2.2.3. Свойства основных логических функций

т законы логики

Основные логические функции обладают следующими свойствами:

1) коммутативность:

$$a \vee b = b \vee a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

2) ассоциативность:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

3) идемпотентность конъюнкции и дизъюнкции:

$$a \vee a = a$$

$$a \cdot a = a$$

4) дистрибутивность:

а) конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$a \cdot (b \vee c) = (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$$

б) дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$a \vee (b \cdot c) = (a \vee b) \cdot (a \vee c)$$

5) двойное отрицание: $\overline{\overline{a}} = a$

6) правило де Моргана:

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} \vee \bar{b}$$

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

7) правило склеивания:

$$a \cdot b \vee a \cdot \bar{b} = a$$

$$(a \vee b) \cdot (a \vee \bar{b}) = a$$

;

8) правило поглощения:

$$a \vee ab = a$$

$$a \cdot (a \vee b) = a$$

$$a \vee \bar{a}\, b = a \vee b$$

$$a \cdot (\bar{a} \vee b) = a \cdot b$$

9) действия с константами:

$$a \vee 0 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \vee 1 = 1$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \vee \overline{a} = 1$$

$$a \cdot \overline{a} = 0$$

Свойства основных булевых функций доказываются либо путем преобразования выражений, либо на основе сопоставления таблиц истинности правой и левой части равенства.

Пример. Доказать, что $\overline{a \vee b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

С учетом таблиц истинности элементарных логических операций определяем последовательно значения функций, указанных в верхней строке для всех возможных значений аргументов и , т.е. построим для них соответствующие им таблицы истинности

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a} \cdot \overline{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Так как значения функций $\overline{a \vee b}$ и $\overline{a} \cdot \overline{b}$ на всех наборах совпадают, то эти функции равны.

2.2.4. Задание функции формулой. Эквивалентные преобразования логических выражений

Понятие формулы вводится для формализации представления и записи простого или сложного высказывания.

Формула рассматривается как некоторый способ реализации функции и вводится индуктивно в соответствии со следующим правилом: если *A* **и** *B* **– высказывания (простые или сложные, постоянные или переменные), то запись значения истинности каждого из этих высказываний – есть формула; если А и В – формулы, то выражения**

«$A * B$**» и «**$\bar{A}$**» (где символ * обозначает знак одной из рассмотренных выше элементарных логических операций) – тоже формулы.**

Таким образом, рассмотренные выше выражения, которыми описывались элементарные логические операции и свойства основных логических операций, - **суть формулы**. Применение по отношению к ним указанного правила позволяет получить новые формулы, соответствующие более сложным высказываниям.

Новые формулы могут быть получены на основе использования понятия суперпозиции функций.

Суперпозицией функций f_1, f_2, …, f_n называется функция f, полученная путем подстановки функций f_1, f_2, …, f_n друг в друга и переименования переменных.

Пусть имеется множество логических функций, заданных формулами $E=\{ f_1, f_2, \ldots, f_m \}$; при этом говорят, что имеет место множество формул над E. Тогда новую формулу можно получить используя следующее правило:

Пусть $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – некоторая формула над E. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – либо символы переменных, либо другие формулы над E, то $f_0(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ – тоже формула над E.

Пример. Пусть функция задана формулой

$f_0(z_1, z_2) = z_1 \to z_2$ **, и при этом имеет место равенство**

$$z_1 = A_1 = x_1 \vee x_2, \quad z_2 = A_2 = x_3$$

Тогда новую формулу E **над можно получить путем подстановки** A_1 **и** A_2 **в исходную формулу:**

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \to x_3$$

Полученную формулу вновь представим как исходную, и, полагая далее

$$A_1 = f_0(x_1, x_2, x_3), \;\; A_2 = x_3, \;\; A_3 = x_1 \cdot x_2$$

делаем вновь подстановку.

Тогда новая формула над *E* :

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = (((x_1 \vee x_2) \to x_3) \vee x_3) \to x_1 \cdot x_2$$

Логические операции обладают различным приоритетом, с точки зрения порядка выполнения их в выражении. Принят следующий порядок выполнения операций в булевой алгебре: в первую очередь вычисляются выражения, над которыми стоит знак отрицания, далее выполняются операции конъюнкции , а затем дизъюнкции .

Если выражение, заключенное в скобках, представляет конъюнкцию или имеет общий знак отрицания, то скобки опускаются.

Сопоставляя введенные выше понятия логической функции и формулы, следует иметь ввиду, что

логическая функция - это зависимость между логическими переменными, однозначно определяемая таблицей истинности, а

формула это выражение, которое используется для описания логической функции, причем одна и та же логическая функция может описываться несколькими формулами.

Пример. Рассмотрим две формулы:

$$f(x_1,x_2) = x_1 \mid x_2$$ и $$f(x_1,x_2) = \overline{x_1 \cdot x_2}$$

Несложно показать, что обе формулы представляют одну и ту же функцию, так как таблицы истинности у них одинаковы.

Формулы, соответствующие одной и той же функции, называются эквивалентными или равносильными.

Две формулы U и B называются **эквивалентными** (*равносильными*), если они реализуют одну и ту же функцию. При этом записывают: $U=B$.

Эквивалентные преобразования логических выражений. **Эквивалентные преобразования** – это такие преобразования формул, при которых сохраняется их эквивалентность. Преобразование называется **эквивалентным**, если исходная формула $U=(x_1, x_2, ..., x_n)$ и полученная в результате преобразования формула $B=(x_1, x_2, ..., x_n)$ принимают одинаковые значения на каждом наборе значений аргументов.

Эквивалентное преобразование осуществляется на основе сопоставления таблиц истинности, либо на основе применения свойств основных логических операций.

Покажем примеры эквивалентных преобразований, которые позволяют получить новые формулы для описания функций f_4 - f_8 (см. п. 1.2.2), используя только знаки операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

1.Преобразование формулы, описывающей функцию $f_4 : a \to b = \bar{a} \vee b$.

Справедливость преобразования доказывается соответствующей таблицей истинности.

a	b	$\bar{a}$	$a \to b$	$\bar{a} \vee b$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

2.Преобразование формулы, описывающей функцию $f_5 : a \sim b = ab \vee \overline{a}\overline{b} = (a \to b)(b \to a)$.

Справедливость преобразования доказывается соответствующей таблицей истинности.

a	b	$a \sim b$	ab	$\overline{a}\overline{b}$	$ab \vee \overline{a}\overline{b}$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1

3. Функция f_6

$$a \oplus b = \overline{a \sim b} = \overline{ab \vee \overline{a}\,\overline{b}} = \overline{ab} \cdot \overline{\overline{a}\,\overline{b}} = (\overline{a} \vee \overline{b}) \cdot (a \vee b)$$

4. Функция f_7

$$a | b = \overline{a \cdot b}$$

5. Функция f_8

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b}$$

Формулы, из которых построена некоторая исходная формула, называются **подформулами**.

Чаще всего эквивалентные преобразования основаны на замене подформул на эквивалентные им подформулы.

Если в формуле U заменить подформулу B на эквивалентную ей под формулу B', то формула перейдет U в эквивалентную ей формулу U'.