МИНИМАЛЬНЫЕ МАРШРУТЫ И ПОКРЫТИЯ

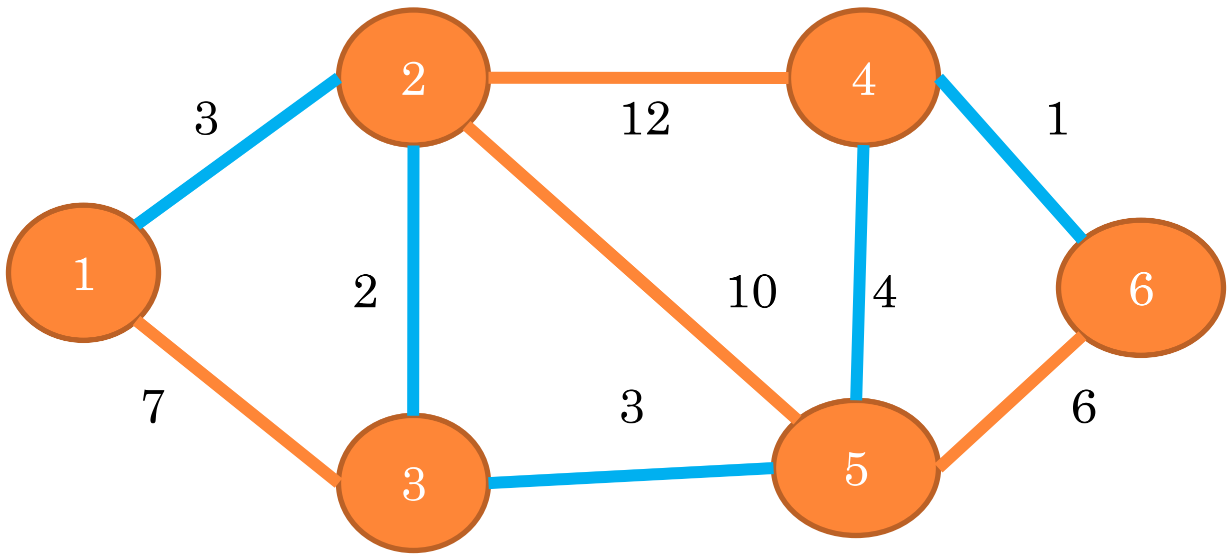
Лекция 5

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ 1. МИНИМАЛЬНЫЕ МАРШРУТЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ДВЕ ВЕРШИНЫ.

СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

- На заданном взвешенном графе требуется определить маршрут, суммарный вес ребер которого минимален.



Синим цветом выделен минимальный маршрут, объединяющий первую и шестую вершины.

ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

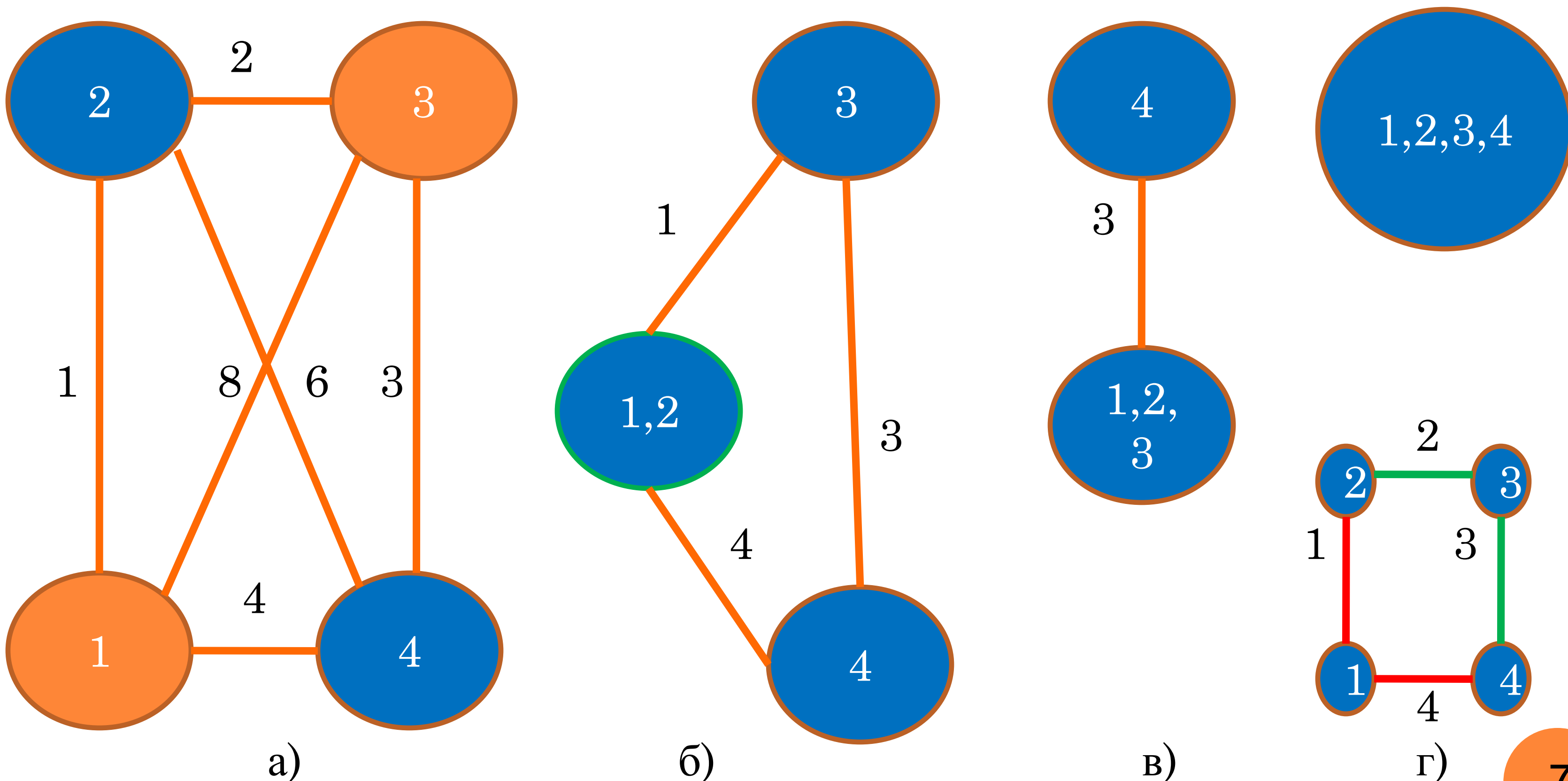
Ниже считается, что выбраны s-я и t-я вершины.

$$\begin{cases} \sum_i \sum_j r(i,j) \cdot z(i,j) \to \min; \\ \sum_i z(s,i) = 1; \\ \sum_i z(i,t) = 1; \\ \forall j \notin \{s,t\} : \sum_i z(i,j) = \sum_q j,q); \\ \forall (i,j) \in U : z(i,j) = 1,0. \end{cases}$$

АЛГОРИТМ 1

- Шаг 1. У одной из выбранных вершин полученного графа выбираем ребро с минимальным весом.
- Шаг 2. Вес всех ребер, инцидентных выбранной вершине, уменьшаем на величину выбранного ребра.
- Шаг 3. Ребра с нулевым весом стягиваются в одну вершину.
- Шаг 4. Если на полученном графе образовались параллельные ребра, то остается одно из них, обладающее минимальным весом.
- Шаг 5. Если выбранные вершины стянулись в одну вершину, то перейти к шагу 6, в противном случае – к шагу 1.
- Шаг 6. Конец алгоритма. На множестве стянутых ребер есть минимальный маршрут.

