Векторная алгебра.

раздел 2

http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-1488/776493_0001.pdf

М. А. Дараган, С. И. Дорофеева

Практикум по векторной алгебре и аналитической геометрии

http://e-library.kai.ru/dsweb/Get/Resource-152/%D0%9C54.pdf

Э. М. Исхаков

Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Лекция №6

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ.
БАЗИС И КООРДИНАТЫ.

Основные определения

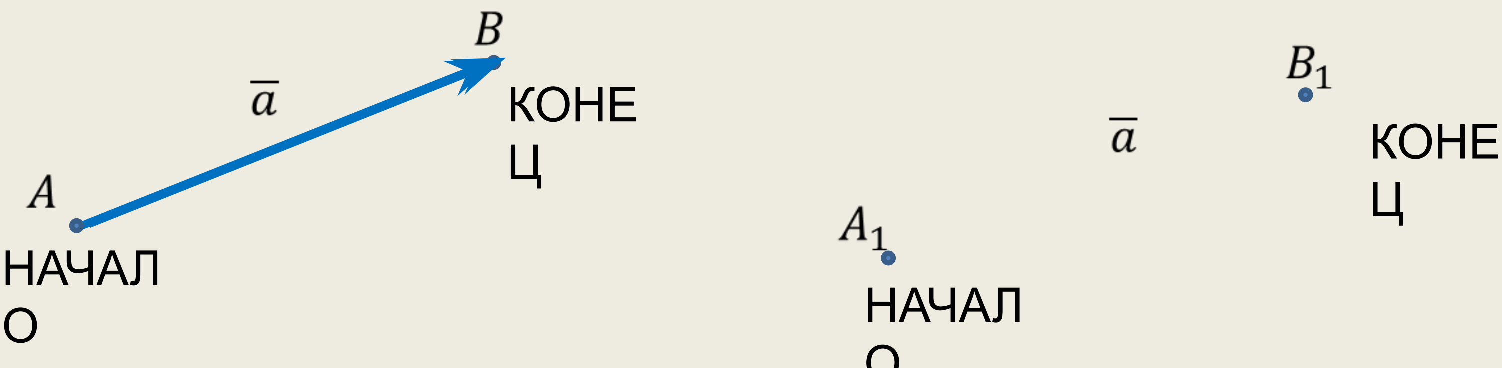
ВЕКТОР - это направленный отрезок : $\overline{AB}$;

точка A называется НАЧАЛОМ, точка B - КОНЦОМ вектора.

Отрезок $\overline{AB}$ можно передвигать параллельно самому себе.

Считается, что два направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ одинаковой длины и направления

задают один и тот же вектор $\overline{a}$: $\overline{a} = \overline{AB} = \overline{A_1B_1}$.



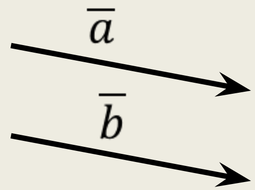
МОДУЛЬ (ДЛИНА) вектора - это число (неотрицательное) , равное длине отрезка $\overline{AB}$:

$$|\overline{a}| = |\overline{AB}|$$

Если точки A и B совпадают, то $\overline{AB} = \overline{AA} = \overline{0}$ считают тоже вектором - НУЛЕВЫМ вектором.

Его длина равна нулю, а направление для него не имеет смысла (не определено)

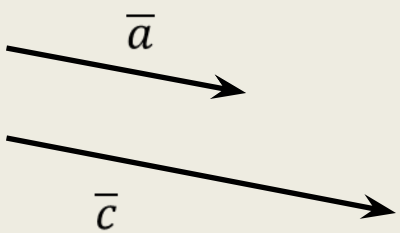
Векторы называются **РАВНЫМИ**, если они одинаково направлены и имеют равные модули: $\overline{a} = \overline{b}$.

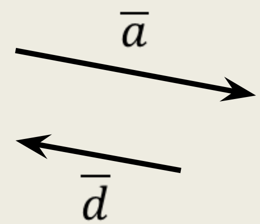


Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются **КОЛЛИНЕАРНЫМИ**. Коллинеарность обозначается $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Если направления коллинеарных векторов одинаковы, это обозначается $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{c}$;

если направления коллинеарных векторов противоположны: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{d}$





Векторы, параллельные одной плоскости, называются К**ОМПЛАНАРНЫМИ**.

