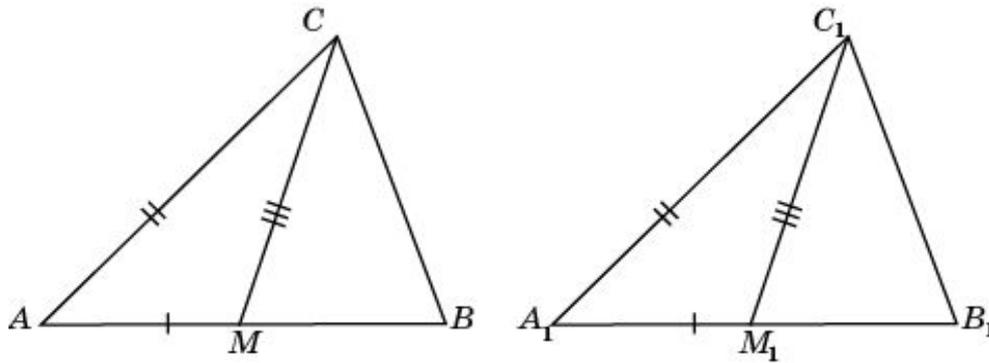


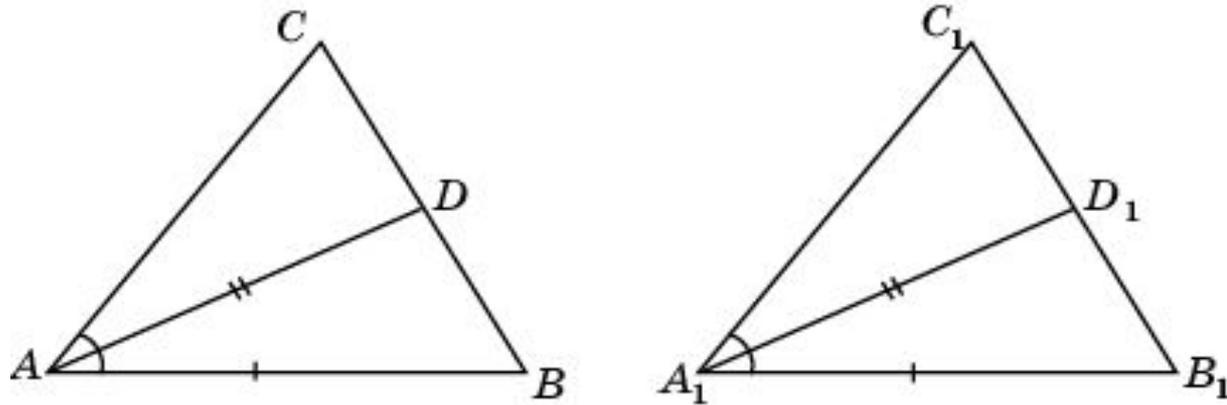
# Признаки равенства треугольников

1. Докажите, что если в треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ , медиана  $CM$  равна медиане  $C_1M_1$ , то треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.