ПРИМЕР 1



ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ АЛГОРИТМА 1

Достоинства:

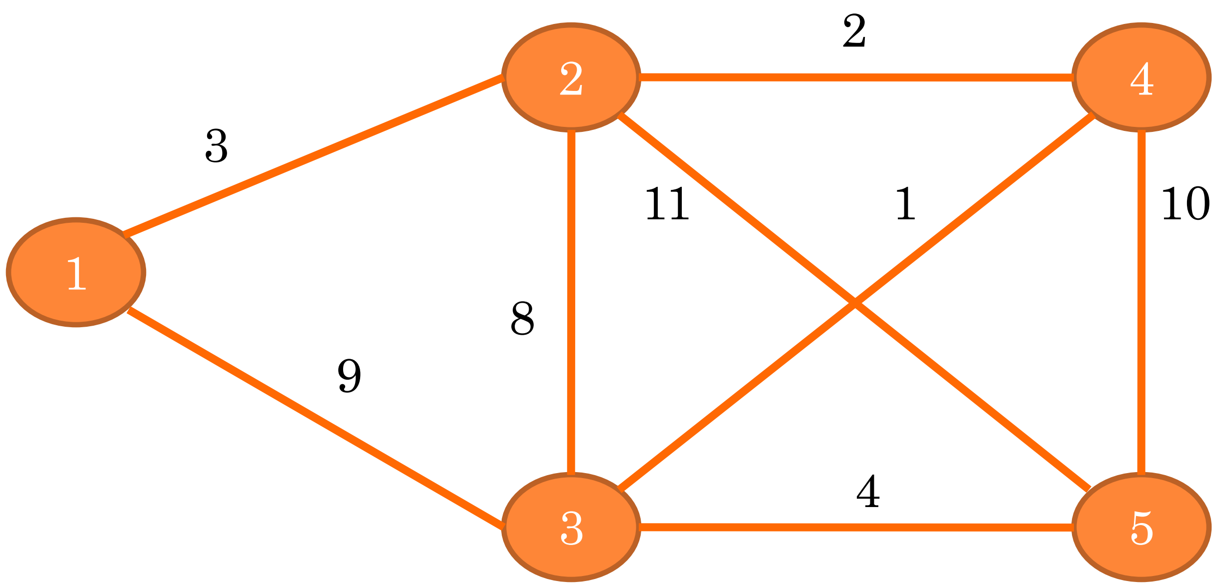
1. Число итераций пропорционально числу вершин.
2. Наглядность алгоритма.
3. Алгоритм гарантирует глобально оптимальное решение.
4. Легкость программной реализации.

Недостатки:

1. Неоднозначность полученного результата.
2. Невозможность в общем случае получить суммарный вес ребер минимального маршрута.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

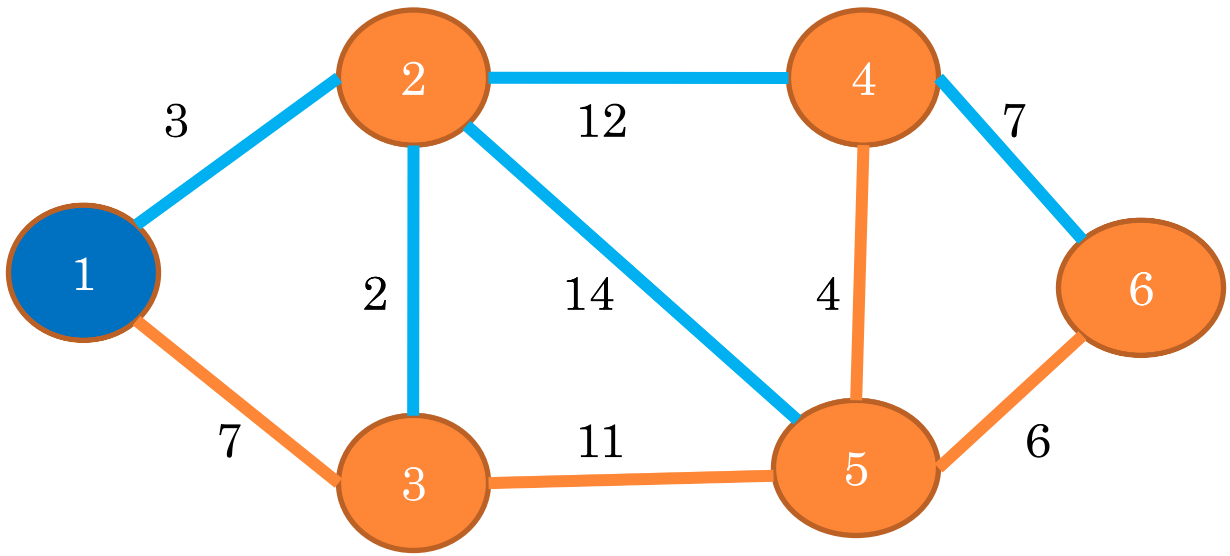
Определить минимальный маршрут между 1-й и 5-й вершинами:



ЧАСТЬ 2
МИНИМАЛЬНЫЕ МАРШРУТЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ВЫБРАННУЮ ВЕРШИНУ СО ВСЕМИ ОСТАЛЬНЫМИ

СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

- На заданном взвешенном графе требуется определить минимальные маршруты, соединяющие выделенную вершину со всеми остальными.



Синим цветом выделен минимальный маршрут, объединяющий первую и шестую вершины.

ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ниже полагаем, что выбрана s-я вершина.

$$\begin{cases} \forall t \in \{X \setminus s\} : \max\limits_{d} \prod\limits_{(i,j)\in L^d(s,t)} z(i,j) \cdot \sum\limits_{(i,j)\in L^d(s,t)} z(i,j)\cdot r(i,j) \to \min; \\ \sum\limits_{i} z(s,i) \geq 1; \\ \forall t \in \{X \setminus s\} : \sum\limits_{i} z(i,t) = 1; \\ \forall t \in \{X \setminus s\} : \sum\limits_{d} \prod\limits_{(i,j)\in L^d(s,t)} z(i,j) \geq 1; \\ \forall (i,j) \in U : z(i,j) = 1,0. \end{cases}$$

Многокритериальная оптимизация

АЛГОРИТМ 2

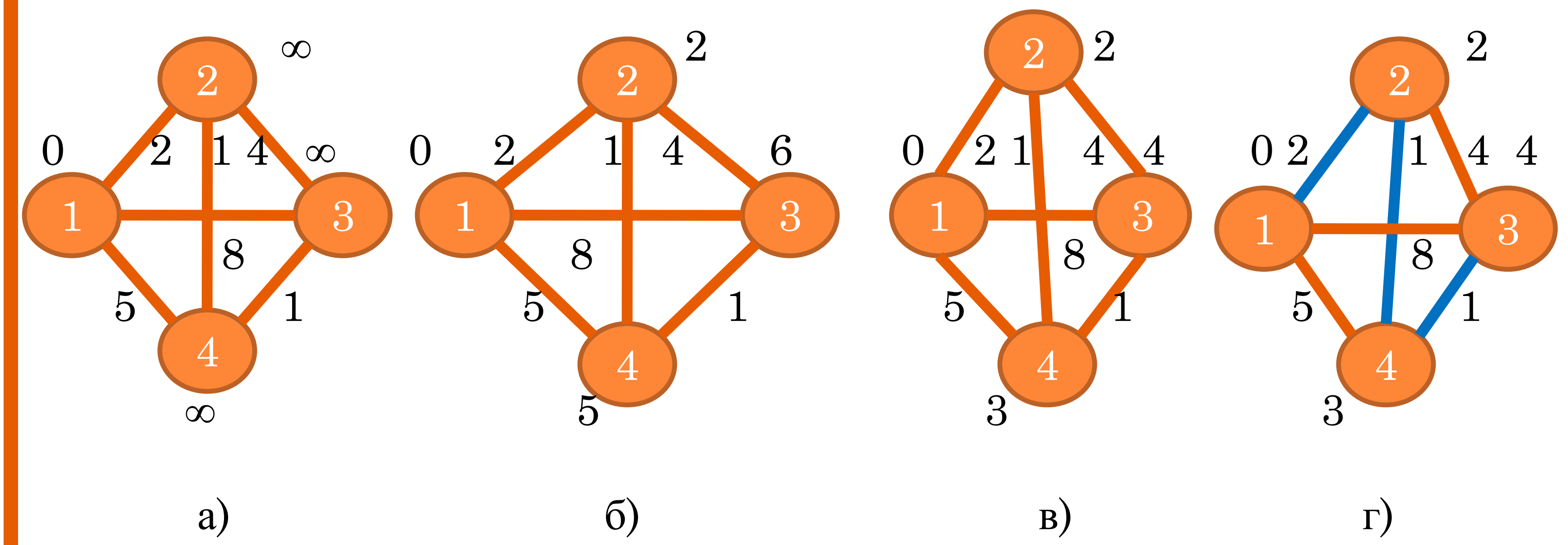
- Шаг 1. Выбранной вершине присваивается потенциал, равный нулю, а остальным – равный ∞.
- Шаг 2. Каждой i-й вершине (|i-s|>0), присваивается потенциал, равный p(i):