Вектор $\overline{e}$, модуль которого равен ***ЕДИНИЦЕ***, называется ***ЕДИНИЧНЫМ*** ,

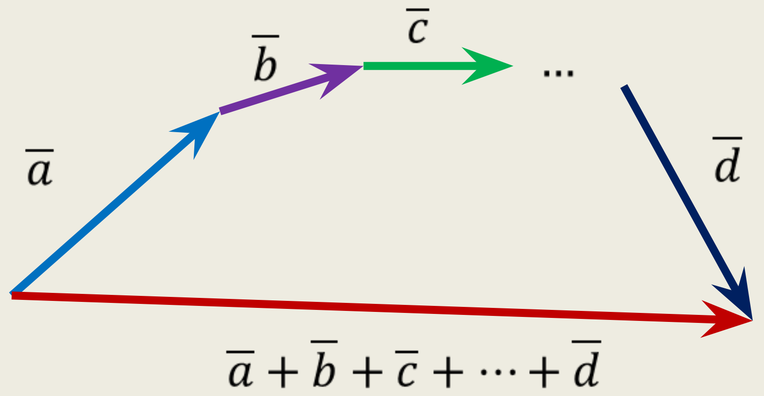
или ***ОРТ- вектором***: $|\overline{e}| = 1.$

Линейные операции над векторами

ЛИНЕЙНЫЕ операции над векторами - это СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ и УМНОЖЕНИЕ вектора НА ЧИСЛО (скаляр).

СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пусть даны векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, … , $\overline{d}$. Построим из них ЛОМАНУЮ , выбирая конец предыдущего вектора за начало следующего:

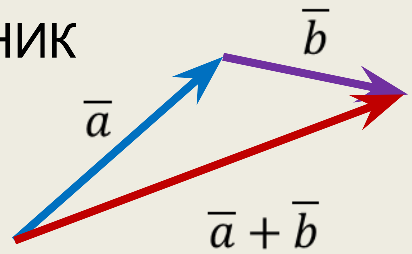


СУММОЙ векторов $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\cdots+\overline{d}$ называется вектор, который ЗАМЫКАЕТ ЛОМАНУЮ, построенную из данных векторов,

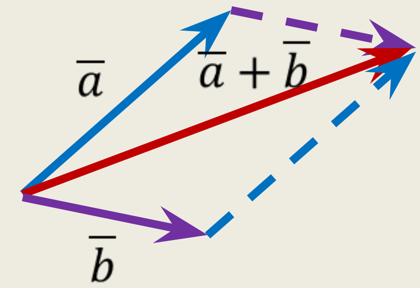
причем начало вектора СУММЫ совпадает с началом первого слагаемого, а конец - с концом последнего слагаемого (ПРАВИЛО МНОГОУГОЛЬНИКА).

Для двух векторов правило сложения имеет вид

правила ТРЕУГОЛЬНИКА :



или правила ПАРАЛЛЕЛОГРАММА:

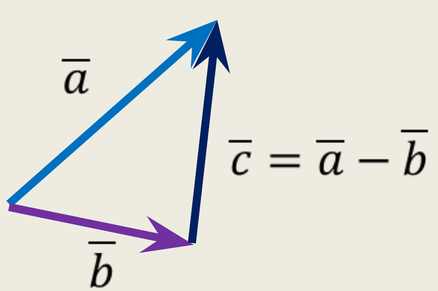


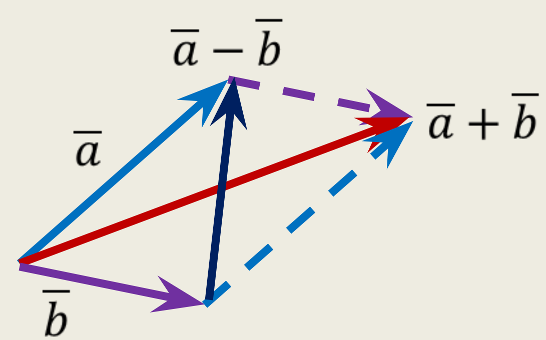
ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

РАЗНОСТЬЮ двух векторов $\overline{a}-\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$,который при сложении с вычитаемым вектором $\overline{b}$ дает уменьшаемый вектор $\overline{a}$:

$$\overline{c}+\overline{b}=\overline{a}$$

Для построения разности $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ приводим к общему началу; тогда вектор разности направлен от КОНЦА ВЫЧИТАЕМОГО вектора $\overline{b}$ к КОНЦУ УМЕНЬШАЕМОГО вектора $\overline{a}$.