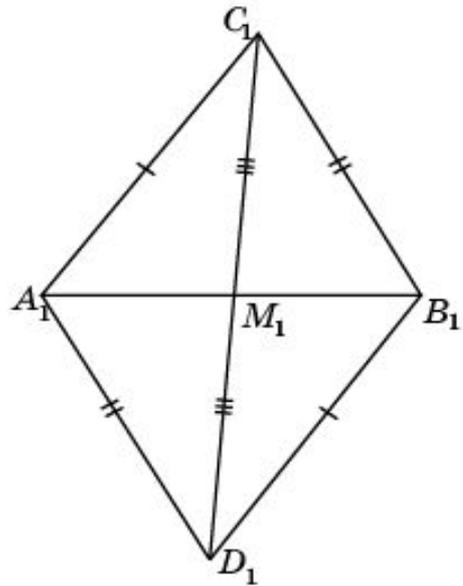
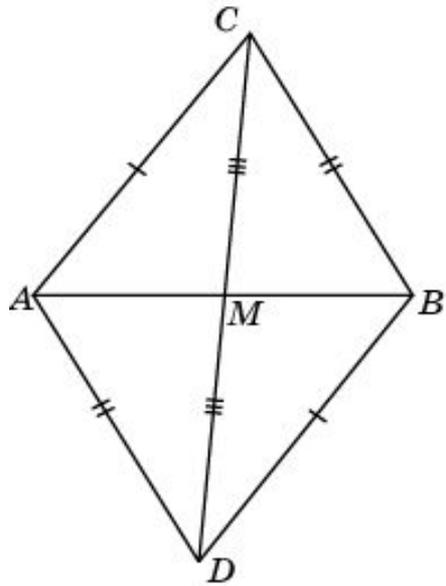
**Доказательство.** Треугольники  $ACM$  и  $A_1C_1M_1$  равны по трем сторонам. Значит, углы  $A$  и  $A_1$  равны. Таким образом, в треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ , угол  $A$  равен углу  $A_1$ . Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

2. Докажите, что если в треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  угол  $A$  равен углу  $A_1$ ,  $AB = A_1B_1$ , биссектриса  $AD$  равна биссектрисе  $A_1D_1$ , то треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.



**Доказательство.** Треугольники  $ABD$  и  $A_1B_1D_1$  равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, угол  $B$  равен углу  $B_1$ . Таким образом, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

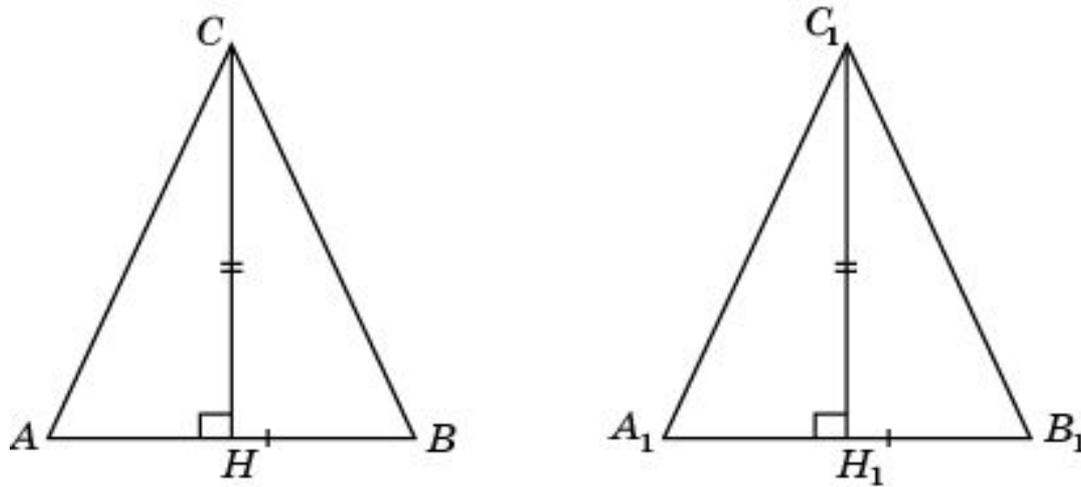
3. Докажите, что если в треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $AC = A_1C_1$ ,  $BC = B_1C_1$ , медиана  $CM$  равна медиане  $C_1M_1$ , то треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.



**Доказательство.** Продолжим медианы и отложим отрезки  $MD=CM$  и  $M_1D_1=C_1M_1$ . Тогда четырехугольники  $ACBD$  и  $A_1C_1B_1D_1$  – параллелограммы. Треугольники  $ACD$  и  $A_1C_1D_1$  равны по трем сторонам.

