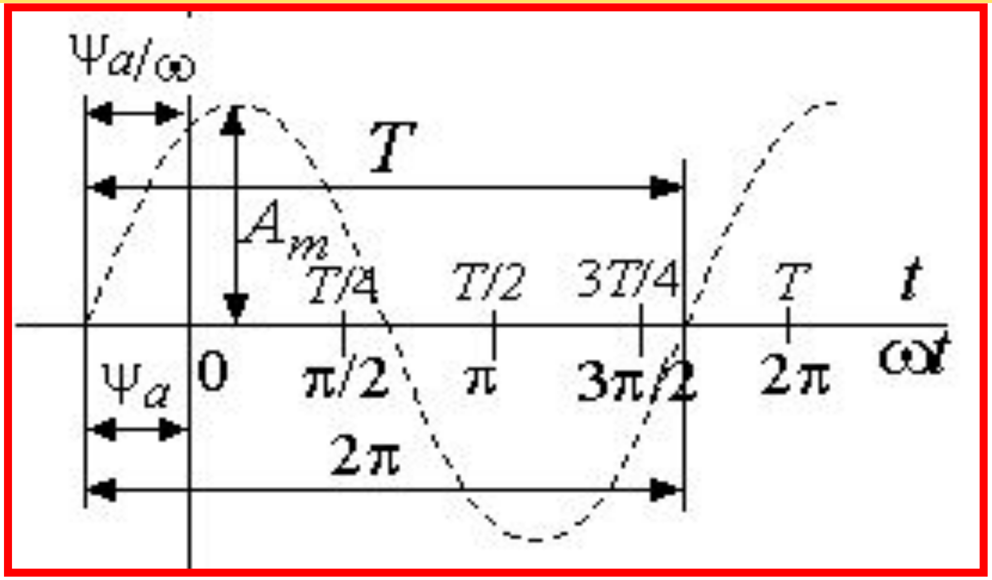
Дисциплина: Основы теории цепей

Лекция №3

Тема: Метод комплексных амплитуд



Учебные вопросы

- 1. Основные характеристики гармонических токов и напряжений.
- 2. Основы метода комплексных амплитуд.
- 3. Комплексное сопротивление пассивного двухполюсника. Закон Ома в комплексной форме.
- 4. Комплексная схема замещения цепи. Законы Кирхгофа в комплексной форме.
- 5. Идеализированные пассивные элементы при гармоническом воздействии.

Литература

- 1. Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для вузов спец. "Радиотехника".-М.: Высшая школа, 2007, с. 65-95.

Примеры периодических токов

Переменный ток – это ток, значение которого изменяется с течением времени.

