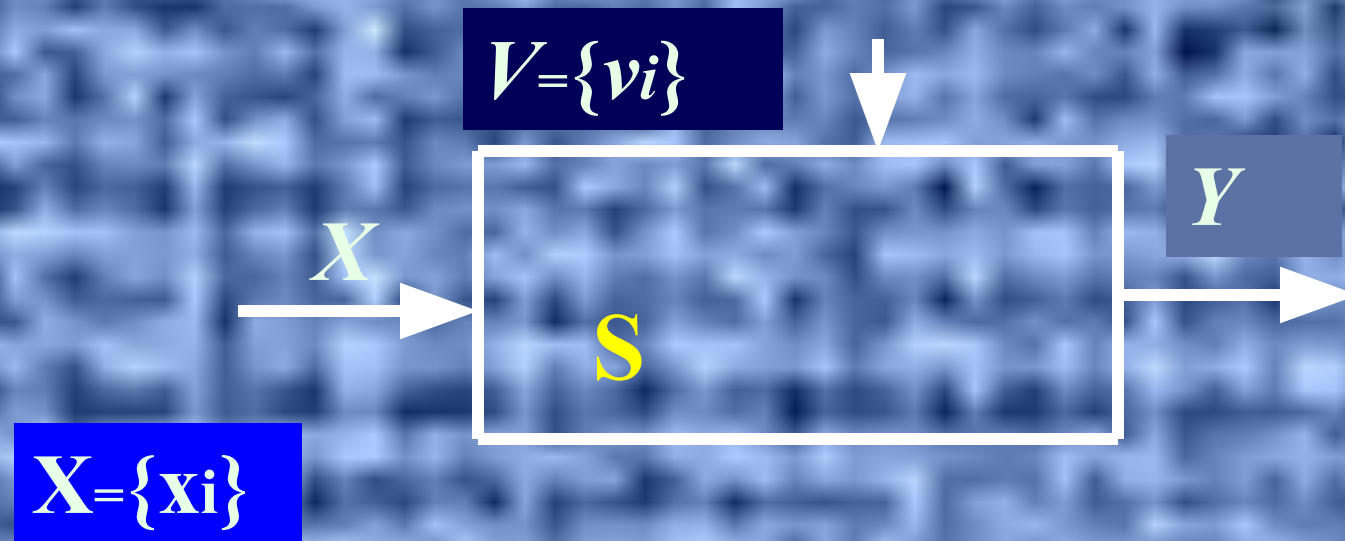
- резкое увеличение числа заявок на телефонные разговоры,
- значительные изменения пассажиропотока на транспорте,
- включение мощных потребителей электроэнергии и др.

## внутренние



связаны с ненадежной работой элементов системы:  
случайные выходы параметров за допустимые пределы,  
выходы из строя отдельных элементов системы

# Статистическое моделирование систем на ЭВМ



$$Y_i = F(x_i, v_i)$$

$$Y_{cp} = (1/N)(Y_1 + \dots + Y_N)$$

# Статистическое моделирование систем на ЭВМ

Общая характеристика метода  
статистического моделирования

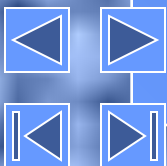
**Статистическое моделирование**  
воспроизведение с помощью ЭВМ  
функционирования  
вероятностной модели  
некоторого объекта  
и оценивание  
средних характеристик модели



# Метод статистического моделирования, или метод Монте-Карло

$$\xi, \quad M\xi=m, \quad D\xi=b^2$$

$$\hat{m} = \frac{1}{N} (\xi_1 + \dots + \xi_N)$$



: **Распределение  
суммы независимых одинаково  
распределенных случайных величин при  
больших  $N$  сходится по вероятности к  
нормальному распределению**

$$F(x) = P(\rho_N < x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right) dz$$

# Статистическое моделирование

распределение  
суммы

$$\rho_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$$

будет приближенно  
нормальным с

$$M\rho_N = a = Nm$$

$$\sigma^2 = Nb^2$$

# Асимптотика ЦПТ

$$P\left(\left|\rho_N - mN\right| / b\sqrt{N} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \Phi(x)$$

# Погрешность вычисления

$$P\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \xi_i - m\right| < \frac{xb}{\sqrt{N}}\right) = \Phi(x)$$

$$x=2$$

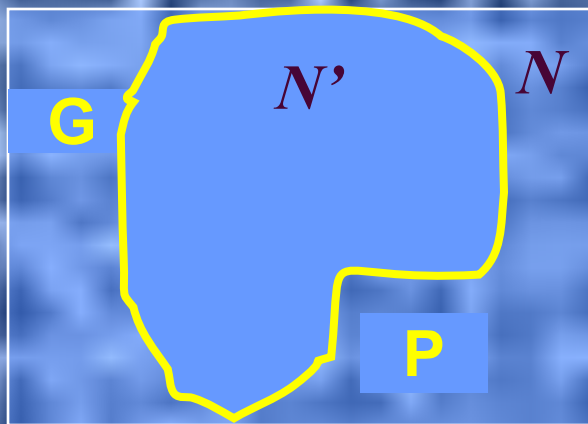
$$\Phi(x)=0.95$$



# Доверительный интервал

$$P\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i - \frac{xb}{\sqrt{N}} < m < \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i + \frac{xb}{\sqrt{N}}\right) = \Phi(x)$$

# Пример решения детерминированной задачи



$$\xi = \begin{cases} S_P, \xi_i \in G, \\ 0, \xi_i \notin G \end{cases}$$

$$\overline{M\xi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i = S_P N' / N$$



# Статистическое моделирование систем на ЭВМ

- Как **выбрать** удобную случайную величину для расчетов?
- Как **находить** значения произвольной случайной величины?

