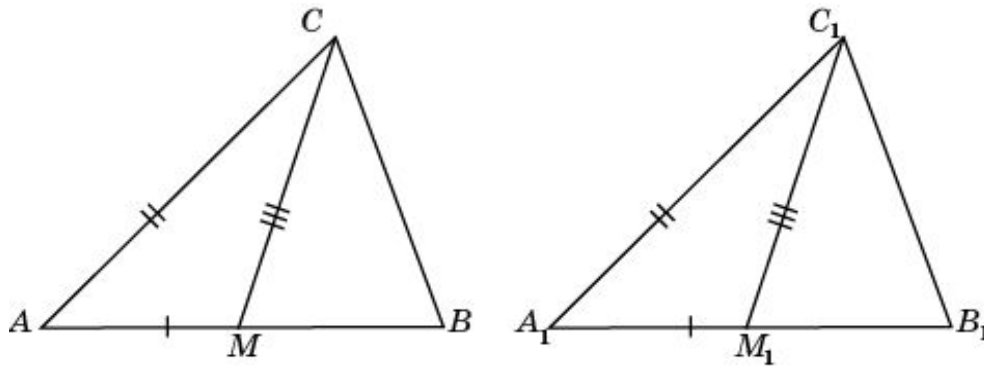


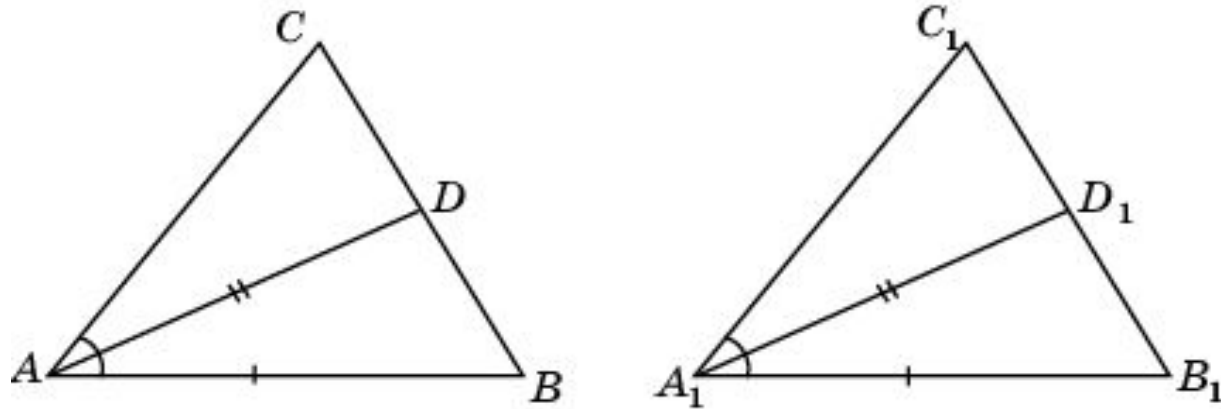
Признаки равенства треугольников

1. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1 , то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



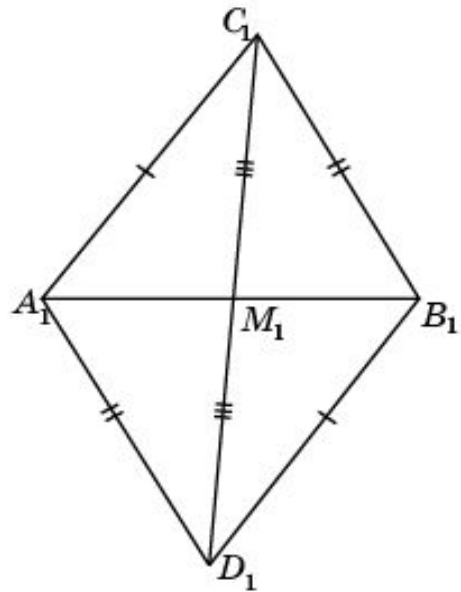
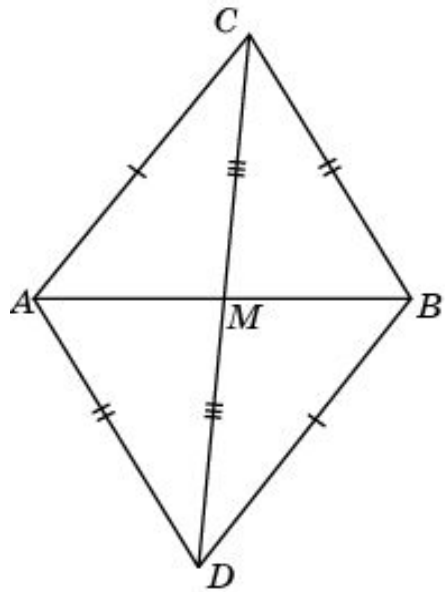
Доказательство. Треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по трем сторонам. Значит, углы A и A_1 равны. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, угол A равен углу A_1 . Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

2. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1 , $AB = A_1B_1$, биссектриса AD равна биссектрисе A_1D_1 , то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Доказательство. Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, угол B равен углу B_1 . Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

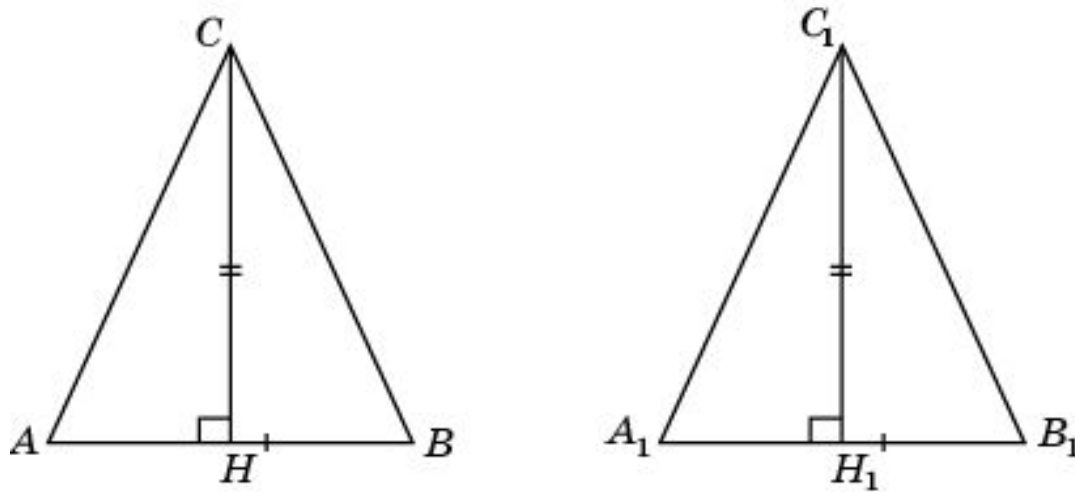
3. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1 , то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Доказательство. Продолжим медианы и отложим отрезки $MD = CM$ и $M_1D_1 = C_1M_1$. Тогда четырехугольники $ACBD$ и $A_1C_1B_1D_1$ – параллелограммы. Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по трем сторонам.