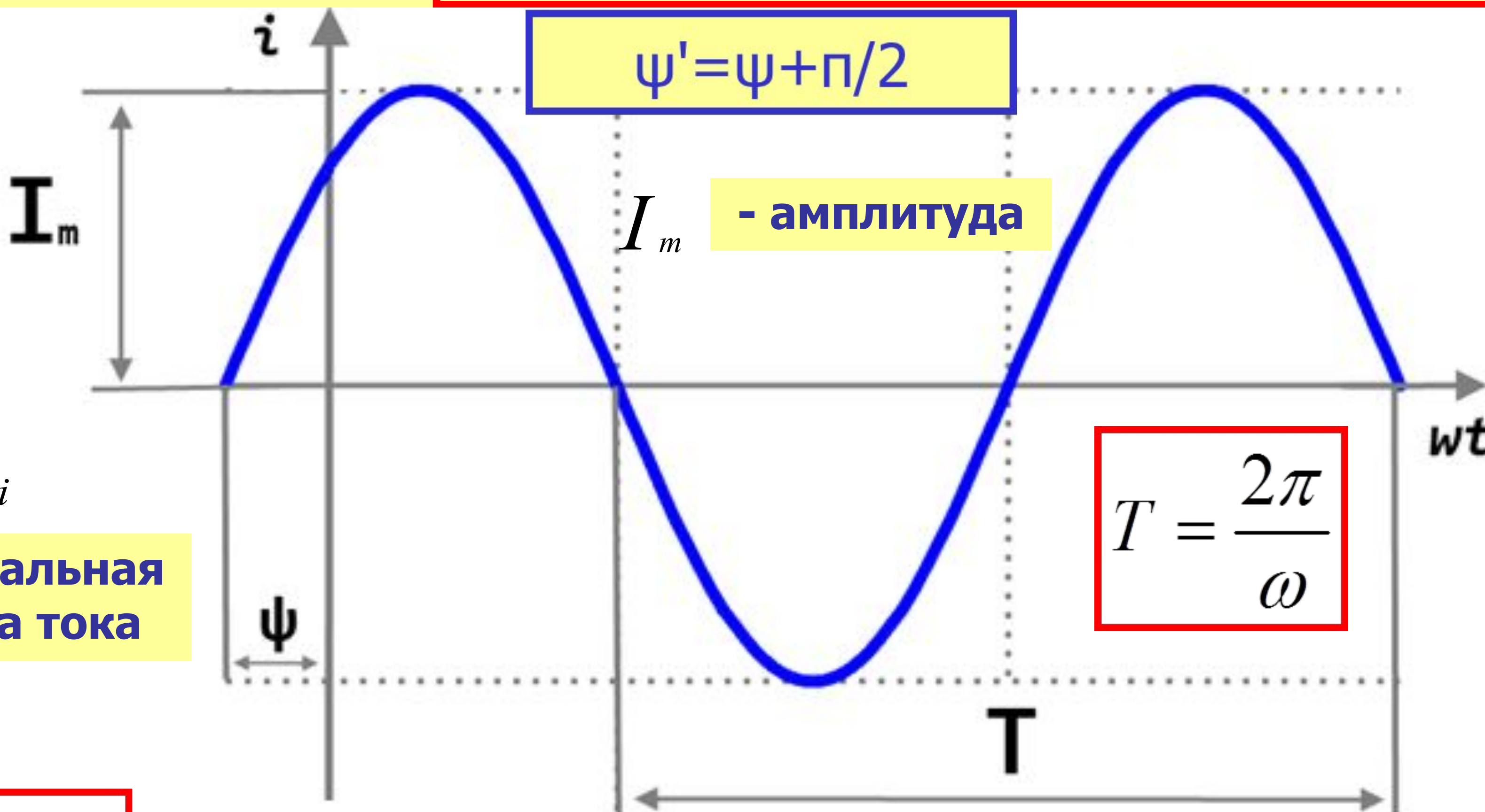
Периодический ток – это переменный ток, мгновенное значение которого повторяется через равные промежутки времени.

Период электрического тока – наименьший интервал времени, по истечении которого значение периодического электрического тока повторяется.

График гармонического тока

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = I_m \sin(\omega t + \psi'_i)$$

ψ'=ψ+π/2



I_m - амплитуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ψ_i - начальная фаза тока