## Эталон

- Стандартная случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $(0,1)$

$\gamma$

# Свойства $\gamma$

- Плотность равномерно распределенной величины – постоянная, обозначим ее  $k$

$$\int_0^1 k dx = 1$$

- $F_\gamma(x) = P(\gamma < x) = \int_0^x k du = x$

- Отсюда следует одно из важных свойств  $\gamma$ :
- $P(x_1 < \gamma < x_2) = x_2 - x_1$ , - вероятность  $\gamma$  попасть в интервал равна длине этого интервала!
- $M_\gamma = 1/2$ ,  $D_\gamma = M_\gamma^2 - (M_\gamma)^2 = 1/12$ .

# Случайные числа и случайные цифры

## Получение случайных величин на ЭВМ

Сл.в.  $\gamma$ :  $p_\gamma(x)=1$ ,  $F_\gamma(x)=x$ ,  $M\gamma=1/2$ ,  $D\gamma=1/12$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \cdot 10^{-k}$$



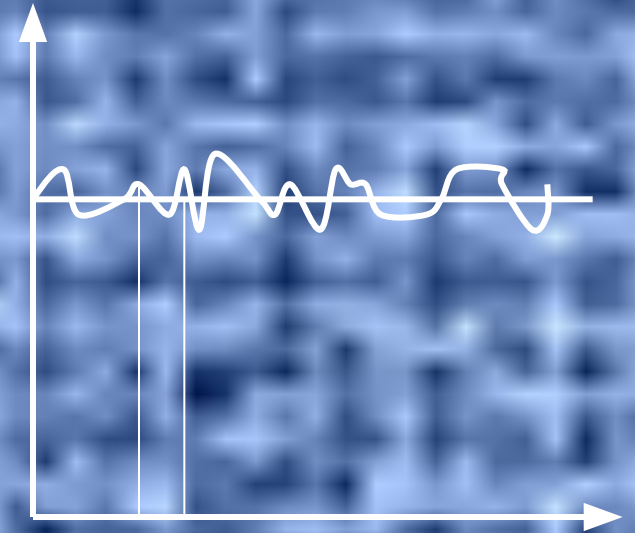
# Три способа получения случайных чисел

## Табличный

|       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 86515 | 90795 | 66515 | 66434 | 56558 | 12332 |
| 69186 | 03393 | 42502 | 99224 | 88955 | 53758 |
| 41686 | 42163 | 85181 | 38967 | 33181 | 72664 |
| 86522 | 47171 | 88059 | 89342 | 67248 | 09082 |
| 72587 | 93000 | 89688 | 78416 | 27589 | 99528 |
| 94377 | 57802 | 52452 | 42499 | 33346 | 83935 |
| 91641 | 18867 | 76773 | 97526 | 27256 | 66447 |



# Датчики



$v \pmod 2$ :  $\begin{cases} 0 & \text{при четном } v \text{ и} \\ 1 & \text{при нечетном} \end{cases}$

$$p(0)=p(1)$$

**0** - при 01 и **1** – при 10, тогда  $P(01)=p(1-p)=P(10)$



# Псевдослучайные числа (алгоритмический способ)



# Статистическое моделирование систем на ЭВМ

## Контрольные вопросы

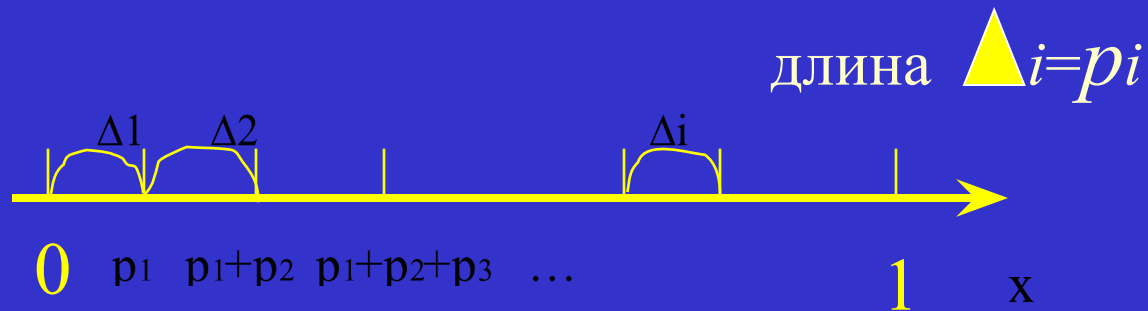
- Метод Монте-Карло
- Погрешность метода
- Доверительный интервал для оцениваемой величины
- Случайные числа и случайные цифры
- «Эталон» случайной величины
- Способы получения случайных чисел



# Преобразования случайных величин

## Моделирование дискретных случайных величин

$$(1) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdot & \cdot & \cdot & p_n \end{pmatrix}, \quad P_i = P(\xi = x_i)$$



# Моделирование дискретных случайных величин

**Теорема 1:** Случайная величина  $\xi$ , определенная формулой

$$\xi = xi, \text{ когда } \gamma \in \Delta i,$$

имеет

распределение вероятностей (1).

**Доказательство:**  $P(\xi = xi) = P(\gamma \in \Delta i) = \text{длина } \Delta i = pi$ ,  
что и требовалось доказать



# Пример

- В результате обработки детали на станке получается 4% брака. Смоделировать прохождение детали через станок (обработку).
- Возьмем сл. в.  $\xi = \begin{pmatrix} B & \Gamma \\ 0,04 & 0,96 \end{pmatrix}$
- *If  $\gamma < 0,04$  then  $\xi = B$  else  $\xi = \Gamma$ .*
- *If  $\gamma < 0,96$  then  $\xi = \Gamma$  else  $\xi = B$ .*

