

Метод анализа иерархий

Основные этапы процесса принятия решения

1. Построение качественной модели рассматриваемой проблемы, т.е. выделение факторов, которые представляются наиболее важными, и установление закономерностей, которым они подчиняются
2. Построение математической модели рассматриваемой проблемы, т.е. запись в математических терминах качественной модели
3. Исследование влияния переменных на значение целевой функции, т.е. решение математических задач, возникающих на втором этапе процесса принятия решения
4. Сопоставление результатов вычислений, полученных на 3-м этапе, с моделируемым объектом, т.е. экспертная проверка

Основные направления математического программирования

- **Математическое программирование** (детерминированные задачи, предполагающие, что вся исходная информация является полностью определенной)
- **Стохастическое программирование** (задачи, в которых исходная информация содержит элементы неопределенности, либо когда некоторые параметры задачи носят случайный характер с известными вероятностными характеристиками)

Условия принятия решений

- Принятие решений в условиях определенности
- Принятие решений в условиях риска
- Принятие решений в условиях неопределенности

Описание задач ПР

- имеется некоторое начальное множество альтернатив (объектов, стратегий) X среди которых необходимо произвести выбор наилучшей альтернативы или же необходимо провести ранжирование альтернатив по предпочтению лица принимающего решение (ЛПР);
- задана главная цель F , исходя из которой, будет производиться выбор или ранжирование множества альтернатив X ;
- задано некоторое множество подцелей f_1, f_2, \dots, f_n , учитываемых при выборе или ранжировании альтернатив множества X

Метод анализа иерархий

Характеристика метода

- эффективный и доступный нематематический метод
- Основное назначение метода — решение слабоструктурированных задач принятия решений

Преимущества использования иерархии

- Иерархическое представление задачи ПР позволяет описывать влияние элементов иерархии одного уровня на элементы другого уровня.
- Процесс построения иерархий исходит из способа мышления человека (определение объектов и установление связей между ними).
- Иерархия устойчива и гибка в том смысле, что малые ее изменения (удаление и добавление элементов) не разрушают характеристик иерархии

Основное назначение иерархии в МАИ

- оценка высших уровней иерархии исходя из взаимодействия ее различных уровней

Например, для иерархии примера отбора претендентов производится оценка ее нижнего уровня (претендентов) через второй уровень (частные критерии), который в свою очередь используется для оценивания главного критерия

Этапы МАИ

1. Декомпозиция проблемы через определение ее компонент и отношений между ними, т.е. построение иерархии задачи ПР
2. Осуществление попарного сравнения отдельных компонент иерархии
3. Устранение несогласованности матриц попарных сравнений (если это необходимо)
4. Математическая обработка полученной от ЛПР информации, иерархический синтез