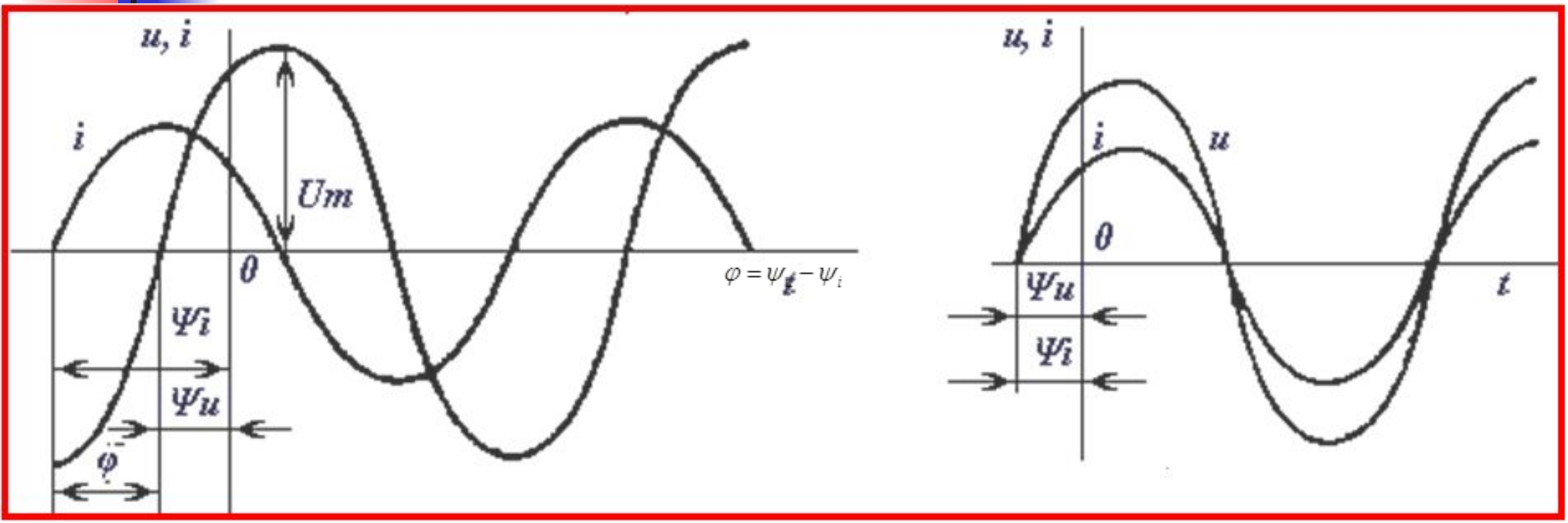
$$f = \frac{1}{T}$$

- циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

- круговая частота

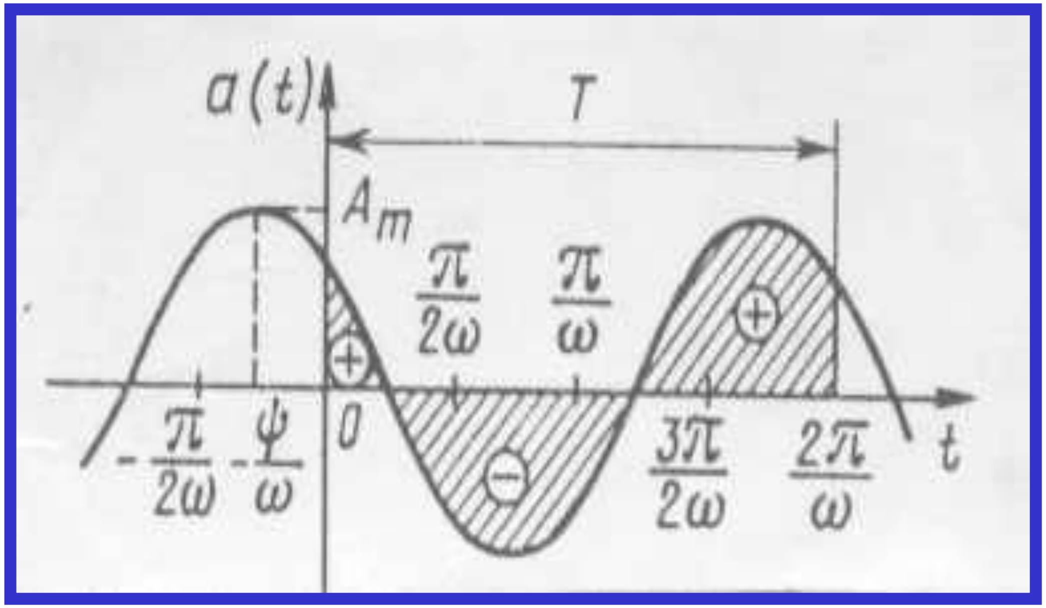
Графики гармонического тока и напряжения



$$\varphi = \psi_u - \psi_i$$ **- сдвиг по фазе между напряжением и током**

Характеристики переменного тока

Среднее значение периодического тока за период



$$I_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt$$

Действующее(эффективное) значение периодического тока

численно равно значению постоянного тока I, при протекании которого за время T, равное периоду, выделяется такое же количество энергии, как и при протекании тока i(t)

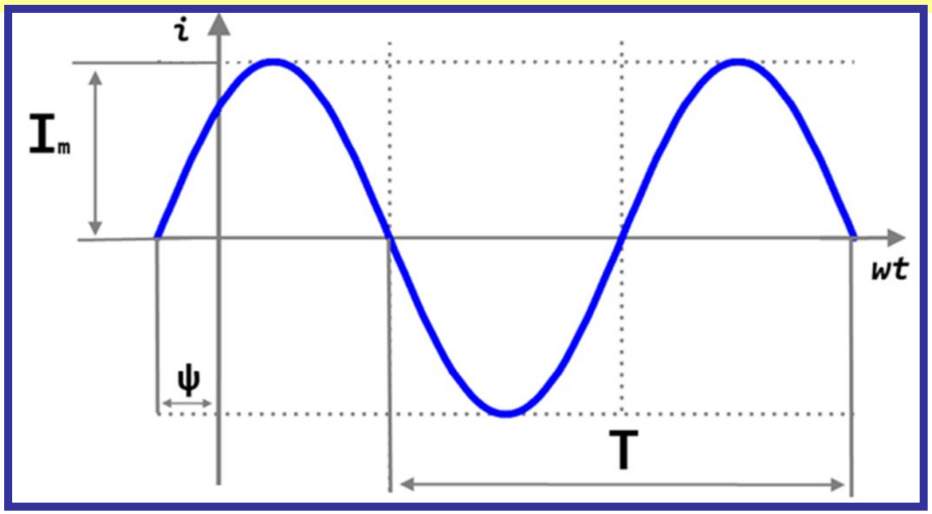
$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}$$