$$p(i) = \min\{p(i); p(j) + r(j,i)\}.$$

- Шаг 3. Если потенциал хотя бы одной вершины изменился, то перейти к шагу 2, в противном случае – к шагу 4.
- Шаг 4. Конец алгоритма. Потенциалы вершин равны величинам минимальных маршрутов до выбранной вершины.

ПРИМЕР 2

Граф G(X,U) Расстановка потенциалов



На рис. г) синим цветом выделен минимальный маршрут, связывающий первую и третью вершины.

ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ АЛГОРИТМА 2

Достоинства:

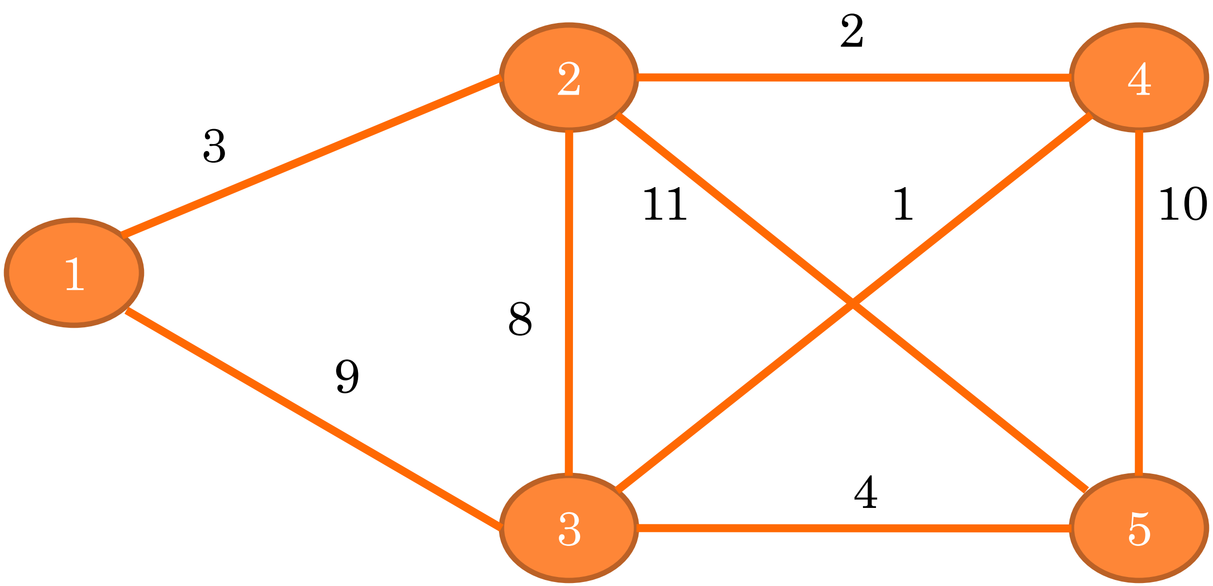
1. Гарантия глобального оптимума.
2. Отсутствие необходимости полного перебора всех маршрутов.
3. Легкость программной реализации.

Недостатки:

1. Алгоритм дает лишь возможность определить величины минимальных маршрутов, но не входящие в них ребра.
2. Невозможно *a priori* определить число итераций этим алгоритмом.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить величины минимальных маршруты между 1-й и остальными вершинами:



АЛГОРИТМ 3

Определение минимального маршрута между выбранными вершинами

ПОШАГОВОЕ ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА 3

Шаг 1. Выбирается та из выделенных вершин, которая обозначается j, потенциал которой не равен нулю.