ЗАМЕЧАНИЕ. Векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ служат ДИАГОНАЛЯМИ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

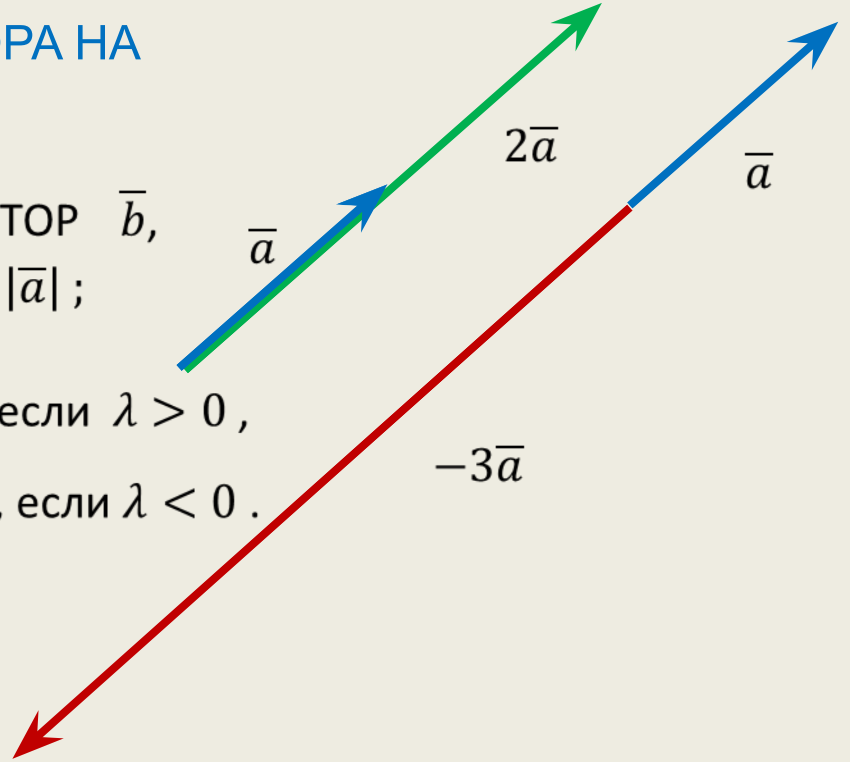
Пусть дан вектор $\overline{a}$ и число λ.

ПРОИЗВЕДЕНИЕМ $\overline{a} \cdot \lambda = \lambda \cdot \overline{a}$ называется ВЕКТОР $\overline{b}$,

длина которого $\left|\overline{b}\right| = |\lambda \cdot \overline{a}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$;

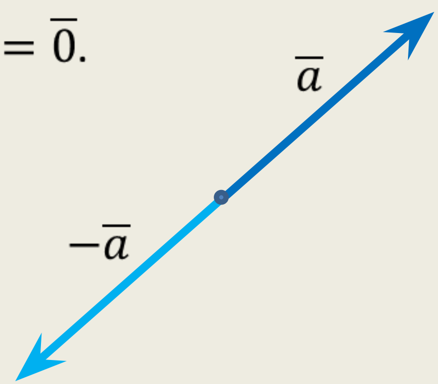
направление совпадает с направлением $\overline{a}$, если $\lambda > 0$,

и противоположно направлению $\overline{a}$, если $\lambda < 0$.



При $\lambda = 0$ длина $|\lambda \cdot \overline{a}| = 0$ и вектор $\lambda \cdot \overline{a}$ превращается в нулевой вектор (точку),
не имеющий направления.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если вектор $\overline{b} = (-1) \cdot \overline{a}$, то он называется ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ вектору $\overline{a}$ и обозначается $-\overline{a}$; очевидно, что $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$.



Условие коллинеарности двух векторов

ТЕОРЕМА 1.

Ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ КОЛЛИНЕАРНЫ
тогда и только тогда, когда существует число λ такое , что

$$\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}$$

Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть даны числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и вектора $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$.

Составим из них ЛИНЕЙНУЮ КОМБИНАЦИЮ (сумму произведений чисел и векторов) :

$$\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \cdots + \lambda_n \overline{a}_n$$

(числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются коэффициентами линейной комбинации)

Назовем линейную комбинацию ТРИВИАЛЬНОЙ , если ВСЕ коэффициенты в ней РАВНЫ НУЛЮ :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0 .$$

Назовем линейную комбинацию НЕТРИВИАЛЬНОЙ , ЕСЛИ ХОТЯ БЫ ОДИН из коэффициентов НЕ РАВЕН НУЛЮ : $\lambda_k \neq 0$.