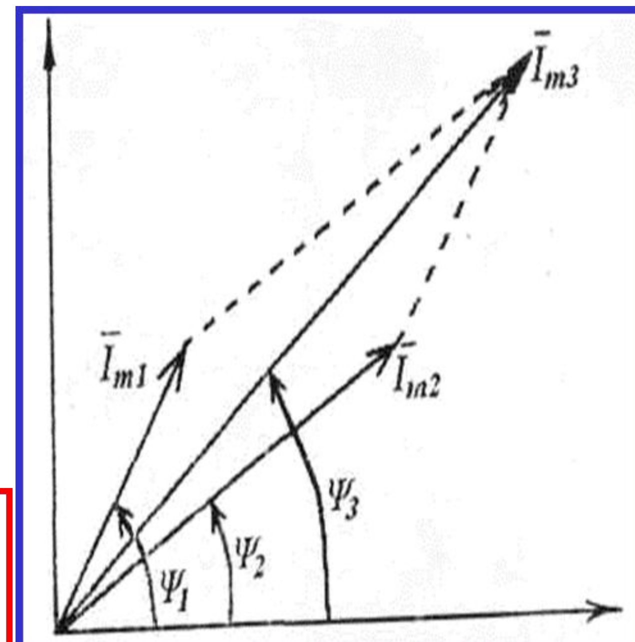
Действующим значением периодического тока называется среднеквадратическое значение тока за период.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i)\,dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Способы представления гармонических токов и напряжений:

1) с помощью временных диаграмм;
2) с применением векторных диаграмм;
3) с использованием комплексных чисел.