Шаг 2. Ищется q-я вершина, для которой справедливо: $p(q) = p(j) – r(j,q)$.

Шаг 3. Ребро (j,q) принадлежит минимальному маршруту.

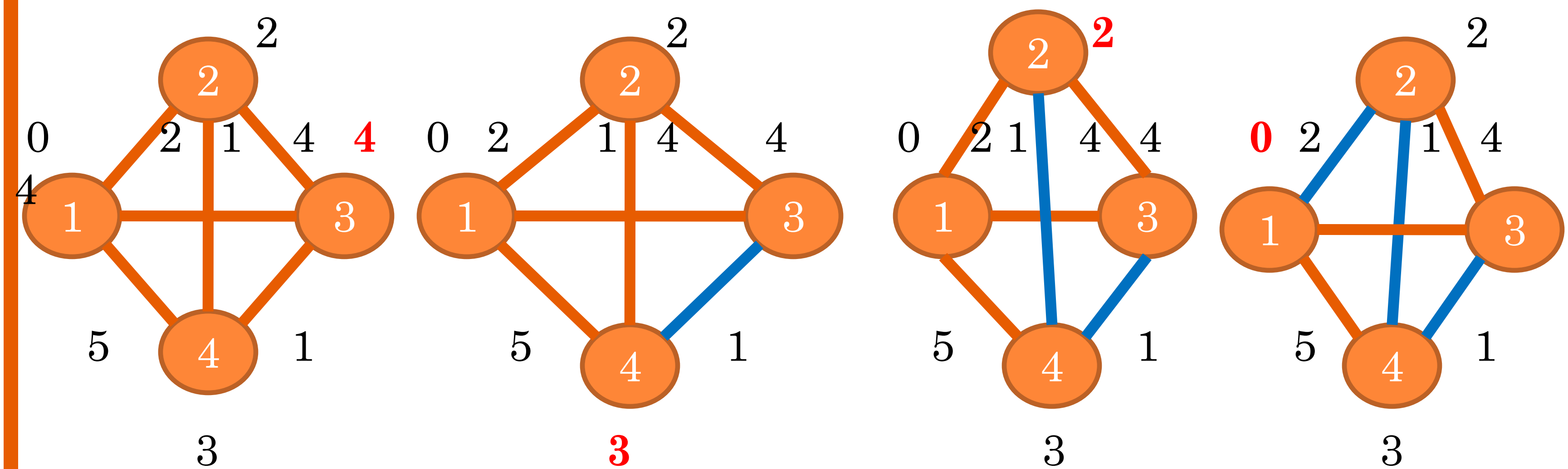
Шаг 4. Если $p(q) = 0$, то перейти к шагу 6, в противном случае – к шагу 5.

Шаг 5. Вершину q считаем вновь j-й и переходим к шагу 2.

Шаг 6. Конец алгоритма.