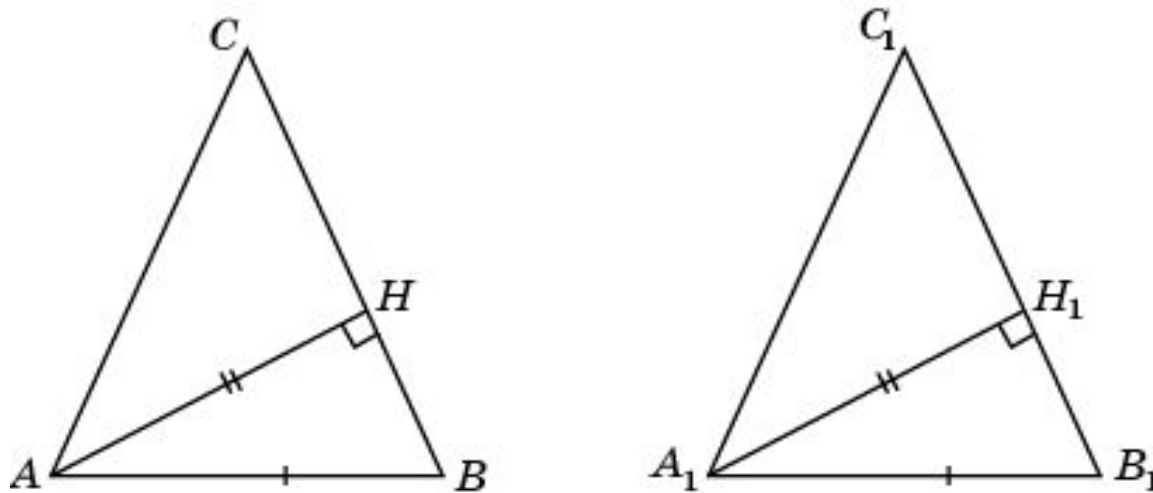
Следовательно, $ACD = A_1C_1D_1$. Аналогично, треугольники $B_1C_1D_1$ и $B_1C_1D_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, угол $B_1C_1D_1$ равен углу $B_1C_1D_1$. Значит, угол C равен углу C_1 и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

4. Докажите, что если в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB , A_1B_1 и высоты CH , C_1H_1 , то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



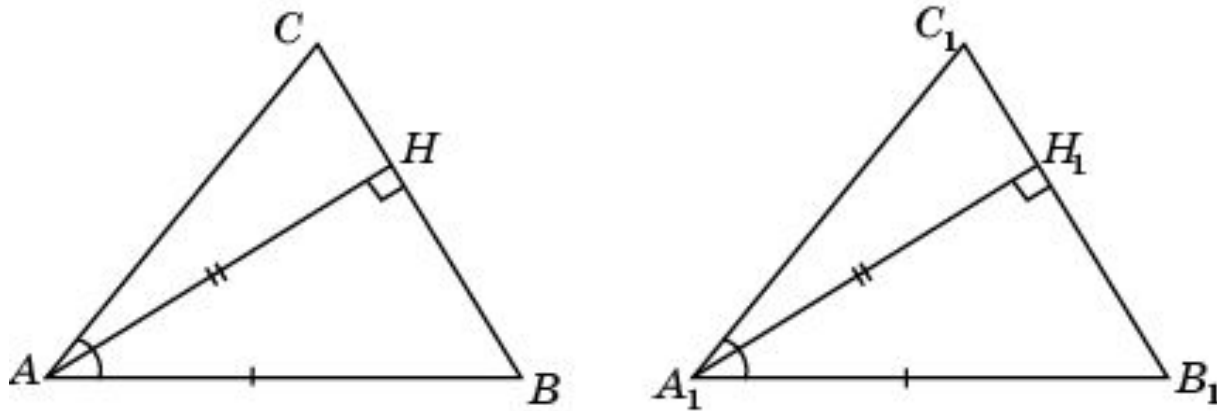
Доказательство. Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по двум катетам. Значит, $AC = A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

5. Докажите, что если в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB , A_1B_1 и высоты AH , A_1H_1 , то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



