Тема 5

Колебания и волны

План лекции

*1. **КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.** **Гармонические колебания и их характеристики.***

2. Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники.

3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний (изучить самостоятельно).

Гармонические колебания и их характеристики

Колебаниями называют движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.

Колебания называются ***свободными*** ***(собственными)***, если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

Простейшим типом колебаний являются ***гармонические*** колебания – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

Гармонические колебания системы описываются уравнением:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ или } x = A\sin(\omega_0 t + \varphi), (1)$$

где x – ***смещение*** системы, A – максимальное значение колеблющейся величины, называемое ***амплитудой;*** ω_0 – ***круговая*** ***(циклическая)*** частота; φ – ***начальная фаза*** колебаний в момент времени $t=0$; $\omega_0 t+\varphi$ – ***фаза*** колебаний в момент времени t. Фаза определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени. Так как функция косинус изменяется в пределах от +1 до –1, то смещение может принимать значения от $+A$ до $-A$.

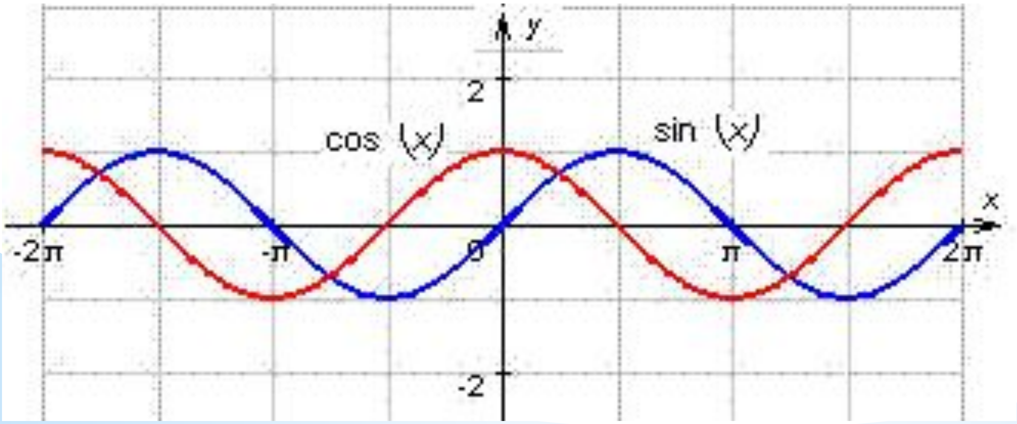
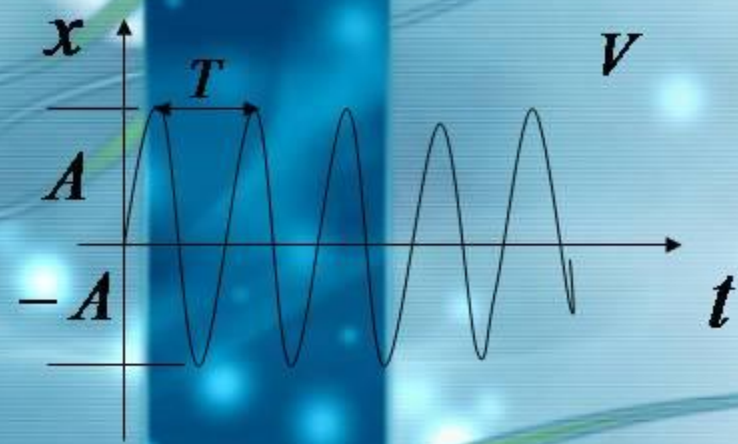
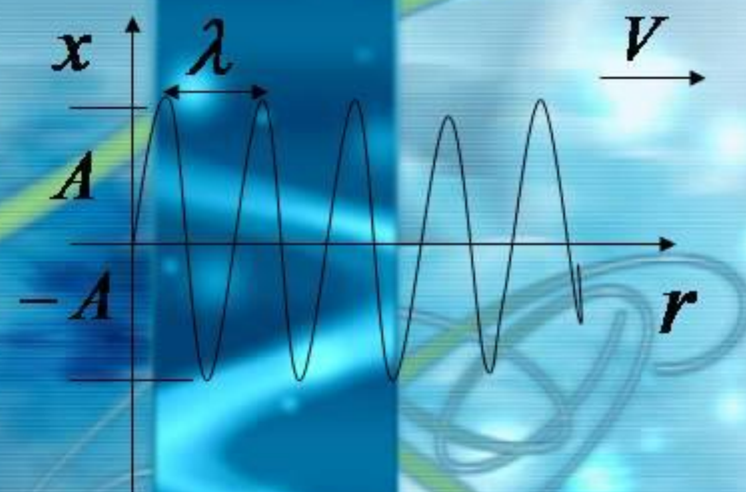