ТРИВИАЛЬНАЯ линейная комбинация любых векторов ВСЕГДА РАВНА НУЛЮ. (ПОЧЕМУ ?)

Если существует НЕТРИВИАЛЬНАЯ линейная комбинация , РАВНАЯ НУЛЮ , то вектора называют ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМИ:

$$\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \cdots + \lambda_n \overline{a}_n = 0$$

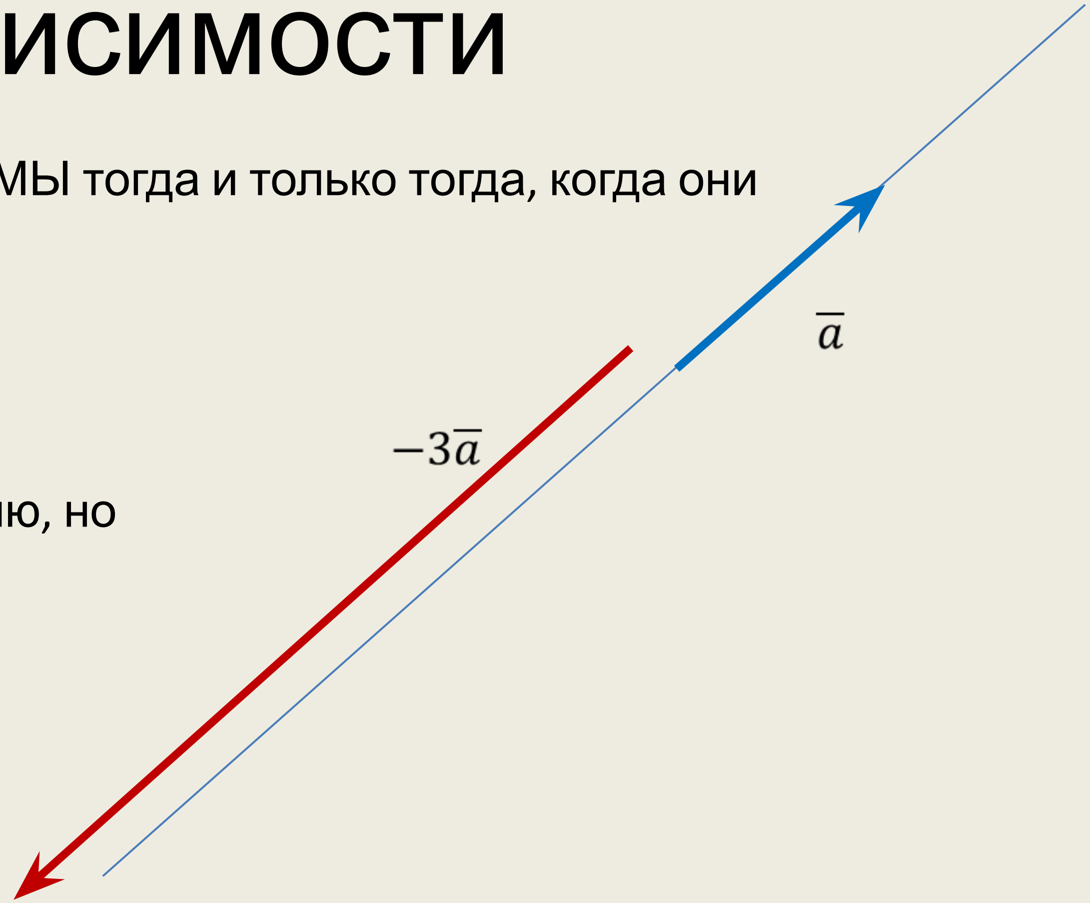
Если ЛЮБАЯ НЕТРИВИАЛЬНАЯ линейная комбинация векторов НЕ РАВНА НУЛЮ ,

то вектора называют ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫМИ

Критерий линейной зависимости

ТЕОРЕМА 2.

ДВА вектора ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ тогда и только тогда, когда они КОЛЛИНЕАРНЫ.



Пусть $\overline{b} = -3\overline{a}$; тогда $\overline{b} + 3\overline{a} = 0$;

линейная комбинация равна нулю, но она нетривиальна, так как

$$\lambda_1 = 1 \neq 0, \qquad \lambda_2 = 3 \neq 0.$$

Для трех векторов справедлива

ТЕОРЕМА 3.

ТРИ вектора ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ тогда и только тогда, когда они КОМПЛАНАРНЫ.

ЗАМЕЧАНИЕ. ЧЕТЫРЕ вектора в пространстве всегда ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ.