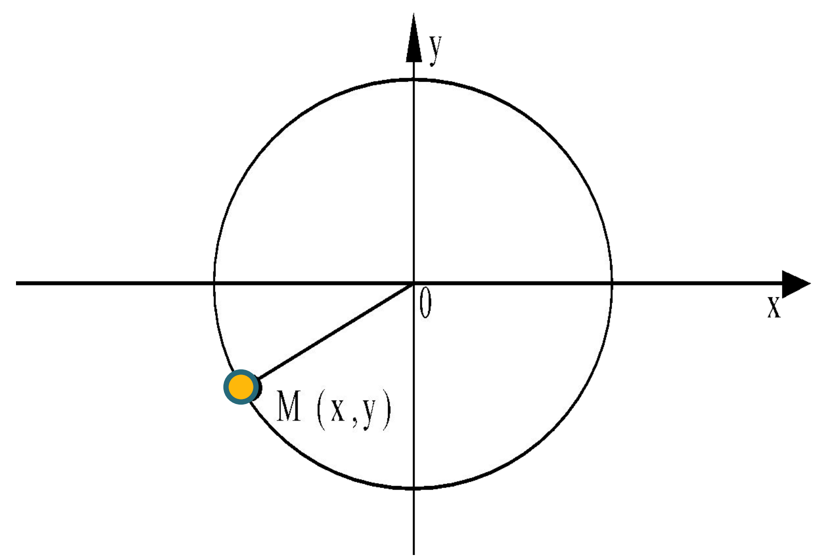
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Аналитическая геометрия - это раздел курса высшей математики, в котором изучаются свойства геометрических объектов алгебраическими способами.

Уравнение линии на плоскости

- Линия – это множество точек плоскости, обладающих определенным свойством. Уравнением линии l называется уравнение вида $F(x,y)=0$, которому удовлетворяют координаты всех точек, лежащих на линии l, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой линии.
- Аналитическая геометрия на плоскости ставит перед собой две основные задачи:

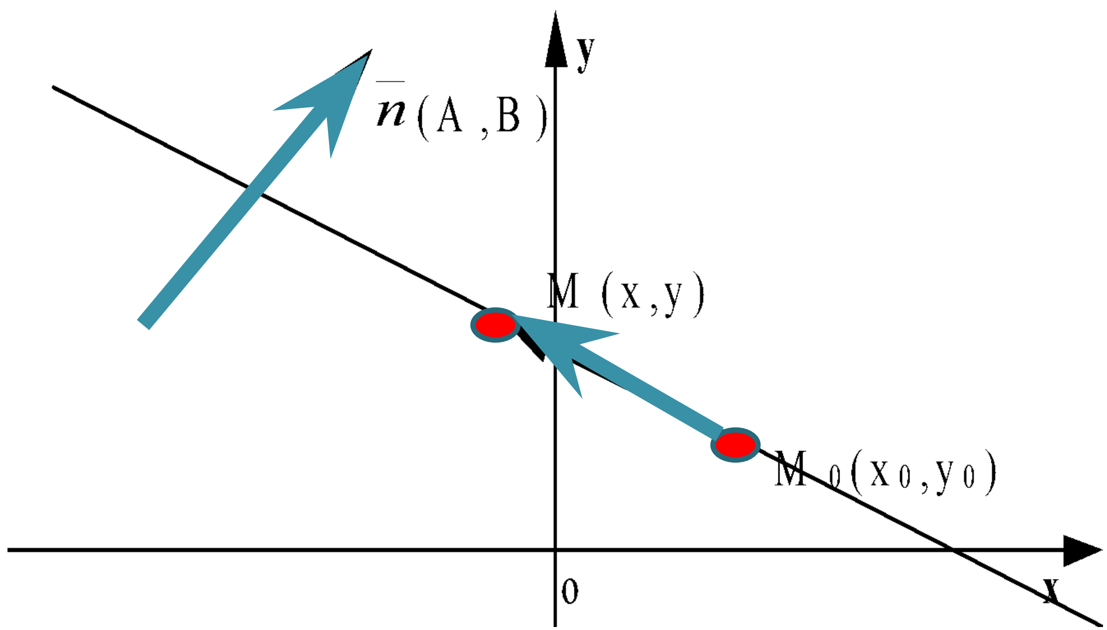
- 1.Задана линия *l* как множество точек плоскости, обладающих некоторым свойством. Надо составить уравнение этой линий
- 2. Задано уравнение вида $F(x,y)=0$. Требуется установить форму и свойства описываемой им линии.
- Пример:



- $x^2+y^2=25$

Уравнение прямой на плоскости по точке и нормальному вектору

- <u>Определение:</u> Нормальным вектором к прямой называется любой вектор ей перпендикулярный. Обозначение: $\bar{n}$.



- $M_o(x_o, y_o)$ - точка на прямой, $\bar{n}(A,B)$ - нормальный вектор этой прямой . (A и B одновременно нулю не равны). $M(x,y)$ – произвольная точка рассматриваемой прямой. Введем в рассмотрение вектор

$$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$$

- Вектор $\overline{M_0M}$ и вектор $\bar{n}(A,B)$ - ортогональны => $\overline{M_0M} \cdot \bar{n} = 0$, или:

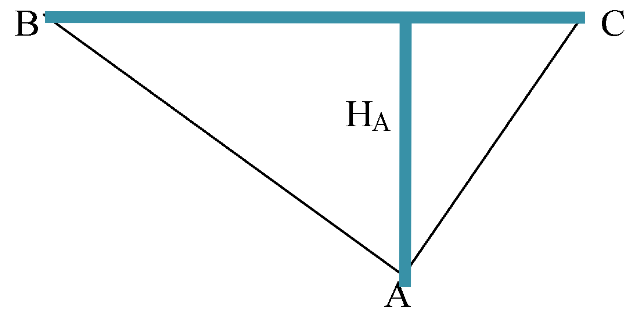
$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=o \qquad (1)$$

- *Пример 1*.
- Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,-3)$ и имеющую нормальный вектор $\bar{n}=(2,5)$
- Решение. Из уравнения (1) следует:
- $2(x-1)+5(y+3)=0$ или $2x+5y+13=0$.

- *Пример 2*.
- Даны вершины треугольника ABC: $A(1,2)$;
- $B(-3,5)$; $C(1,4)$. Написать уравнение высоты H_A, опущенной из вершины A.

- <u>Решение</u>.

$$H_A \perp BC$$



- => $\overline{BC} \perp H_A$
- Вектор $\overline{BC}$ можно принять за нормальный вектор с координатами (4,-1).
- Тогда уравнение высоты:
- 4(*x*-1)-1(*y*-2)=0, или 4*x*-*y*-2=0.

- *Пример 3*.
- Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4,2)$ и имеющую нормальный вектор $\bar{n} = (0, -3)$.

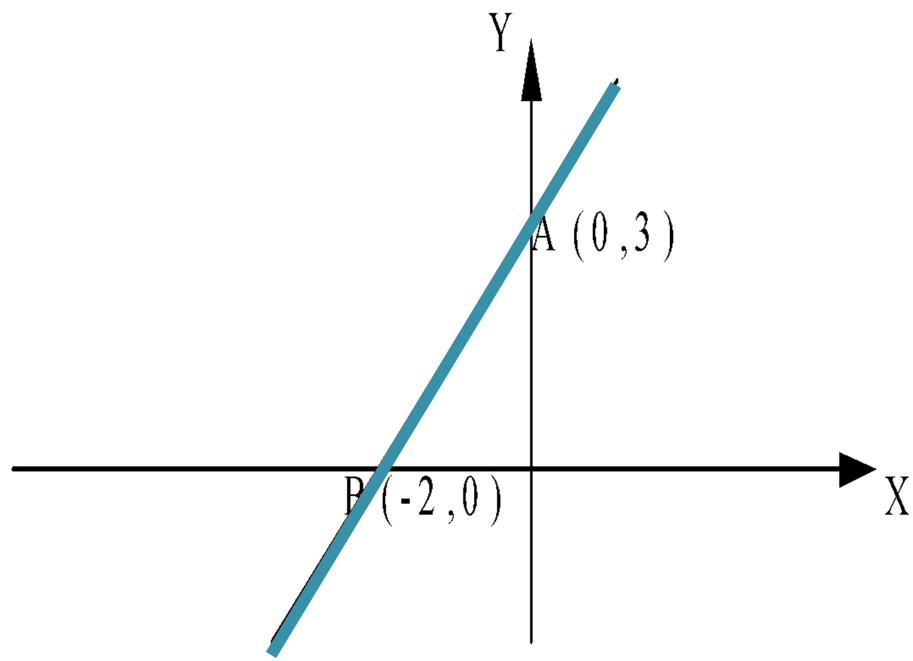
- Решение. Из уравнения (1) следует:
- $0(x+4)-3(y-2)=0$
- или $y=2$.

Общее уравнение прямой на плоскости

- На плоскости *XOY* уравнение $Ax+By+C=0$ определяет прямую линию, при условии, что *A* и *B* одновременно не равны нулю. Раскроем скобки в (1):
  - $Ax-Ax_0+By-By_0=0$.
- Обозначим - $Ax_0-By_0=C$. Тогда уравнение (1) приведется в виду:
  - $Ax+By+C=0$ (2) - <u>общее уравнение прямой на плоскости.</u> Коэффициенты *A* и *B* - координаты нормального вектора этой прямой.

- *Пример 1.*
- 1. Построить прямую $3x-2y+6=0$. 2. Проверить, лежат ли точки $M_1(1,2)$ и
- $M_2(-4,-3)$ на этой прямой.
- 3. Найти нормальный вектор этой прямой.
- *Решение.* 1. Чтобы построить прямую, найдем две точки, лежащие на ней и проведем через них прямую линию.
- Положим в уравнении $x=0$, тогда $-2y+6=0$. Отсюда: $y=3$. Таким образом, точка A с координатами $(0,3)$ лежит на прямой.

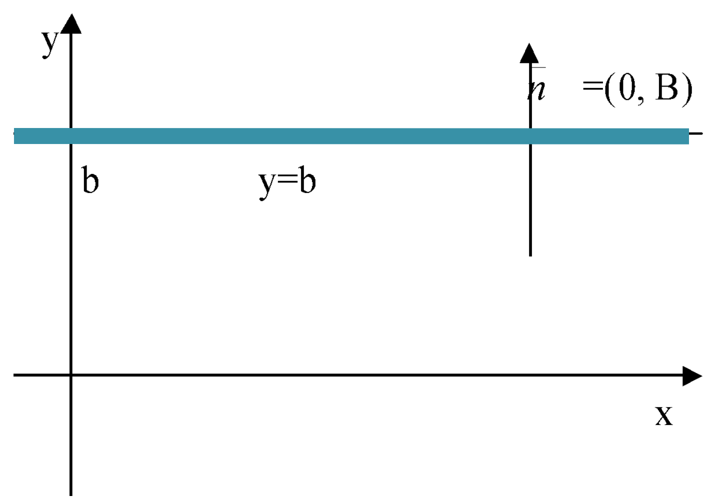
- Положим в уравнении *y*=0, тогда: 3*x*+6=0. Отсюда: *x*=-2. Нашли вторую точку, лежащую на прямой – *B*(-2,0). Откладываем их на осях координат и строим прямую *l*.



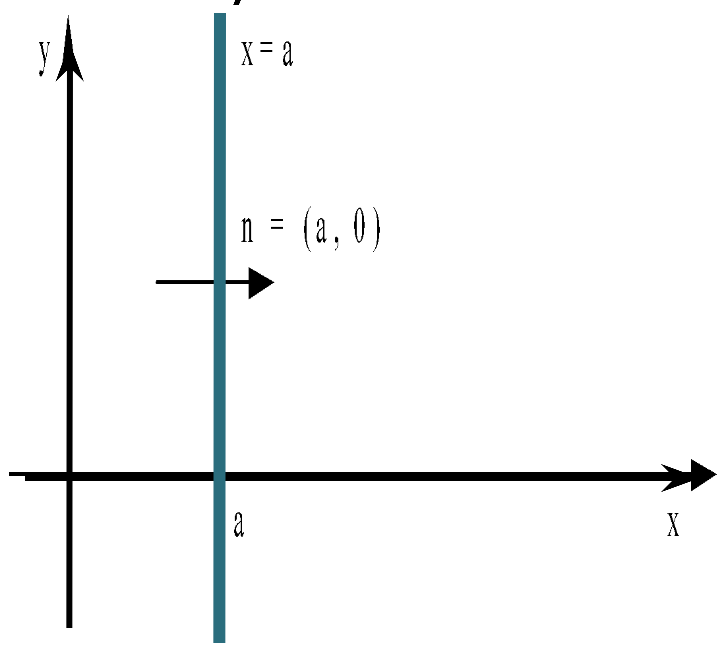
- 2. Проверим, проходит ли прямая через точку M_1. Подставим координаты точки в уравнение прямой. Получим: 3·1-2·2+6≠0. Координаты точки M_1 не удовлетворяют уравнению прямой *l*, => точка M_1 не лежит на данной прямой.
- Подставим координаты точки M_2 в уравнение прямой. Получаем: 0=0, => точка M_2 лежит на прямой.
- Координаты нормального вектора равны коэффициентам при *x* и *y* в общем уравнении прямой. $\overline{n} = (3, -2)$

Частные случаи общего уравнения прямой на плоскости

- Общее уравнение прямой: $Ax+By+C=0$
- 1. Пусть $A=0$, $B\neq0$, $C\neq0$. Уравнение примет вид: $By+C=0$ или $y=b$, где $b=-\dfrac{C}{B}$
- Нормальный вектор этой прямой
- $\bar{n}=(0,B)$ перпендикулярен оси OX

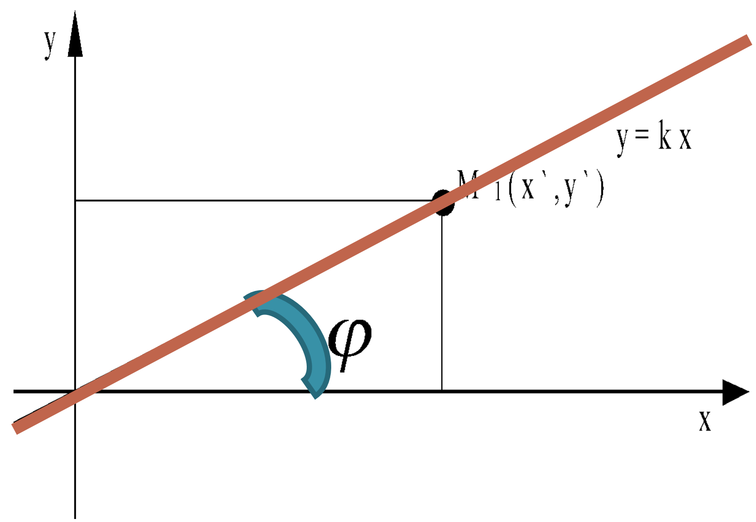


- 2. Пусть *B*=o, *A*≠o, *C*≠o.
- В этом случае уравнение примет вид: $Ax+C=o$, или $x=a$, где $a=-\frac{C}{A}$, $\bar{n}=(A,0)$
- Прямая, параллельная оси *OY* и пересекающую ось *OX* в точке с абсциссой *a*.



- 3. Пусть *C*=0, *A*≠0, *B*≠0. Уравнение прямой принимает вид: *Ax+By=0* или *y=кx,* где *к*=-*A*/*B* Точка *O*(*0*,*0*) лежит на прямой. Уравнение *Ax+By=0* задает прямую, проходящую через начало координат.
- Параметр *к* – тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси *OX.*

$$k = \frac{y_0}{x_0} = tg\varphi$$



- 4. Пусть $A=C=0$, $B\neq 0$. В этом случае уравнение прямой принимает вид: $By=0$ или $y=0$. Это уравнение выражает прямую, одновременно параллельную оси *OX* и проходящую через начало координат. Уравнение $y=0$ есть уравнение координатной оси *OX*.
- Аналогично, уравнение $x=0$ представляет собой уравнение координатной оси *OY*

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

- Общее уравнение прямой на плоскости: $Ax+By+C=0$. Пусть $B\neq 0$, (прямая не параллельна оси ординат). Тогда
- $$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$
- угловой коэффициент прямой $k=-A/B$, параметр $b=-C/B$ - ордината точки пересечения прямой с осью OY. Уравнение записано в виде: $y=kx+b$. Оно называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Уравнение пучка прямых на плоскости

- Рассмотрим уравнение :
- $$A(x-x_o) + B(y-y_o) = o.$$
- Пусть $B\neq o$, то есть прямая не параллельна оси ординат. Тогда $\boxed{y-y_o = к(x-x_o),}$
- где $к=-A/B$ – угловой коэффициент прямой. Множество всех прямых на плоскости, проходящих через данную точку (x_o,y_o), называется <u>пучком прямых</u> с центром в этой точке. Если *к* фиксировано, получим уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

- ***Пример:***
- Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(3,-1)$ и образующей с осью *OX* угол 45^o.
- ***Решение***: Воспользуемся уравнением
- $y-y_o = k(x-x_o)$. Здесь , $k = tg\frac{\pi}{4} = 1$
- $x_o=3$, $y_o=-1$. Следовательно, получаем:

  - $y+1=1(x-3)$ или $x-y-4=0$

Уравнение прямой в отрезках на осях

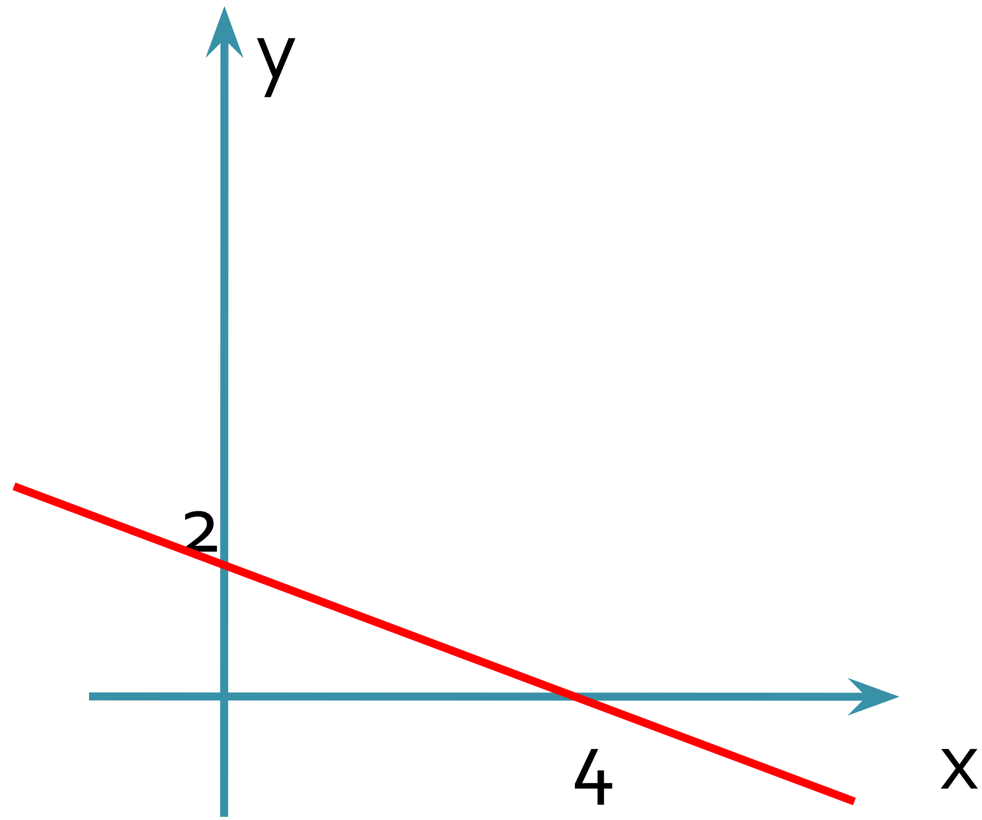
- Общее уравнение прямой:
- *Ax+By+C=o* или *Ax+By=-C*

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

- или $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

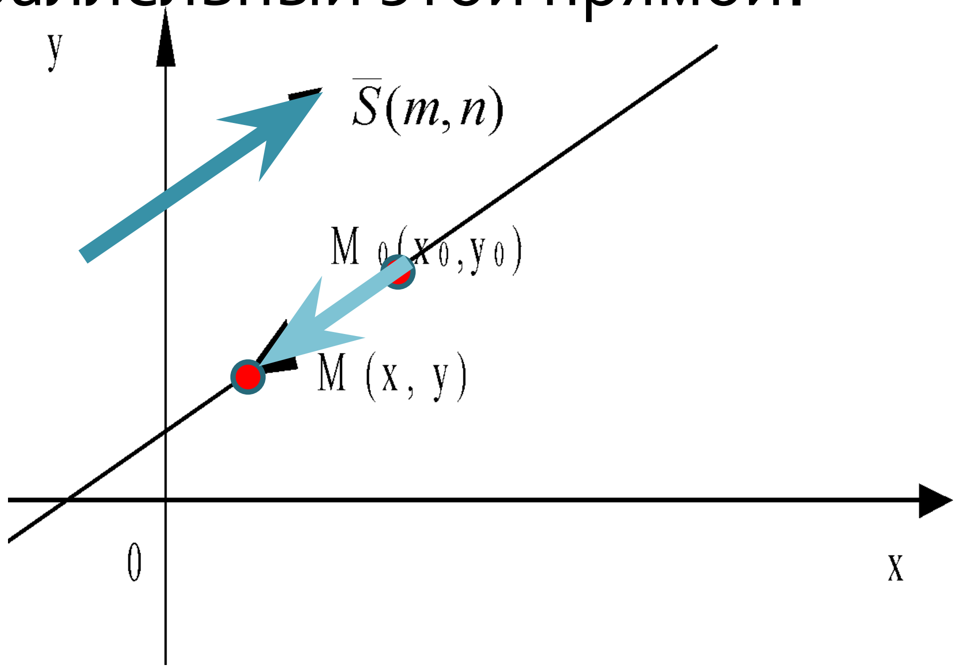
- Пример:
- 2x + 4y = 8

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$$



Уравнение прямой на плоскости по точке и направляющему вектору

- <u>*Определение*</u>*:* Направляющим вектором прямой называется всякий вектор, параллельный этой прямой.



- Вектор $\overline{M_0M}$ ($x-x_0$, $y-y_0$) будет параллелен вектору $\overline{S}$ =(m, n). Следовательно,

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

- (условие коллинеарности векторов). Это равенство будет справедливо только для тех точек, которые лежат на прямой => уравнение прямой на плоскости по точке и направляющему вектору или каноническое уравнение прямой.

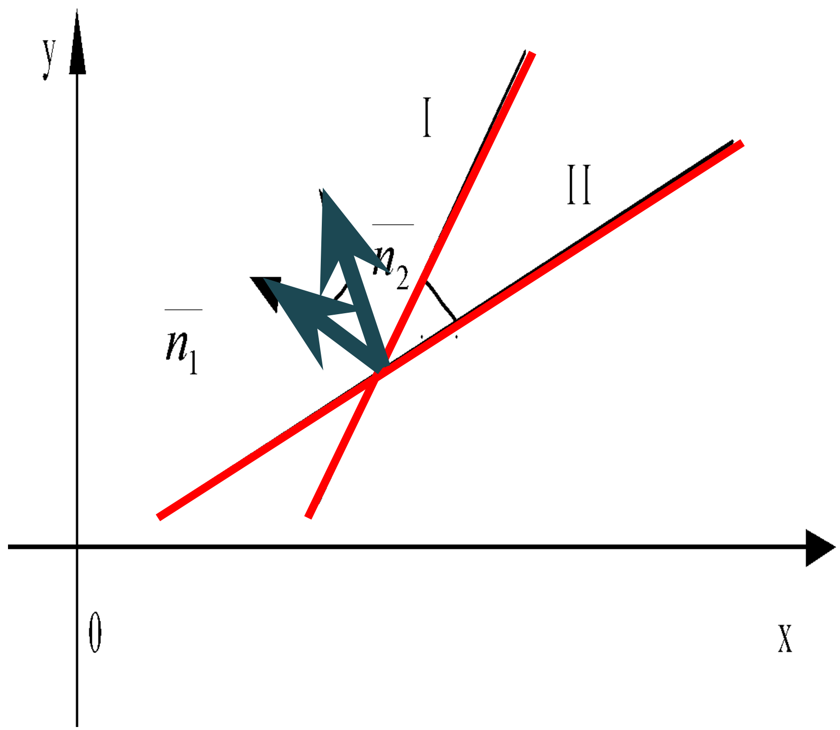
- *Пример* 1: Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_o(-2,0), параллельно вектору $\overline{S} = (3,-1)$
- ***Решение:***
- Из уравнения следует:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-0}{-1}$$

или $x+3y+2=0$

Угол между двумя прямыми на плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых

- **Две прямые на плоскости, заданные общими уравнениями:**
- I: $A_1x+B_1y+C_1=0$. II: $A_2x+B_2y+C_2=0$.



- Угол между двумя прямыми равен углу между нормальными векторами этих прямых: $\overline{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\overline{n}_2 = (A_2, B_2)$

- *Cos* $\varphi = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

- Формула определяет один из углов между прямыми, второй угол равен *π-φ*

- ***Пример* 1**:
- Найти угол между прямыми *3x+y-5=0* и *2x-y+1=0*.
- ***Решение***: По формуле имеем:
- *Cosφ*= $\dfrac{2\cdot 3+(-1)\cdot 1}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{9+1}}$ = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- один из углов равен *π/4*, другой *3π/4*.

- ***Пример 2***:
- Найти угол между прямыми *2x+6y+1=0* и *9x-3y+8=0*.
- ***Решение***: По формуле имеем:
- $Cos\phi = \dfrac{2\cdot 9-6\cdot 3}{\sqrt{4+36}\cdot\sqrt{81+9}} = 0$
- Один из углов равен *π/2*, другой *3π/2*, прямые перпендикулярны.

- Условие параллельности прямых совпадает с условием коллинеарности их нормальных векторов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

- Условие перпендикулярности прямых совпадает с условием ортогональности их нормальных векторов, следовательно, оно имеет вид:
  - $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

- Условие параллельности и перпендикулярности прямых, если они заданы уравнениями с угловыми коэффициентами.
- I: $y=k_1x+b_1$;
- II: $y=k_2x+b_2$
- Выразим предыдущие условия через угловые коэффициенты прямых:
- $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ => $-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{A_2}{B_2} \Rightarrow \boxed{k_1=k_2}$

- Из условия $A_1A_2 + B_1B_2=0$ =>

$$\Rightarrow \frac{A_1A_2}{B_1B_2}+1=0 \Rightarrow \left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\cdot\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)+1=0 \Rightarrow k_1k_2+1=0$$

- Или $\boxed{k_2=-\frac{1}{k_1}}$
- Итак, прямые параллельны: $k_1=k_2$
- Прямые перпендикулярны: угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку .

- *__Пример__*: Написать уравнение прямой, проходящей через точку *M(5, -1)* параллельно прямой $y=2$.
- *__Решение__*: Так как прямые параллельны, то $к_1=к_2$, следовательно, $к_1=0$. Получаем: $y+1=0(x-5)$, или $y=-1$.
- *__Пример__* : Написать уравнение прямой, проходящей через точку *M(5, -1)* перпендикулярно прямой $y=2$.
- *__Решение__*: Так как $к_2=0$, то прямая $y=2$ параллельна оси *OX*. Искомая прямая перпендикулярна оси *OX* и проходит через точку *M(5, -1).* Уравнение такой прямой: $x=5$

Точка пересечения прямых

- Прямые заданы общими уравнениями:
- I: $A_1 x+B_1 y+C_1=0$. II: $A_2 x+B_2 y+C_2=0$.
- Пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ точка пересечения прямых. Тогда ее координаты x_0,y_0 удовлетворяют и уравнению I и уравнению II. Следовательно, координаты этой точки являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

- ***Пример:***
- Найти точку пересечения прямых $5x$-$3y$-15=0 и x+$2y$-3=0.
- ***Решение:***
- Решаем совместно систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 3y = 15 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

- получаем: x=3, y=0. Таким образом, точка пересечения прямых имеет координаты: $M_0(3,0)$.