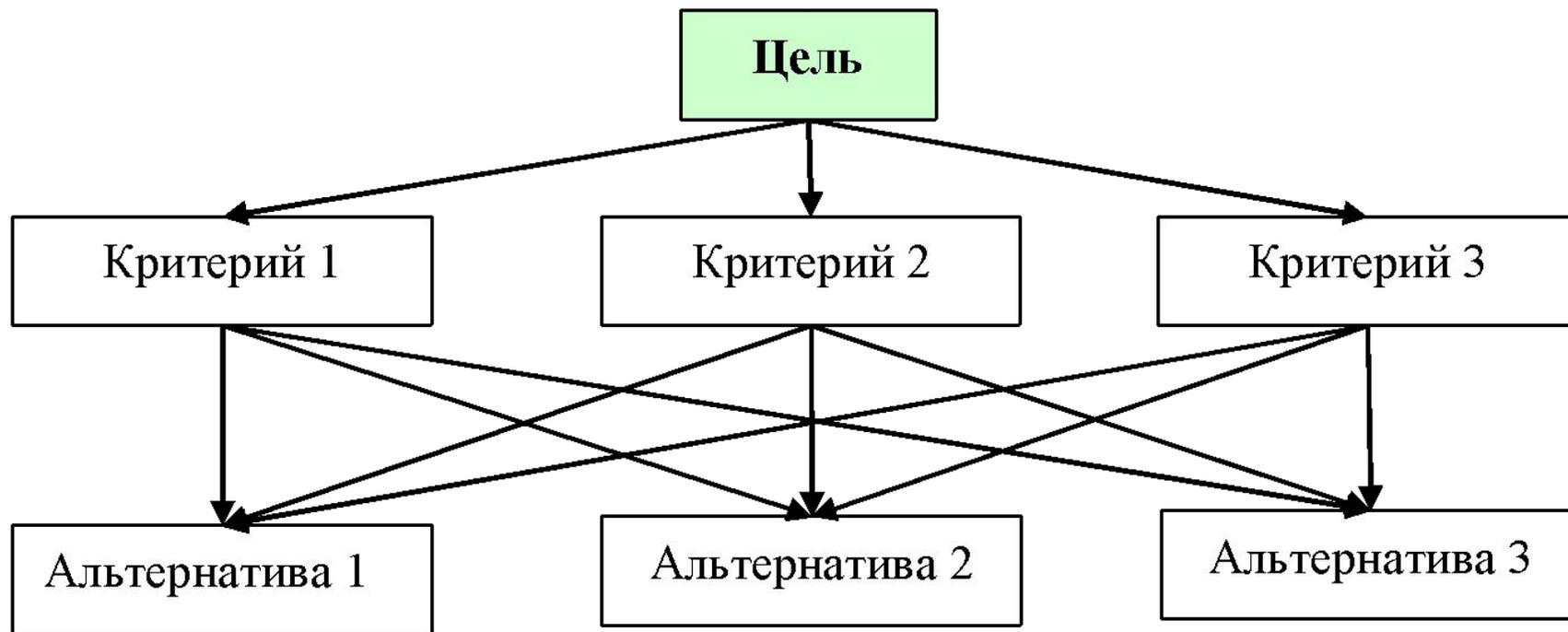
Основные принципы Метода Анализа Иерархий

- принцип декомпозиции
- принцип парных сравнений
- принцип синтеза приоритетов

Принцип декомпозиции

- В МАИ основная цель исследования и все факторы, в той или иной степени влияющие на достижение поставленной цели, распределяются по уровням.
- На первом уровне всегда находится одна вершина – цель проводимого исследования.
- Второй уровень иерархии составляют факторы, непосредственно влияющие на достижение поставленной цели.
- На последнем уровне определяются все возможные альтернативы достижения поставленной цели