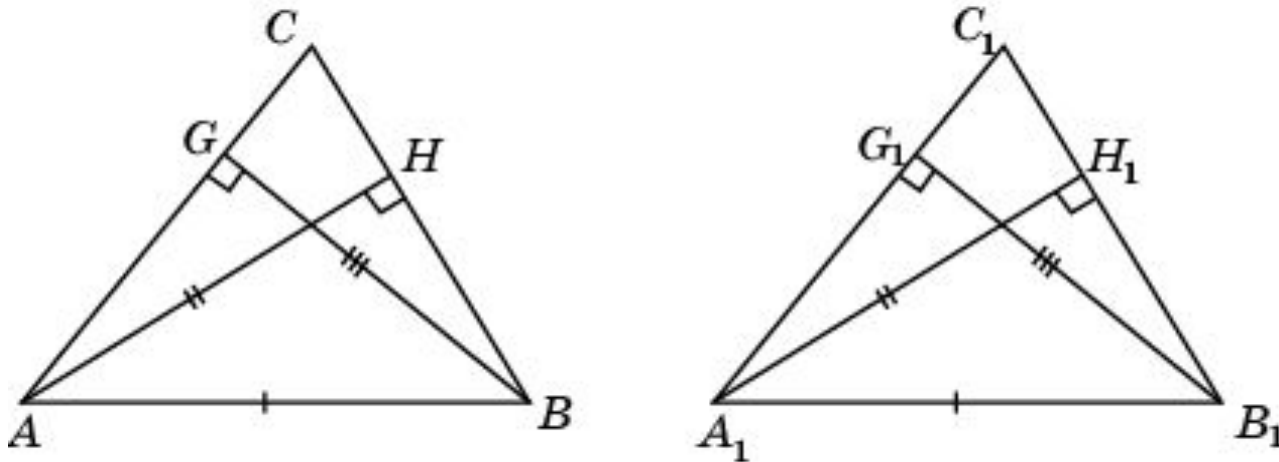
Доказательство. Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, угол B равен углу B_1 . Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

6. Докажите, что если в остроугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, угол A равен углу A_1 , высота AH равна высоте A_1H_1 , то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



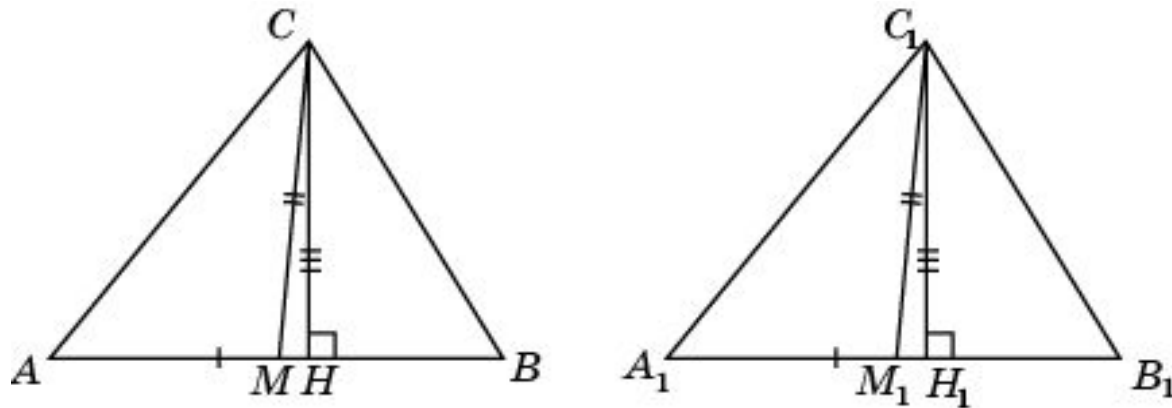
Доказательство. Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, угол B равен углу B_1 . Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, угол A равен углу A_1 , угол B равен углу B_1 . Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

7. Докажите, что если в остроугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1 , высота BG равна высоте B_1G_1 , то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