ПРИМЕР 3

Граф G(X,U) Потенциалы расставлены алгоритмом 2

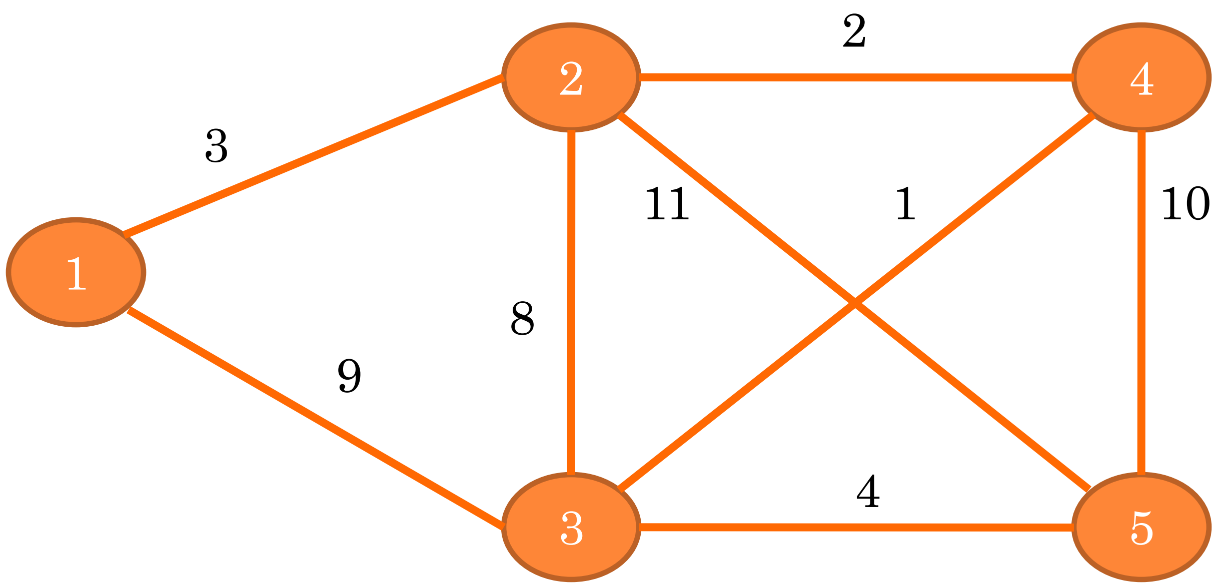


а) б) в) г)

Определение ребер, входящих в минимальный маршрут, соединяющий 1-ю и 3-ю вершины.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить ребра минимального маршрута между 1-й и 3-й вершинами приведенного ниже графа G(X,U):

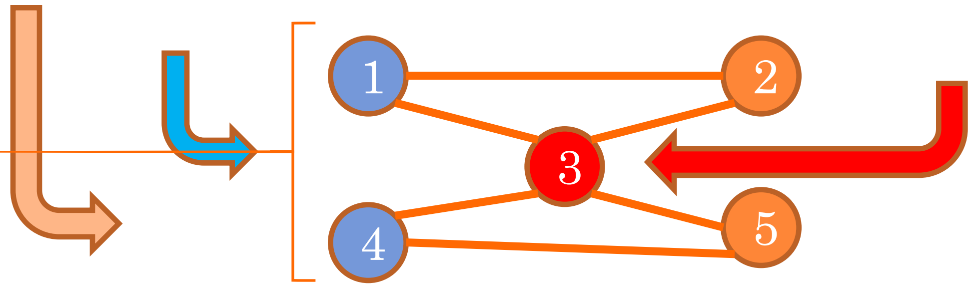


ЧАСТЬ 3 МИНИМАЛЬНЫЕ ПОКРЫВАЮЩИЕ ПОДМНОЖЕСТВА ВЕРШИН

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Покрывающим подмножеством вершин графа G((X,U) называется такое подмножество вершин X’ для которого справедливо:
   - если две вершины x_i, x_j принадлежат подмножеству X’, то ребра (*i*,*j*) на графе не существует, т. е. $(i, j) \notin U$;
   - любая вершина подмножества X\X’ соединена одним ребром с одной из вершин подмножества X’. $(i, j) \notin U$;
2. Минимальным покрывающим подмножеством вершин графа G((X,U) называется такое покрывающее подмножество вершин $X' \subset X$, мощность множества вершин которого минимальна.

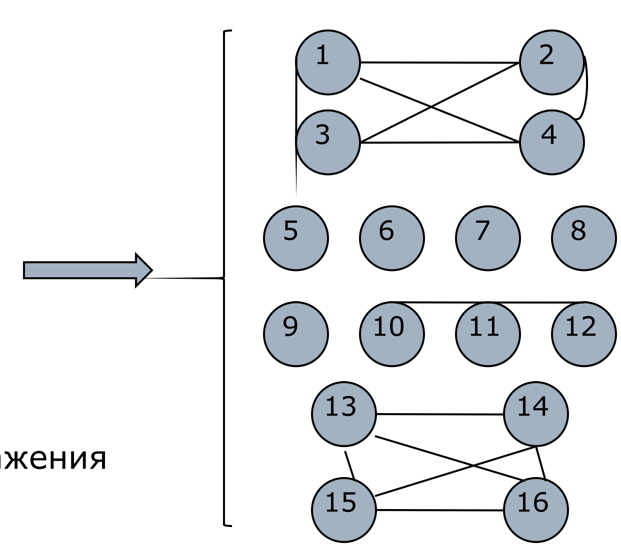
Граф G(X,U) Покрывающее подмножество выделено синим цветом. Минимальное покрывающее подмножество – красным.