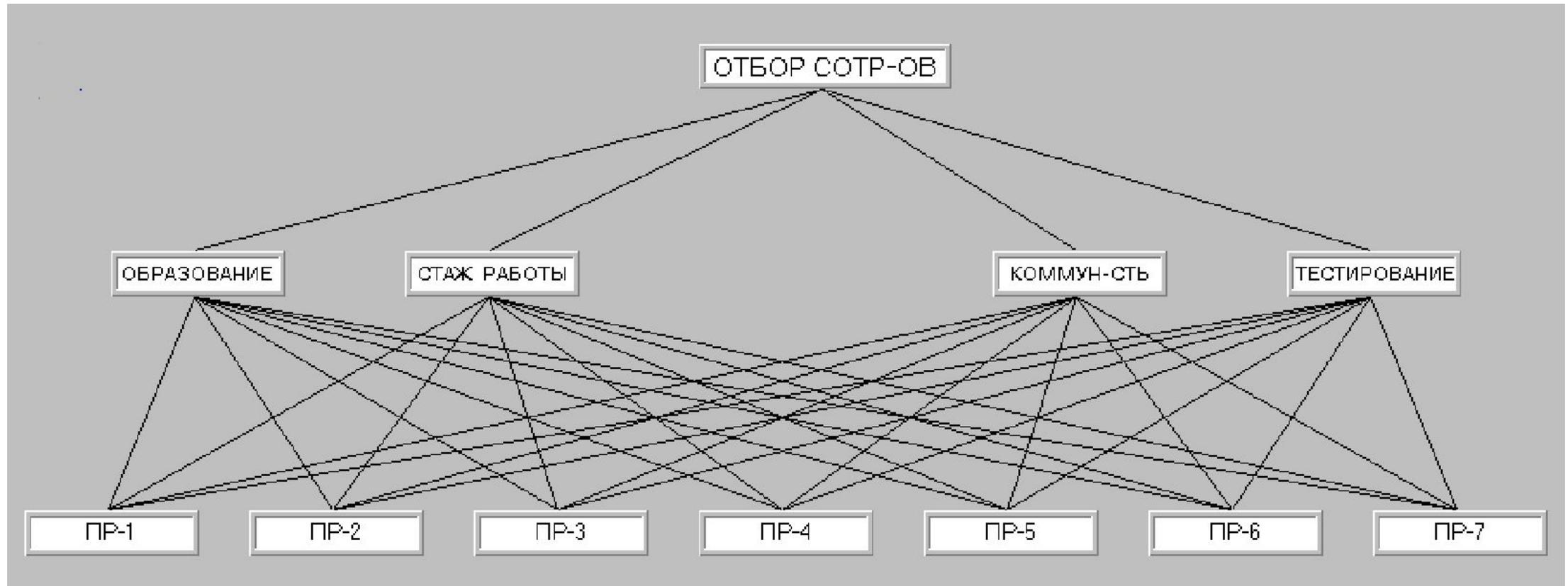
Декомпозиция задачи в иерархию



Пример

- Пусть фирме необходимо отобрать для работы несколько человек из множества претендентов. Тогда X — множество претендентов, главная цель F — ранжирование множества претендентов в порядке уменьшения их значимости для фирмы. Частные критерии, по которым будет производиться ранжирование, могут быть, например, такими: f_1 — образование, f_2 — стаж работы по специальности, f_3 — коммуникабельность, f_4 — результаты проведенного тестирования и т.д

Иерархия для примера



Принцип парных сравнений

- Принцип парных сравнений заключается в том, что все элементы задачи (факторы) сравнивается попарно по отношению к воздействию на общую характеристику, то есть определяется вес или интенсивность каждого элемента (фактора).
- Попарные сравнения — это процесс, согласно которому ЛПР сравнивает все пары объектов из некоторого списка по определенному критерию, указывая каждый раз, более предпочтительный объект (по этому критерию).

Попарные сравнения

- Обозначим множество сравниваемых элементов: $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Веса этих элементов обозначим, соответственно: $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$.

	C_1	C_2	...	C_n
C_1	V_1/V_1	V_1/V_2	...	V_1/V_n
C_2	V_2/V_1	V_2/V_2	...	V_2/V_n
...
C_n	V_n/V_1	V_n/V_2	...	V_n/V_n

- Если веса элементов $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ заранее неизвестны, то сравнения производятся с использованием субъективных

Шкала относительных важностей

Степень важности	Определение	Комментарий
1	Одинаковая важность.	Два объекта вносят одинаковый вклад в достижение цели.
3	Слабая значимость.	Опыт и суждение дают легкое предпочтение одному объекту перед другим.
5	Существенная или сильная значимость.	Опыт и суждение дают сильное предпочтение одному объекту перед другим.
7	Очень сильная и очевидная значимость.	Предпочтение одного объекта перед другим очень сильно. Его превосходство практически явно.
9	Абсолютная значимость.	Свидетельства в пользу предпочтения одного объекта в высшей степени убедительны.
2,4,6,8	Промежуточные значения между соседними значениями шкалы.	Ситуации, когда необходимы компромиссные

Причины использования шкалы

- качественные различия значимы на практике в том случае, когда сравниваемые объекты близки относительно критерия (свойства), использованного для сравнения;
- способность человека проводить качественные различия между объектами можно представить пятью качественными характеристиками: равный, слабый, сильный, очень сильный и абсолютный (для достижения большей точности, вводятся компромиссные характеристики между перечисленными выше характеристиками);
- известно, что оперативная память человека способна манипулировать одновременно $7 (\pm 2)$ единицами информации, поэтому приведенная шкала включает в себя не более девяти градаций;
- эффективность использования приведенной шкалы подтверждена практикой