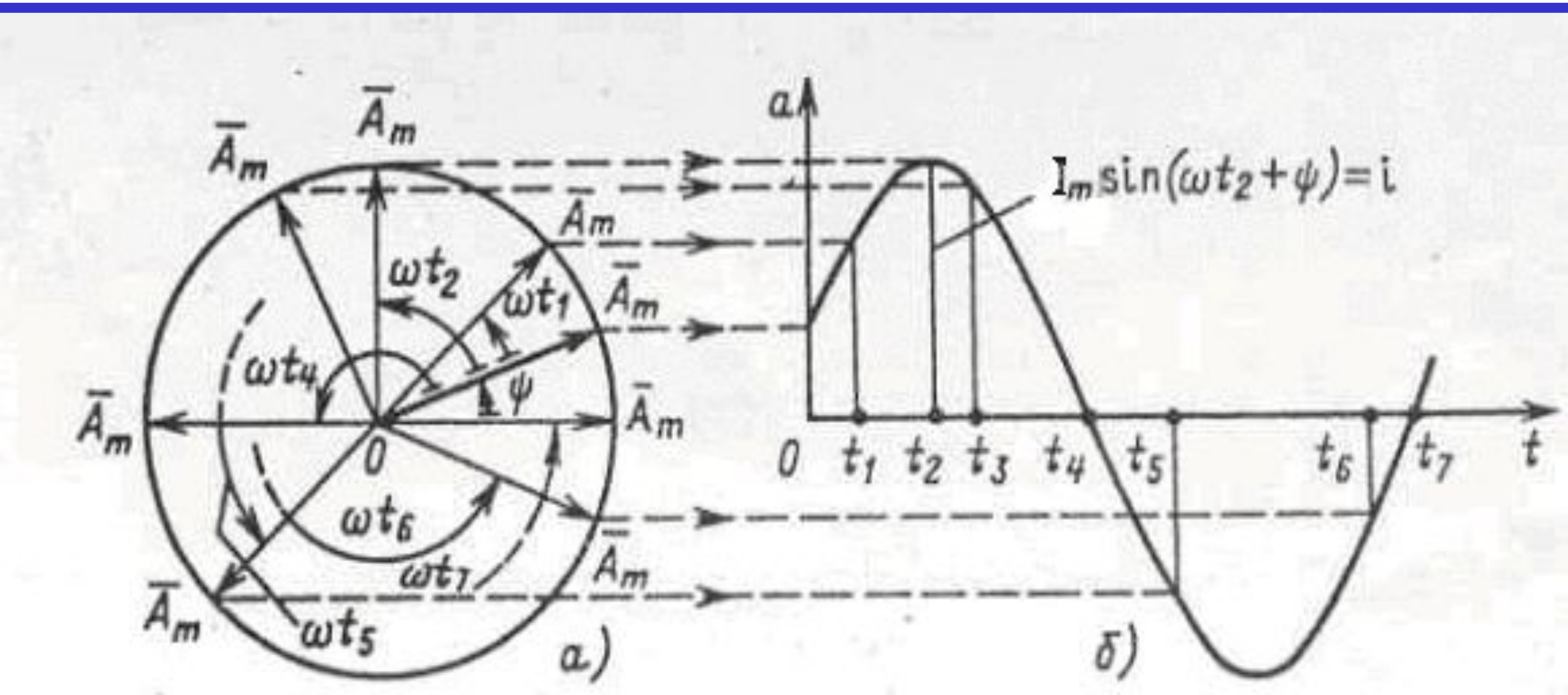




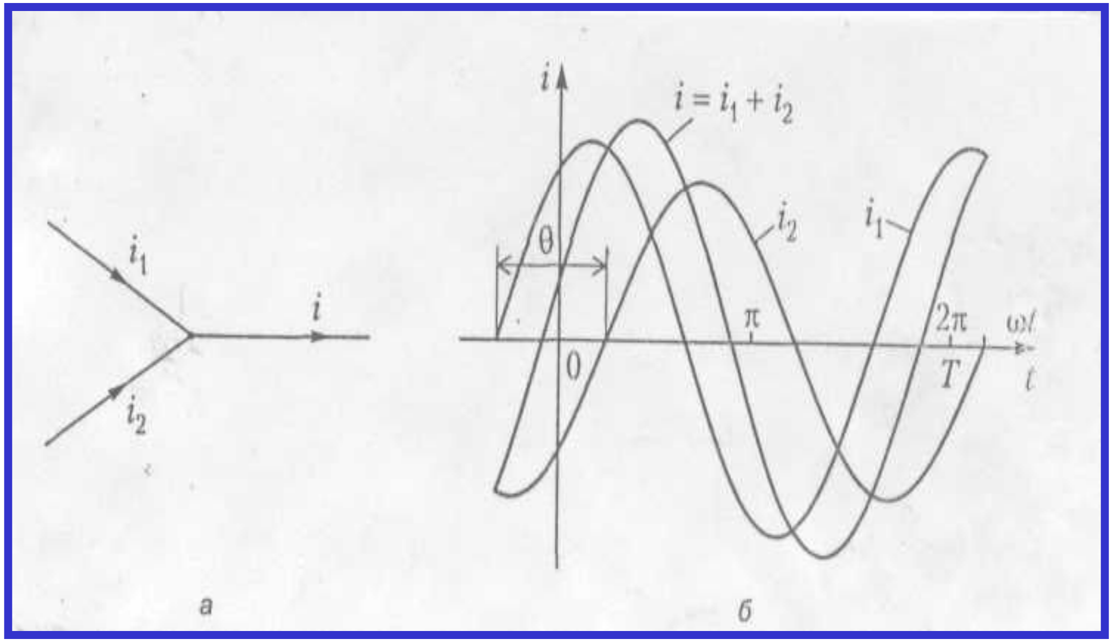
$$\underline{A} = a + jb$$

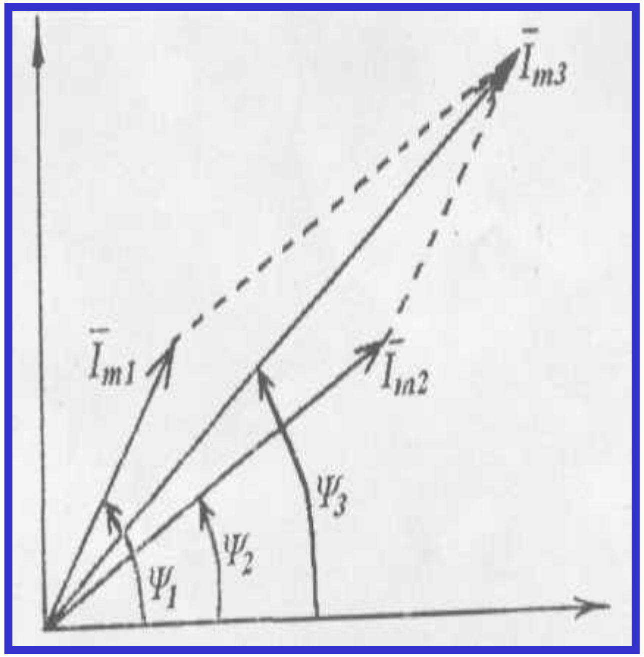
$$\underline{A} = |\underline{A}| e^{j\psi}$$