Пример 4: компрессия изображений методом вариабельных фрагментов

1. Замена фрагментов изображения графом G(X,U) и выделение на графе минимального покрывающего подмножества вершин

Рис. 1. Фрагментация изображения



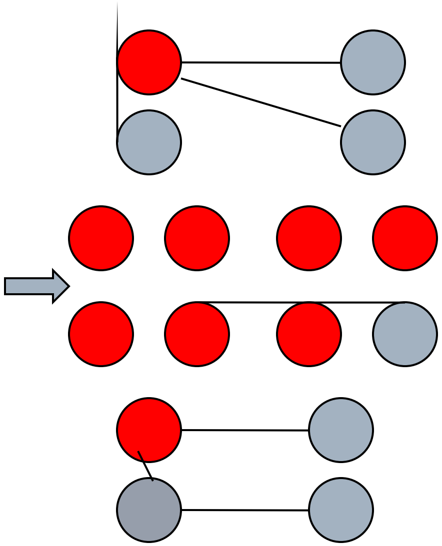
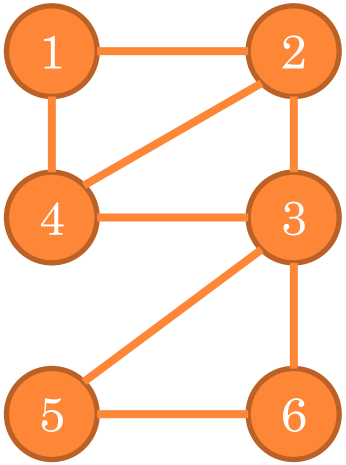


Рис. 2. Замена фрагментов графом G(X,U), где вершины отвечают фрагментам, а ребра – связям между ними.

Рис. 3. На графе G(X,U) красным цветом выделено минимальное покрывающее подмножество вершин. Коэффициент компрессии η равен $|X|/|X_1|=1.8$

Поиск минимального покрытия перебором

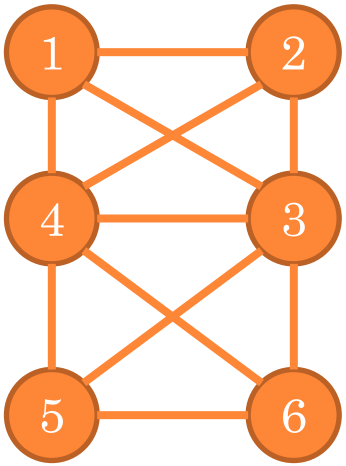


Граф G(X,U)

№	1	2	3	4	5	6	R
1	0	0	0	0	0	1	∞
2	0	0	0	0	1	0	∞
3	0	0	0	0	1	1	∞
4	0	0	0	1	0	0	∞
5	0	0	0	1	0	1	2
6	0	0	0	1	1	0	2
7	0	0	0	1	1	1	3

Таблица перебора покрытий графа G(X,U)

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО



Граф G(X,U)

№	1	2	3	4	5	6	R
1	0	0	0	0	0	1	?
2	0	0	0	0	1	0	?
3	0	0	0	0	1	1	?
4	0	0	0	1	0	0	?
5	0	0	0	1	0	1	?
6	0	0	0	1	1	0	?
7	0	0	0	1	1	1	?

Таблица перебора покрытий графа G(X,U)

САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Дать формальное описание задачи выделения покрывающего множества вершин.
2. Дать формальное описание задачи выделения минимального покрывающего множества вершин.