Правила составления матрицы парных сравнений

- $a_{ij} = 1$ означает, что критерии i и j одинаково важны
- $a_{ij} = 5$ отражает мнение, что i -й критерий значительно важнее, чем j -й
- $a_{ij} = 9$ указывает, что критерии i чрезвычайно важнее критерия j
- Все диагональные элементы a_{ii} равны 1, т.к. выражают оценку критерия относительно самого себя
- Все остальные элементы $a_{ji}=1/a_{ij}$
- Квадратную матрицу A , в которой все элементы $a_{ji}=1/a_{ij}$, называют **обратносимметрической**

Работа эксперта

Производим попарные сравнения относительно объекта

ОТБОР СОТР-ОВ

		1.	2.	3.	4.	Приоритет
1.	ОБРАЗОВАНИЕ	1	4	3	3	0.4774
2.	СТАЖ РАБОТЫ	1/4	1	1/2	3	0.1525
3.	КОММУН-СТЬ	1/3	2	1	9	0.305
4.	ТЕСТИРОВАНИЕ	1/3	1/3	1/9	1	0.0649

СЗ: 4.4639

ИС: 0.1546

ОС: 0.1718

Применить

Закрыть

Отмена

Исследовать

Агрегированная оценка мнений экспертов

- Для агрегирования мнений экспертов принимается среднегеометрическое значение их оценок:

$$a_{ij}^{agr} = \sqrt[n]{a_{ij}^{(1)} \cdot a_{ij}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{ij}^{(n)}}$$

$a_{ij}^{(k)}$ - оценка элемента i -ой строки j -ого столбца матрицы парных сравнений k -ого эксперта

Агрегированная оценка мнений экспертов

- Агрегированная оценка в случае привлечения n экспертов, имеющих различную значимость

$$a_{ij}^{agr} = a_{ij}^{\alpha_1} \cdot a_{ij}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_{ij}^{\alpha_n}, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$$

$a_{ij}^{(k)}$ - оценка элемента i -ой строки j -ого столбца матрицы парных сравнений k -ого эксперта

Понятие согласованности

- Для того чтобы полученные с помощью МАИ результаты были адекватны ситуации, в которой принимается решение, необходимо, чтобы в матрицах попарных сравнений достигалась требуемые уровни согласованности данных.
- Согласованность означает, что решение будет согласовано с определениями парных сравнений критериев и альтернатив
- Под согласованностью матрицы попарных сравнений понимается **численная** (кардинальная) согласованность и **транзитивная** (порядковая) согласованность.

Понятие согласованности

- **Пример кардинальной несогласованности.** Пусть объект **A** лучше объекта **B** в 2 раза, а объект **B** лучше объекта **C** в 3 раза, таким образом, объект **A** лучше объекта **C** в $2 \times 3 = 6$ раз. Нарушение этого равенства в рамках выбранной шкалы считается кардинальной несогласованностью.
- **Пример транзитивной несогласованности.** Пусть объект **A** предпочтительнее объекта **B** (обозначим как $A > B$), а объект **B** предпочтительнее объекта **C** ($B > C$), таким образом, объект **A** предпочтительнее объекта **C** ($A > C$). Нарушение последнего неравенства называется транзитивной несогласованностью.

Числовые характеристики согласованности матрицы парных сравнений

Для оценки согласованности в МАИ вводятся следующие величины:

- **ИС** – индекс согласованности;
- **ОС** – отношение согласованности

Критерии согласованности матрицы парных сравнений

- В положительной обратносимметрической квадратной матрице максимальное собственное значение не меньше размерности этой матрицы
 $\lambda_{\max} \geq n$

- Положительная обратносимметрическая квадратная матрица A согласованна тогда и только тогда, когда
 $\lambda_{\max} = n$

- Положительная обратносимметрическая квадратная матрица A согласованна тогда и только тогда, когда
 $a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$

Согласованность

• $ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$ – индекс согласованности

$ОС = \frac{ИС}{СС}$ – отношение согласованности

СС – величина, соответствующая средней случайной согласованности матрицы заданного порядка, определяется по следующей таблице

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
СС	0	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51

- Допустимые значения ОС: $ОС \leq 0.1$ (10%) для $n \geq 5$,
 $ОС \leq 0.08$ (8%) для $n=4$,
 $ОС \leq 0.05$ (5%) для $n=3$
в некоторых случаях допускается значение $ОС \leq 0.2$ (20%).