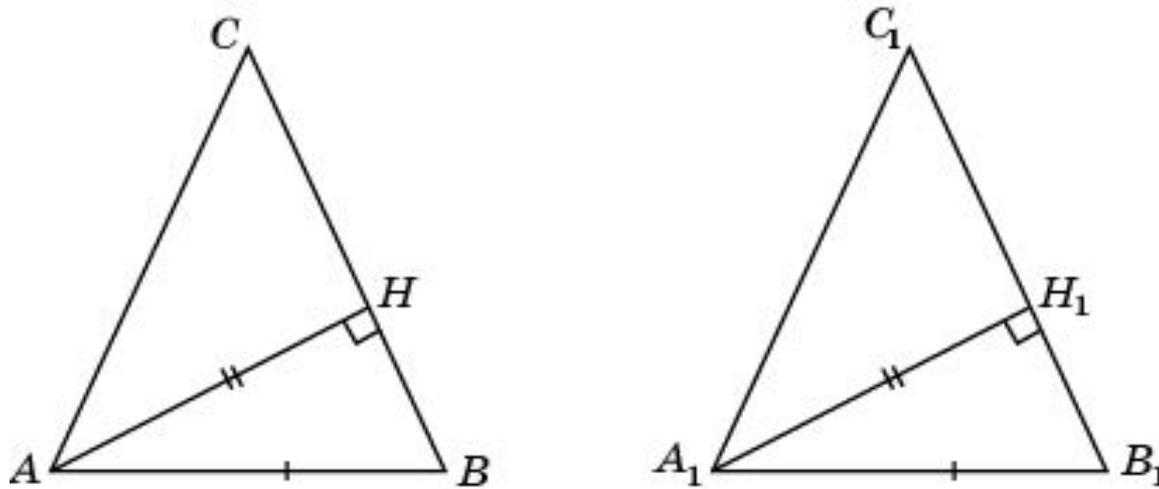
Следовательно,  $ACD = A_1C_1D_1$ . Аналогично, треугольники  $B_1C_1D_1$  и  $B_1C_1D_1$  равны по трем сторонам. Следовательно, угол  $B_1C_1D_1$  равен углу  $B_1C_1D_1$ . Значит, угол  $C$  равен углу  $C_1$  и треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны по двум сторонам и углу между ними.

4. Докажите, что если равнобедренных треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны основания  $AB$ ,  $A_1B_1$  и высоты  $CH$ ,  $C_1H_1$ , то треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.



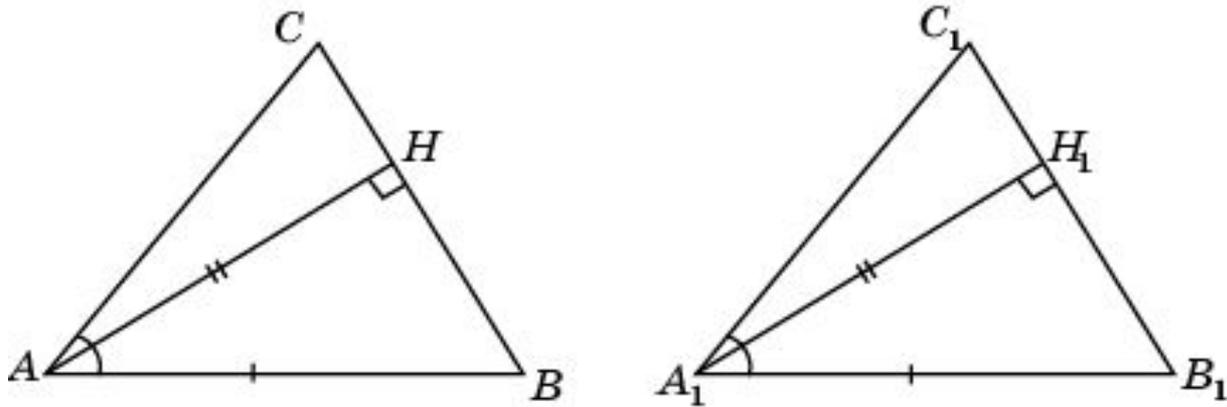
**Доказательство.** Прямоугольные треугольники  $ACH$  и  $A_1C_1H_1$  равны по двум катетам. Значит,  $AC = A_1C_1$ . Таким образом, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны по трем сторонам.