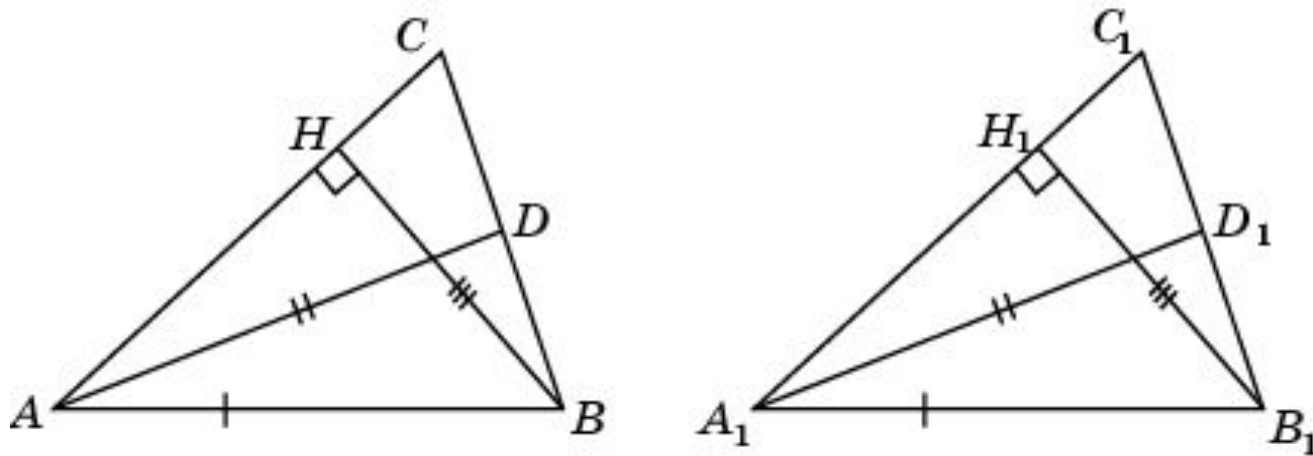
Доказательство. Прямоугольные треугольники ABG и $A_1B_1G_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, угол A равен углу A_1 . Аналогично, из равенства треугольников ABH и $A_1B_1H_1$ следует, что угол B равен углу B_1 . Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, угол A равен углу A_1 , угол B равен углу B_1 . Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

8. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



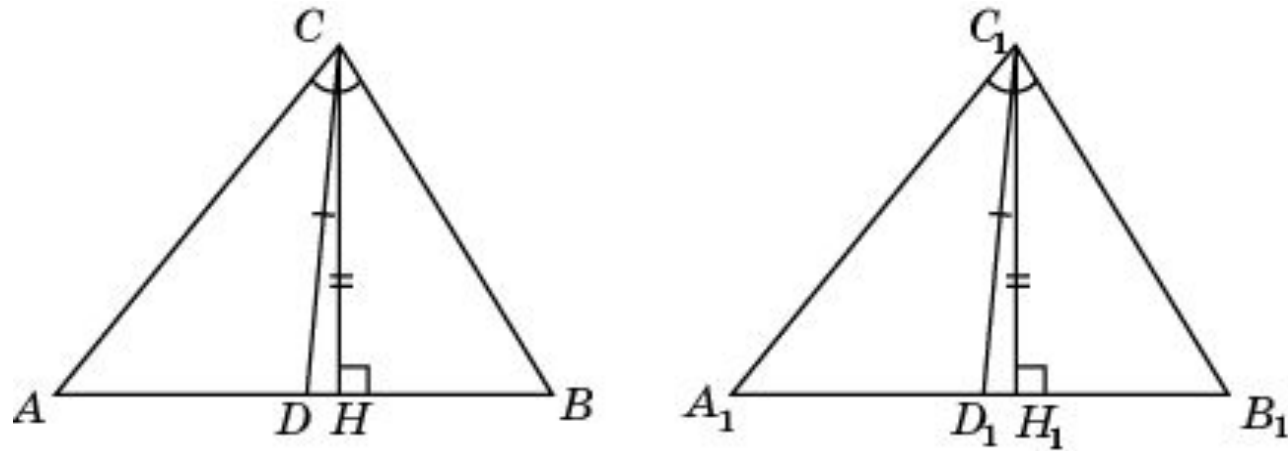
Доказательство. Прямоугольные треугольники CMH и $C_1M_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол CMH равен углу $C_1M_1H_1$ и, значит, угол AMC равен углу $A_1M_1C_1$. Треугольники AMC и $A_1M_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AC = A_1C_1$ и угол A равен углу A_1 . Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

9. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, биссектрисы AD и A_1D_1 равны, высоты BH и B_1H_1 равны, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