Принцип синтеза приоритетов

- Принцип синтеза приоритетов заключается в разработке глобального критерия на основе системы локальных критериев. Локальные критерии определяются как векторы приоритетов каждой матрицы парных сравнений.

Расчет собственного вектора

1. определяем среднее геометрическое по каждой строке матрицы парных сравнений

$$\lambda_1 = \sqrt[n]{\frac{v_1}{v_1} \cdot \frac{v_1}{v_2} \cdot \dots \cdot \frac{v_1}{v_n}}, \lambda_2 = \sqrt[n]{\frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{v_2}{v_2} \cdot \dots \cdot \frac{v_2}{v_n}}, \dots, \lambda_n = \sqrt[n]{\frac{v_n}{v_1} \cdot \frac{v_n}{v_2} \cdot \dots \cdot \frac{v_n}{v_n}}$$

2. складываем элементы этого столбца: $S_\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$

3. делим каждый из элементов на полученную сумму

$$w_1 = \frac{\lambda_1}{S_\lambda}, w_2 = \frac{\lambda_2}{S_\lambda}, \dots, w_n = \frac{\lambda_n}{S_\lambda}$$

Векторы приоритетов

- Необходимо вычислить нормированные собственные векторы матриц парных сравнений, соответствующих максимальным собственным значениям (векторов приоритетов).
- Относительные веса критериев могут быть определены путем деления каждого элемента столбца матрицы парных сравнений на сумму элементов этого столбца
- Искомые относительные веса критериев вычисляются в виде средних значений элементов соответствующих строк нормированной матрицы **A**, т.е. для каждого уровня иерархии находим вектор приоритетов:

$W_{E_1^1}$ для первого уровня иерархии (приоритет критериев)

$$W_{E_1^2}^A, W_{E_2^2}^A, \dots, W_{E_n^2}^A$$

для второго уровня иерархии (приоритет альтернатив по каждому из n критериев)

Приближенное значение максимального собственного значения матрицы парных сравнений

- Значение λ_{\max} находится из матричного уравнения

$$\mathbf{A}W = \lambda_{\max} W$$

где W - нормированный собственный вектор матрицы \mathbf{A} ,

Приближенное значение максимального собственного значения можно определить путем вычисления вектор-столбца $\mathbf{A}e$ с последующим суммированием его элементов, т.е.

$$\lambda_{\max} = e^T \mathbf{A}W,$$

где $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ - вектор, составленный из n единиц

Иерархический синтез

- Результирующий вектор приоритетов альтернатив относительно основной цели

$$W_{E_1^1}^A = \begin{bmatrix} W_{E_1^2}^A & W_{E_2^2}^A & \dots & W_{E_n^2}^A \end{bmatrix} \cdot W_{E_1^1}$$

- Наибольшая координата полученного результирующего вектора приоритетов соответствует наилучшему выбору

Пример

- Мартин Ганс – выпускник-отличник средней школы, который получил стипендию от трех университетов А, В, С. В целях выбора университета он сформулировал два основных критерия: местонахождение университета (L) и его академическая репутация (R). Будучи отличным учеником он оценивает академическую репутацию университета выше его местонахождения ($a_{ij} = 5$). Далее Мартин оценивает университеты с точки зрения их мес

	Университет		
	А	В	С
Местонахождение	12.9%	27.7%	59.4%
Репутация	54.5%	27.3%	18.2%

- Необходимо определить наиболее оптимальный выбор университета

Решение

- Матрица парных сравнений для критериев 1-го уровня

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & R & L \\ \begin{matrix} R \\ L \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Нормализуем матрицу \mathbf{A} , разделим элементы каждого столбца на их сумму.
- Сумма элементов 1-го столбца = $1+0,2=1,2$
- Сумма элементов 2-го столбца = $5+1=6$

- Следовательно,
$$\mathbf{N}_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1.2} & \frac{5}{6} \\ \frac{0.2}{1.2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.83 \\ 0.17 & 0.17 \end{pmatrix}$$

Средние значения элементов строк

$$w_R = (0.83 + 0.83) / 2 = 0.83,$$

$$w_L = (0.17 + 0.17) / 2 = 0.17.$$

- Вектор приоритетов критериев равен
$$W_{E_1} = \begin{pmatrix} 0.83 \\ 0.17 \end{pmatrix}$$
- Матрица \mathbf{A} является согласованной, т.к. ее размерность равна $n=2$

Решение

- Составим матрицы парных сравнений альтернатив по каждому из критериев:

$$\mathbf{A}_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\mathbf{A}_L = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

Сумма элементов столбцов = [1.83, 3.67, 5.5], Сумма элементов столбцов = [8, 3.5, 1.7]

Решение

- Составим нормализованные матрицы и векторы приоритетов альтернатив по каждому критерию

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Средние значения элементов строк		
$\mathbf{N}_R =$	<i>A</i>	0.545	0.545	0.545	$w_{RA} = (0.545 + 0.545 + 0.545) / 3 = 0.545,$	$W_R^1 = \begin{pmatrix} 0.545 \\ 0.273 \\ 0.182 \end{pmatrix}$
	<i>B</i>	0.273	0.273	0.273	$w_{RB} = (0.273 + 0.273 + 0.273) / 3 = 0.273,$	
	<i>C</i>	0.182	0.182	0.182	$w_{RC} = (0.182 + 0.182 + 0.182) / 3 = 0.182,$	
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	Средние значения элементов строк		
$\mathbf{N}_L =$	<i>A</i>	0.125	0.143	0.118	$w_{LA} = (0.125 + 0.143 + 0.118) / 3 = 0.129,$	$W_L^1 = \begin{pmatrix} 0.129 \\ 0.277 \\ 0.594 \end{pmatrix}$
	<i>B</i>	0.250	0.286	0.294	$w_{LB} = (0.250 + 0.286 + 0.294) / 3 = 0.277,$	
	<i>C</i>	0.625	0.571	0.588	$w_{LC} = (0.625 + 0.571 + 0.588) / 3 = 0.594.$	

Решение

- Проверим согласованность матрицы A_L .

$$A_L \bar{w} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.129 \\ 0.277 \\ 0.594 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3863 \\ 0.8320 \\ 1.7930 \end{bmatrix}.$$

- Следовательно, $\lambda_{max} = 0.3863 + 0.8320 + 1.7930 = 3.0113$

- Для $n=3$ $CC=0.58$

$$ИС = \frac{3.0113 - 3}{3 - 1} = 0.00565$$

$$ОС = \frac{0.00565}{0.58} = 0.00974 < 0.1$$

- Уровень несогласованности матрицы A_L является приемлемым

Решение

- Проверим согласованность матрицы A_R .

$$A_R W_R^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.545 \\ 0.273 \\ 0.182 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.637 \\ 0.8185 \\ 0.5457 \end{pmatrix}$$

- Следовательно, $\lambda_{max} = 1.637 + 0.8185 + 0.5457 = 3.0112$

- Для $n=3$ $CC=0.58$

$$ИС = \frac{3.0112 - 3}{3 - 1} = 0.0006$$

$$ОС = \frac{0.0006}{0.58} = 0.00103 < 0.1$$

- Уровень несогласованности матрицы A_R является приемлемым

Решение

- Проведем иерархический синтез
- Найдем вектор приоритетов альтернатив относительно цели:

$$W^A = \begin{pmatrix} 0.545 & 0.129 \\ 0.273 & 0.277 \\ 0.182 & 0.594 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.83 \\ 0.17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.47428 \\ 0.27368 \\ 0.25204 \end{pmatrix}$$

- Наибольшая координата вектора приоритетов соответствует выбору университета А.