5. Докажите, что если в равнобедренных треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны основания  $AB$ ,  $A_1B_1$  и высоты  $AH$ ,  $A_1H_1$ , то треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.



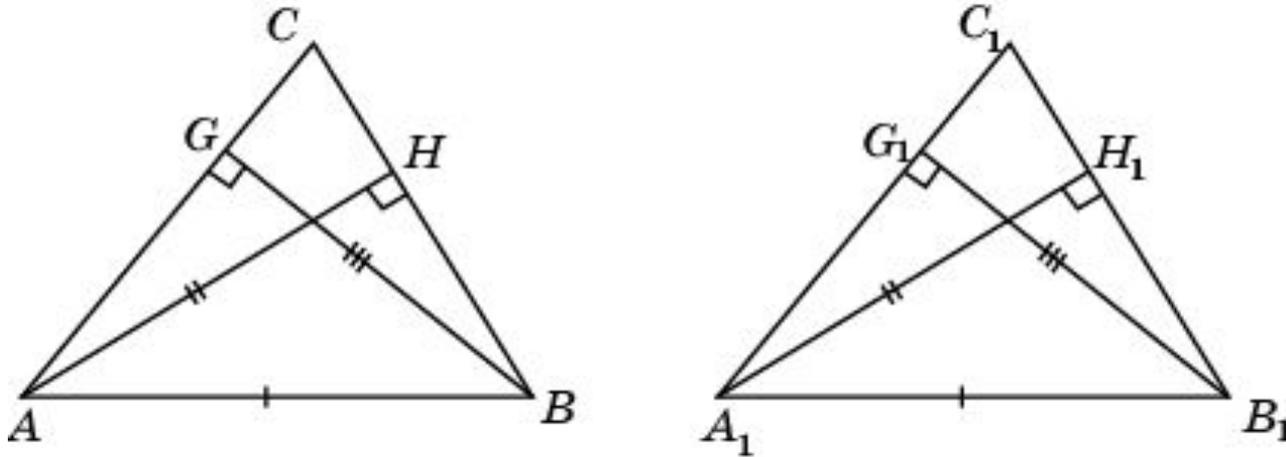
**Доказательство.** Прямоугольные треугольники  $ABH$  и  $A_1B_1H_1$  равны по катету и гипотенузе. Значит, угол  $B$  равен углу  $B_1$ . Таким образом, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

6. Докажите, что если в остроугольных треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ , угол  $A$  равен углу  $A_1$ , высота  $AH$  равна высоте  $A_1H_1$ , то треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.



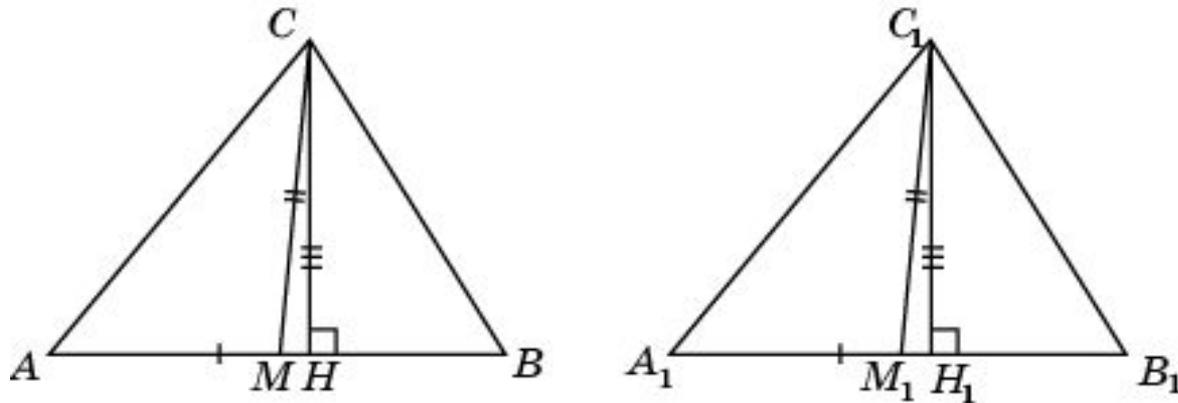
**Доказательство.** Прямоугольные треугольники  $ABH$  и  $A_1B_1H_1$  равны по катету и гипотенузе. Значит, угол  $B$  равен углу  $B_1$ . Таким образом, в треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ , угол  $A$  равен углу  $A_1$ , угол  $B$  равен углу  $B_1$ . Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

7. Докажите, что если в остроугольных треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ , высота  $AH$  равна высоте  $A_1H_1$ , высота  $BG$  равна высоте  $B_1G_1$ , то треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.



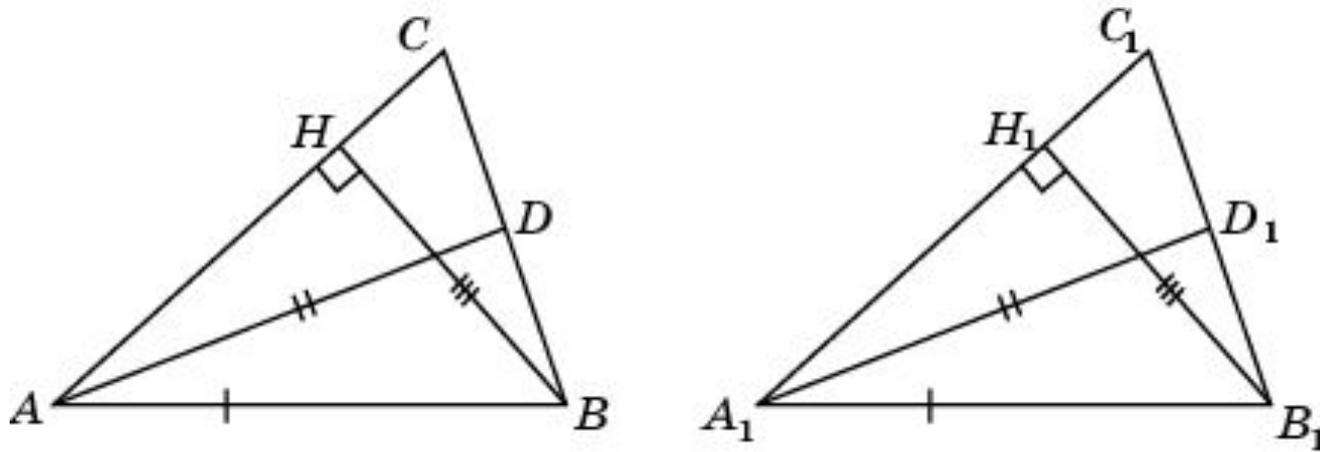
**Доказательство.** Прямоугольные треугольники  $ABG$  и  $A_1B_1G_1$  равны по катету и гипотенузе. Значит, угол  $A$  равен углу  $A_1$ . Аналогично, из равенства треугольников  $ABH$  и  $A_1B_1H_1$  следует, что угол  $B$  равен углу  $B_1$ . Таким образом, в треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ , угол  $A$  равен углу  $A_1$ , угол  $B$  равен углу  $B_1$ . Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

8. Докажите, что если в треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ , медианы  $CM$  и  $C_1M_1$  равны, высоты  $CH$  и  $C_1H_1$  равны, то треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.



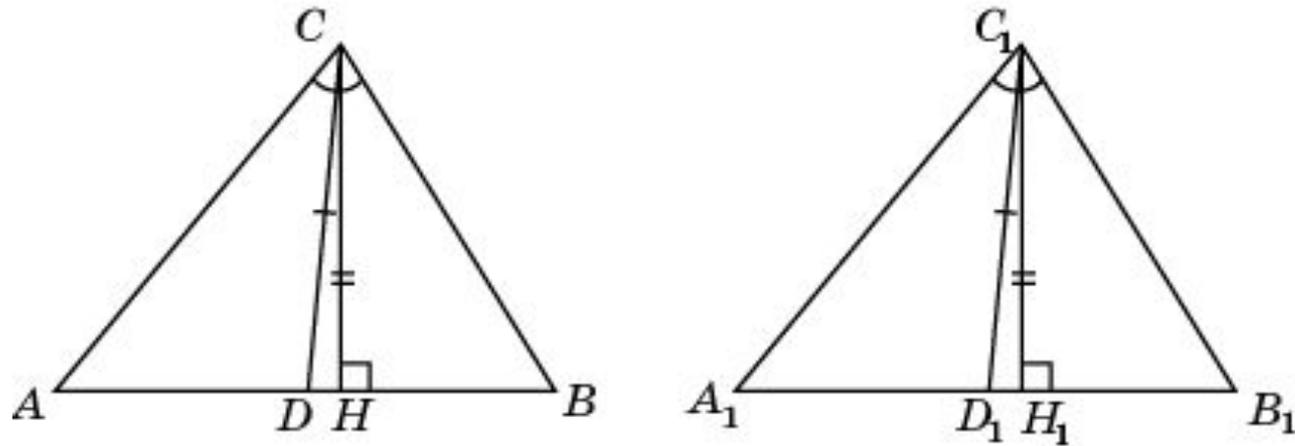
**Доказательство.** Прямоугольные треугольники  $CMH$  и  $C_1M_1H_1$  равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол  $CMH$  равен углу  $C_1M_1H_1$  и, значит, угол  $AMC$  равен углу  $A_1M_1C_1$ . Треугольники  $AMC$  и  $A_1M_1C_1$  равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно,  $AC = A_1C_1$  и угол  $A$  равен углу  $A_1$ . Таким образом, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны по двум сторонам и углу между ними.

9. Докажите, что если в треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ , биссектрисы  $AD$  и  $A_1D_1$  равны, высоты  $BH$  и  $B_1H_1$  равны, то треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.



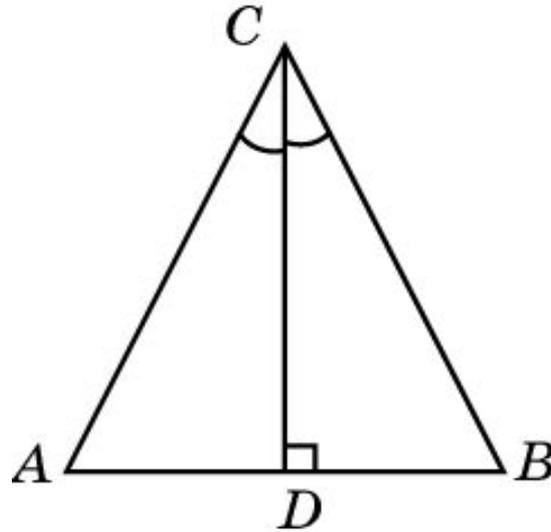
**Доказательство.** Прямоугольные треугольники  $ABH$  и  $A_1B_1H_1$  равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол  $A$  равен углу  $A_1$ . Треугольники  $ABD$  и  $A_1B_1D_1$  равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, угол  $B$  равен углу  $B_1$ . Таким образом, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

10. Докажите, что если в треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  угол  $C$  равен углу  $C_1$ , биссектрисы  $CD$  и  $C_1D_1$  равны, высоты  $CH$  и  $C_1H_1$  равны, то треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.