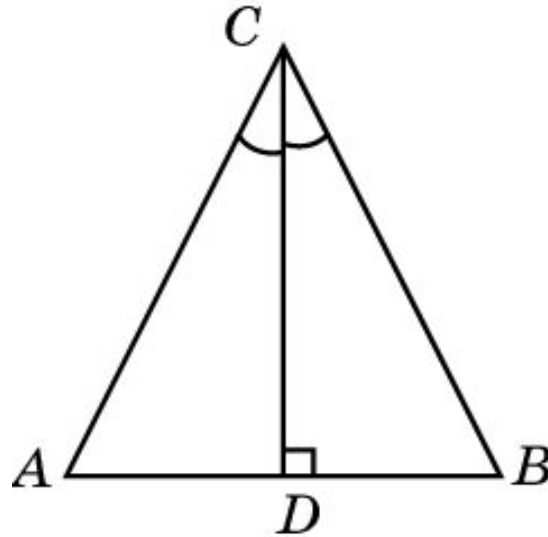
Доказательство. Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол A равен углу A_1 . Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, угол B равен углу B_1 . Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

10. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол C равен углу C_1 , биссектрисы CD и C_1D_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



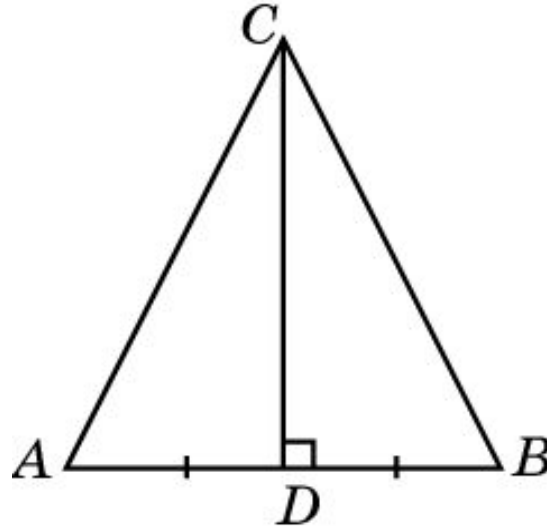
Доказательство. Прямоугольные треугольники CDH и $C_1D_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол CDH равен углу $C_1D_1H_1$. Значит, угол ADC равен углу $A_1D_1C_1$. Треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $AC = A_1C_1$, угол A равен углу A_1 . Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

11. Докажите, что если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.



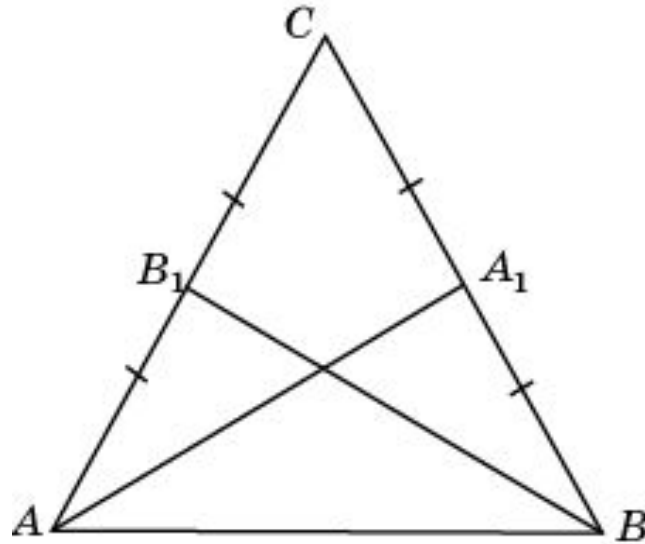
Доказательство. Пусть биссектриса CD треугольника ABC является его высотой. Тогда треугольники ADC и BDC равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, равны их соответствующие стороны AC и BC , т.е. треугольник ABC – равнобедренный.

12. Докажите, что если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.



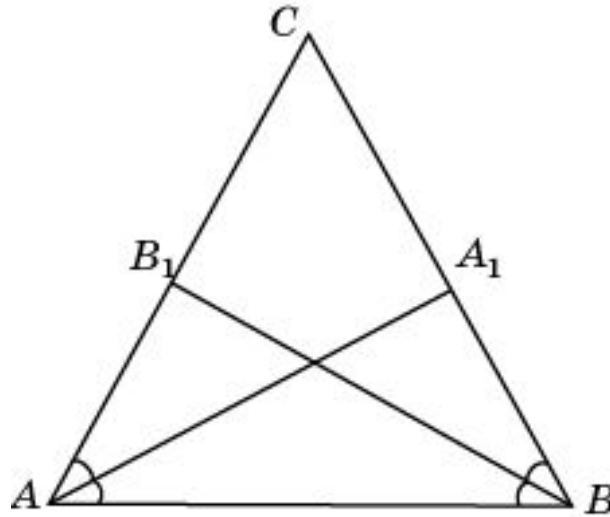
Доказательство. Пусть в медиана CD треугольника ABC является его высотой. Тогда треугольники ADC и BDC равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, равны их соответствующие стороны AC и BC , т.е. треугольник ABC – равнобедренный.

13. Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



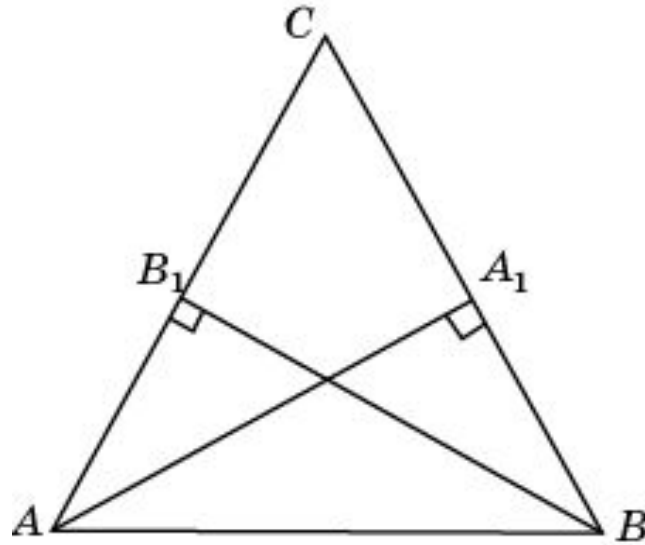
Доказательство. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC AA_1 и BB_1 – медианы, проведенные к боковым сторонам. В треугольниках AA_1C и BB_1C угол C – общий, $AC = BC$, $A_1C = B_1C$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AA_1 = BB_1$.

14. Докажите, что биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



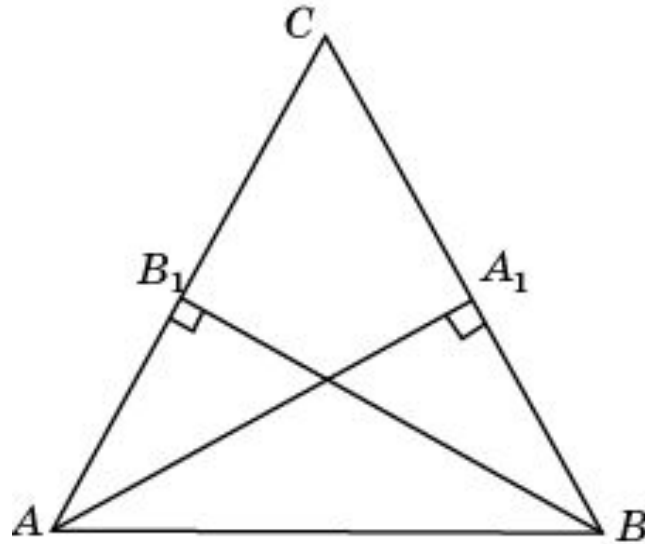
Доказательство. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC AA_1 и BB_1 – биссектрисы, проведенные к боковым сторонам. В треугольниках ABB_1 и $BA A_1$ сторона AB – общая, угол A равен углу B , $ABB_1 = BA A_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $AA_1 = BB_1$.

15. Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



Доказательство. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC , AA_1 и BB_1 – высоты, проведенные к боковым сторонам соответственно AC и BC . Прямоугольные треугольники ABB_1 и $BA A_1$ равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, катет AA_1 равен катету BB_1 .

16. Докажите, что если две высоты остроугольного треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный.



Доказательство. Пусть в треугольнике ABC равны высоты AA_1 и BB_1 . Прямоугольные треугольники ABB_1 и BAA_1 равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол A равен углу B , значит, треугольник ABC – равнобедренный.