Представление гармонического тока вращающемся вектором



Суммирование токов





с помощью временной диаграммы

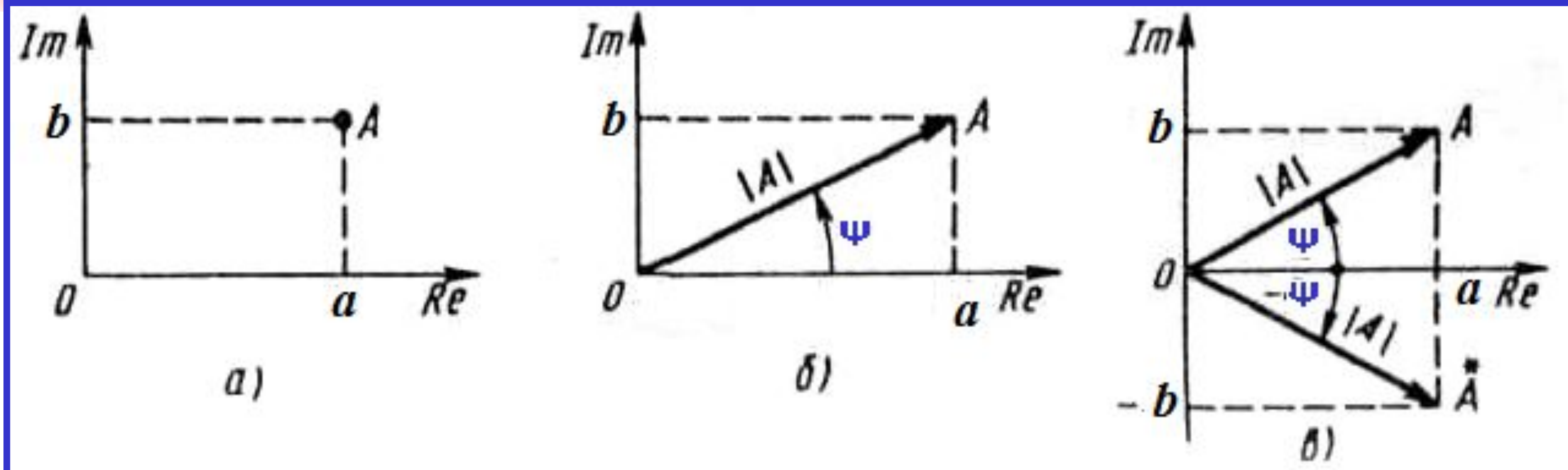
с помощью векторной диаграммы

Сущность метода комплексных амплитуд

Символический метод комплексных амплитуд (комплексный метод) **основан на представлении гармонических функций времени в виде комплексных чисел.**
При использовании комплексного метода *алгебраически интерпретируется векторная диаграмма*.

Автор метода – инженер Штейнмец Ч.П. (США) – 1893 г.,
развил в России академик Миткевич В.Ф.

Понятие о комплексных числах



$$\underline{A} = a + jb$$

$$|\underline{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$tg\psi = \frac{b}{a}$$

$$-\pi \le \psi \le \pi$$

$$a = \mathrm{Re}[\underline{A}]$$

$$b = I_m[\underline{A}]$$

$$a = \mathrm{Re}[\underline{A}] = |\underline{A}|\cos\psi$$

$$b = \mathrm{Im}[\underline{A}] = |\underline{A}|\sin\psi$$

$$\underline{A} = |A|(\cos\psi + j\sin\psi)$$

$$e^{j\psi} = \cos\psi + j\sin\psi$$

$$\underline{A} = |\underline{A}|e^{j\psi}$$

Формы записи комплексных чисел

Тригонометрическая

$$\underline{A} = |A|(\cos\psi + j\sin\psi)$$

Алгебраическая

$$\underline{A} = a + jb$$

Показательная

$$\underline{A} = |\underline{A}|e^{j\psi}$$

Действия с комплексными числами

$$\underline{A} = a + jb = |\underline{A}|e^{j\psi_a}$$

$$\underline{A} + \underline{B} = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d),$$

$$\underline{B} = c + jd = |\underline{B}|e^{j\psi_b}$$

$$\underline{A} - \underline{B} = (a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = |\underline{A}|e^{j\psi_A} \cdot |\underline{B}|e^{j\psi_B} = |\underline{A}| \cdot |\underline{B}|e^{j(\psi_A + \psi_B)};$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{|\underline{A}|e^{j\psi_A}}{|\underline{B}|e^{j\psi_B}} = \frac{|\underline{A}|}{|\underline{B}|}e^{j(\psi_A - \psi_B)};$$

$$\underline{A}^n = [|\underline{A}|e^{j\psi_A}]^n = [|\underline{A}|]^n e^{jn\psi_A}$$