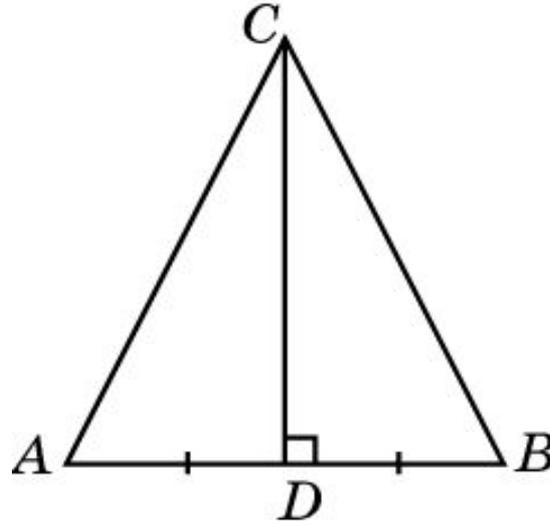
**Доказательство.** Прямоугольные треугольники  $CDH$  и  $C_1D_1H_1$  равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол  $CDH$  равен углу  $C_1D_1H_1$ . Значит, угол  $ADC$  равен углу  $A_1D_1C_1$ . Треугольники  $ADC$  и  $A_1D_1C_1$  равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно,  $AC = A_1C_1$ , угол  $A$  равен углу  $A_1$ . Таким образом, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

11. Докажите, что если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.



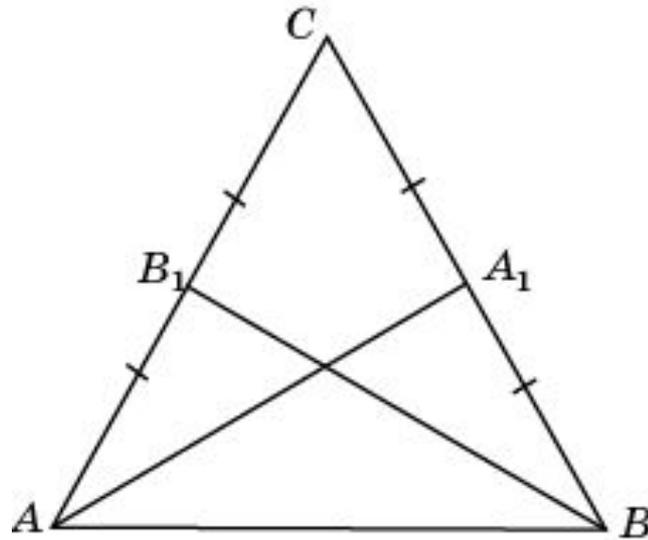
**Доказательство.** Пусть биссектриса  $CD$  треугольника  $ABC$  является его высотой. Тогда треугольники  $ADC$  и  $BDC$  равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, равны их соответствующие стороны  $AC$  и  $BC$ , т.е. треугольник  $ABC$  – равнобедренный.

12. Докажите, что если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.



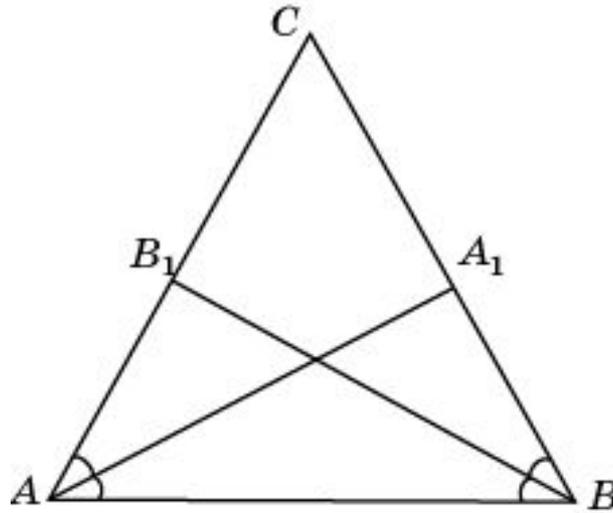
**Доказательство.** Пусть в медиана  $CD$  треугольника  $ABC$  является его высотой. Тогда треугольники  $ADC$  и  $BDC$  равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, равны их соответствующие стороны  $AC$  и  $BC$ , т.е. треугольник  $ABC$  – равнобедренный.

13. Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



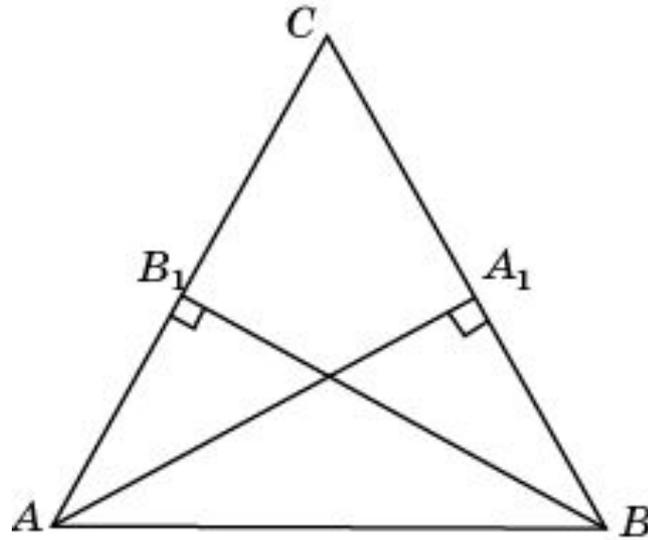
**Доказательство.** Пусть в равнобедренном треугольнике  $ABC$   $AA_1$  и  $BB_1$  – медианы, проведенные к боковым сторонам. В треугольниках  $AA_1C$  и  $BB_1C$  угол  $C$  – общий,  $AC = BC$ ,  $A_1C = B_1C$ . Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Значит,  $AA_1 = BB_1$ .

14. Докажите, что биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



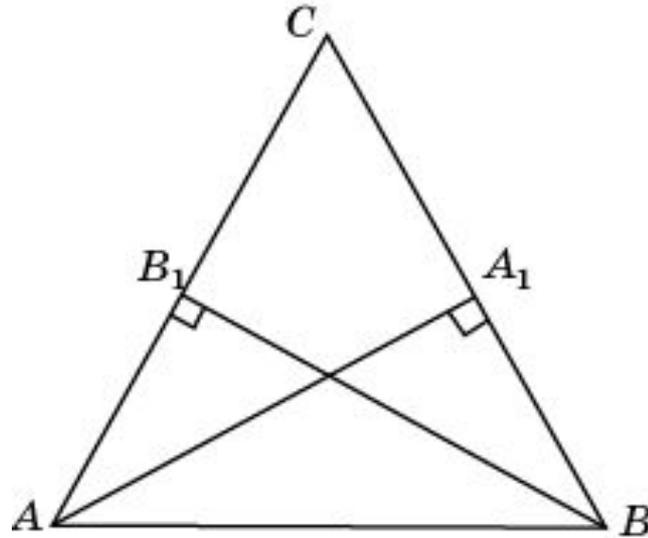
**Доказательство.** Пусть в равнобедренном треугольнике  $ABC$   $AA_1$  и  $BB_1$  – биссектрисы, проведенные к боковым сторонам. В треугольниках  $ABB_1$  и  $BA A_1$  сторона  $AB$  – общая, угол  $A$  равен углу  $B$ ,  $ABB_1 = BA A_1$ . Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит,  $AA_1 = BB_1$ .

15. Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



**Доказательство.** Пусть в равнобедренном треугольнике  $ABC$ ,  $AA_1$  и  $BB_1$  – высоты, проведенные к боковым сторонам соответственно  $AC$  и  $BC$ . Прямоугольные треугольники  $ABB_1$  и  $BA A_1$  равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, катет  $AA_1$  равен катету  $BB_1$ .

16. Докажите, что если две высоты остроугольного треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный.



**Доказательство.** Пусть в треугольнике  $ABC$  равны высоты  $AA_1$  и  $BB_1$ . Прямоугольные треугольники  $ABB_1$  и  $BA A_1$  равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол  $A$  равен углу  $B$ , значит, треугольник  $ABC$  – равнобедренный.