Рис. 1. Графики гармонических колебаний

Параметры волны

1. υ – скорость распространения волны
2. λ - длина волны
3. A – амплитуда колебаний волны
4. L – путь волны по прямой
5. T – период волны (время, за которое волна проходит путь λ)
6. ν - частота колебаний волны (число волн, возникающих за 1 секунду)
7. t - время, в течении которого распространяется волна.
8. x - отклонение каждой точки от положения равновесия
9. r – расстояние точки от источника колебаний



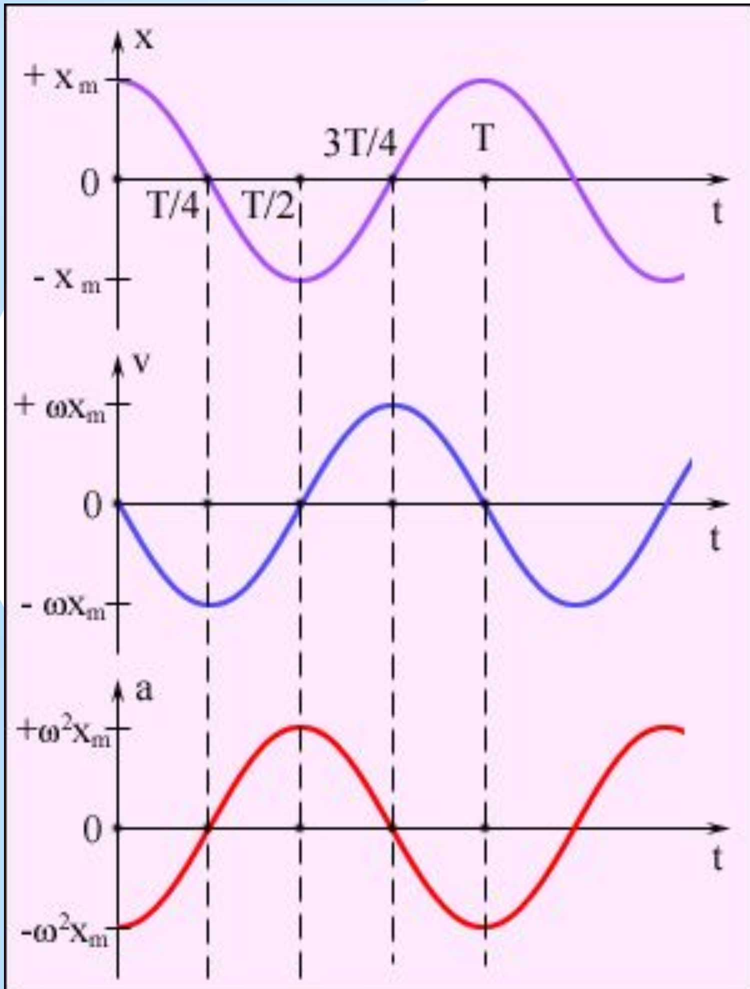


Гармонические колебания и их характеристики

Скорость гармонического колебания системы определяется как первая производная от координаты по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}).\,(2)$$

Ускорение гармонически колеблющейся системы – это первая производная от скорости по времени или вторая производная от координаты по времени:



$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi).(3)$$

В момент времени, когда *t=0*, скорость приобретает минимальное значение, а когда смещение *x* принимает максимальное отрицательное значение, то ускорение максимальное положительное значение.

Из выражения (3) следует дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0 \text{ или } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.\,(4)$$

- ***уравнение гармонического осциллятора***.

Рис. 2. Графики зависимостей смещения, скорости и ускорения от времени при гармонических колебаниях

Гармонический осциллятор.

Пружинный, физический и математический маятники

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением (4).

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. (4)$$

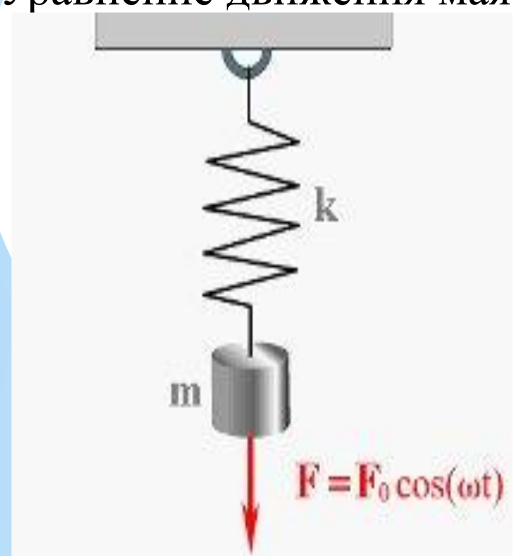
Пружинный маятник – груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине, и совершающий гармонические колебания под действием силы упругости.

Согласно *закона Гука:* $F_{упр} = -kx,$

т.е. сила упругости прямо пропорциональна деформации, где k - жесткость пружины, x - смещение. Знак минус показывает, что смещение и сила упругости направлены в противоположные стороны.

Уравнение движения маятника (П закон Ньютона):

$$m\ddot{x} = -kx \text{ или } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. (5)$$



Пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону, описываемому уравнением (1) с циклической частотой

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \; (6)$$

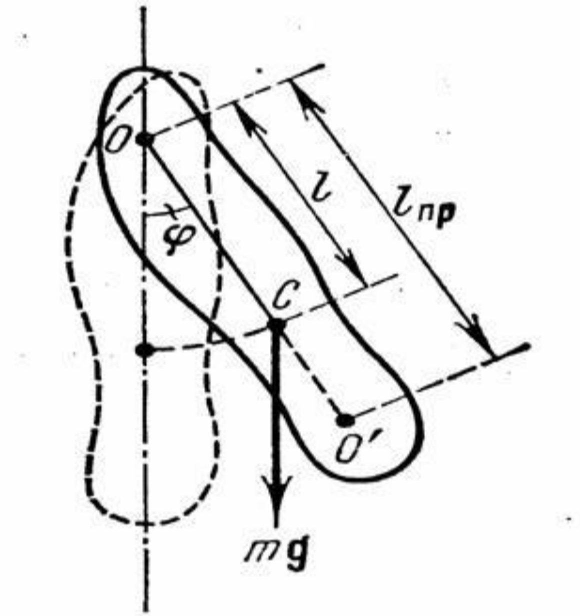
и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. (7)$$

Подставив (6) в (5), получим уравнение гармонического осциллятора (4).

Пружинный маятник является гармоническим осциллятором.

Гармонический осциллятор



Физический маятник – это твердое тело, совершающее колебания, под действием силы тяжести вокруг неподвижной оси, проходящей через точку *O*, не совпадающую с центром масс тела *C*.

Если маятник отклонен из положения равновесия на угол α, то в соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела момент возвращающей силы:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} \text{ или } M = I\varepsilon = I\ddot{\alpha}, \quad (8)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O (точка подвеса), α - вторая производная от угла поворота по времени, т.е. угловое ускорение.

С другой стороны, момент силы:

$$M = F_\tau \ell = -mg\ell \sin\alpha \approx mg\ell\alpha. \quad (9)$$

Объединив уравнения (8) и (9), их можно записать в виде $I\ddot{\alpha} + mg\ell\alpha = 0$ или $\ddot{\alpha} + \frac{mg\ell}{I}\alpha = 0.$

Обозначив $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{I}}$, получим уравнение гармонического осциллятора $\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$, решение которого имеет вид $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$

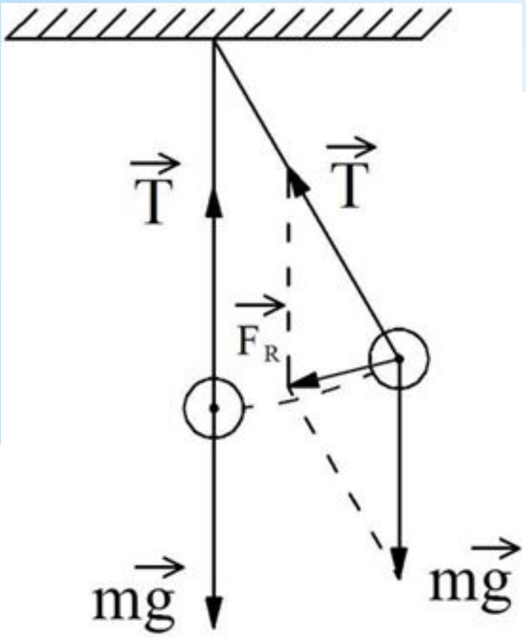
Таким образом, ***физический маятник*** является гармоническим осциллятором.

Период колебания $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (10)$

$L = \frac{I}{m\ell}$ - приведенная длина физического маятника.

Гармонический осциллятор

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (10)$$



Математический маятник – идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на длинной невесомой нерастяжимой нити, и колеблющейся под действием силы тяжести. Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити.

Момент инерции математического маятника:

$$I = m\ell^2, \quad (11)$$

где l - длина математического маятника.

Так как математический маятник можно представить как частный случай физического маятника, предположив, что вся масса сосредоточена в одной точке – центре масс, то, подставив (11) в (10); получим выражение для периода малых колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (12)$$

Сравнивая формулы (10) и (12), видим, что если приведенная длина L физического маятника равна длине математического маятника, то периоды колебаний этих маятников одинаковы. Следовательно, *приведенная длина физического маятника* – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Таким образом, **математический маятник** так же как физический и пружинный маятники является гармоническим осциллятором.