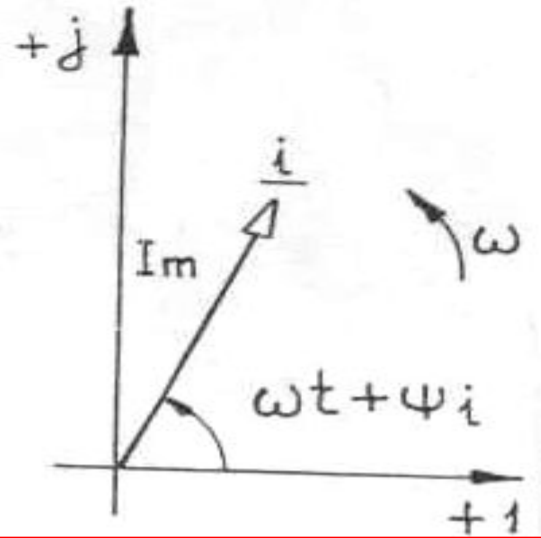
$$j = j\sin(\frac{\pi}{2}) = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$j \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = |\underline{A}|e^{j(\psi_A + \frac{\pi}{2})},$$

$$-j \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = |\underline{A}|e^{j(\psi_A - \frac{\pi}{2})},$$

$$-1\underline{A} = \underline{A}e^{\pm j\pi} = |\underline{A}|e^{j(\psi_B \pm \pi)}$$

Комплексный мгновенный синусоидальный ток есть комплексная величина, зависящая от времени, модуль которой равен амплитуде, а аргумент - и аргументу заданного синусоидального тока.



Синусоидальному току

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

соответствует вращающийся вектор $\underline{I}_m$

Вращающемуся вектору тока , помещённому на комплексную плоскость соответствует комплексное число

$$\underline{i} = i' + j \cdot i'' = I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

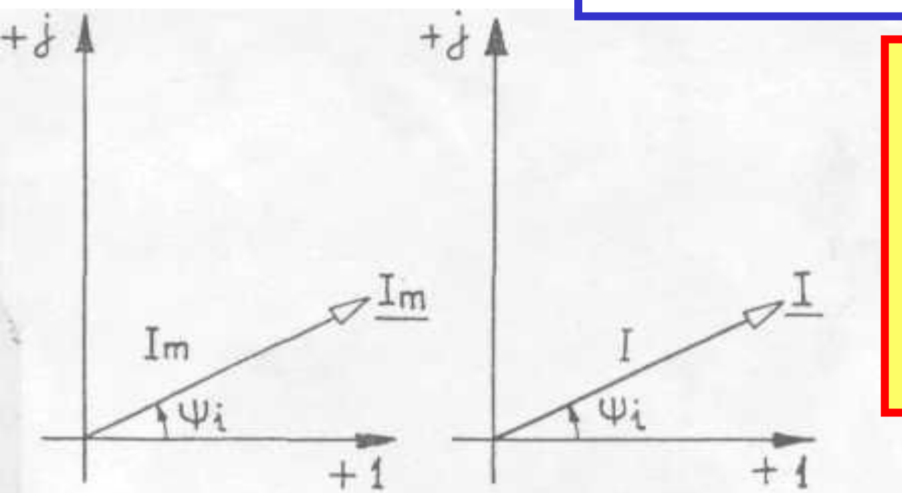
$$i' = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \mathrm{Re}[I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)}]$$

$$i'' = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = Im[I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)}]$$

Комплексная амплитуда и комплексный действующий ток

$$\underline{i} = I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cdot e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t} = \underline{I_m} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{I_m} = I_m e^{j\psi_i}$$



а) б)

Комплексная амплитуда синусоидального тока есть комплексная величина, модуль которой равен амплитуде, а аргумент – начальной фазе данного синусоидального тока.

$$\underline{I} = \frac{\underline{I_m}}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_i} = I \cdot e^{j\psi_i}$$

Комплексный действующий синусоидальный ток есть комплексная величина, модуль которой равен действующему значению синусоидального тока, а аргумент – начальной фазе этого тока.

а)- комплексная амплитуда тока;

б)- комплексный действующий ток.

Пример. Пусть имеется гармонический ток $i(t) = 5\cos(\omega t + 53^{\circ})A$

Записать его комплексный мгновенный ток, комплексную амплитуду и комплексный действующий ток.

$\underline{i}(t) = 5e^{j(\omega t + 53^{\circ})}A$ - комплексный мгновенный ток

Комплексная амплитуда тока:

$\underline{I}_m = 5e^{j53^{\circ}}A$ – в показательной форме;

$\underline{I}_m = (5\cos 53^{\circ} + j5\sin 53^{\circ})A$ – в тригонометрической форме;

$\underline{I}_m = (3 + 4j)A$ – в алгебраической форме.

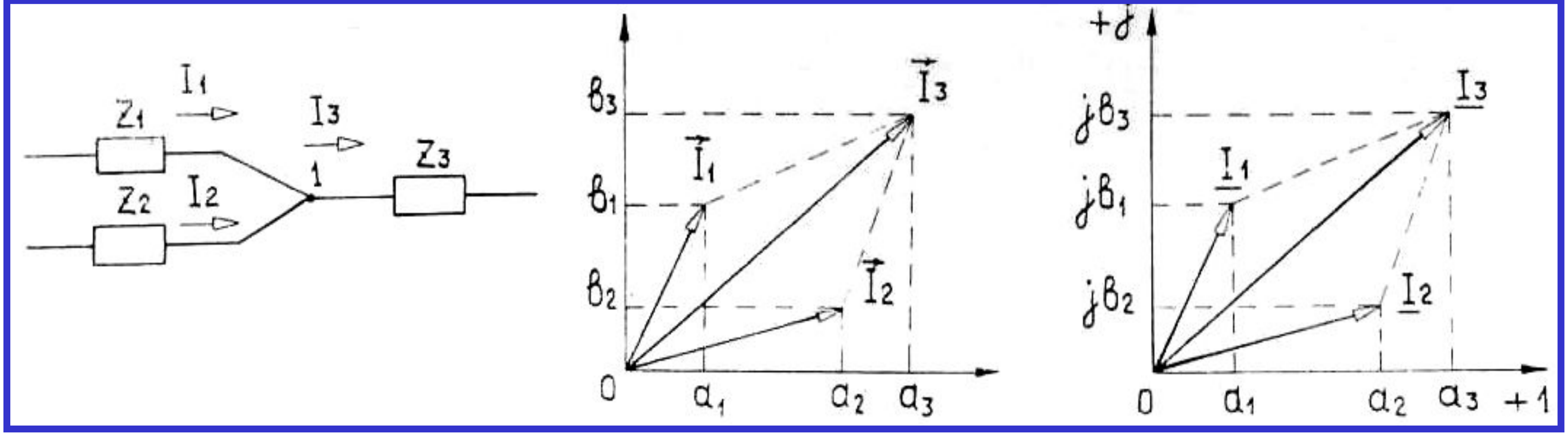
Комплексный действующий ток:

$\underline{I} = \frac{5}{\sqrt{2}}e^{j53^{\circ}}A$ – в показательной форме;

$\underline{I} = (\frac{5}{\sqrt{2}}\cos 53^{\circ} + j\frac{5}{\sqrt{2}}\sin 53^{\circ})A$ – в тригонометрической форме;

$\underline{I} = (\frac{3}{\sqrt{2}} + j\frac{4}{\sqrt{2}})A$ – в алгебраической форме.

Сложение комплексных токов



$$\underline{I}_3 = a_3 + jb_3 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

Геометрической сумме векторов синусоидальных электрических величин соответствует алгебраическая сумма комплексных чисел, изображающих эти векторы.

Дифференцирование и интегрирование гармонических функций

$$\frac{di}{dt} = -\omega \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \omega \cdot I_m \cos(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2})$$

$$\int i dt = \frac{I_m}{\omega} \cdot \sin(\omega t + \psi_i) = \frac{I_m}{\omega} \cdot \cos(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2})$$

$$\underline{\left(\frac{di}{dt}\right)} = \omega \cdot I_m e^{j(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2})} = \omega \cdot I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\underline{\left(\frac{di}{dt}\right)} = j\omega \underline{i}}$$

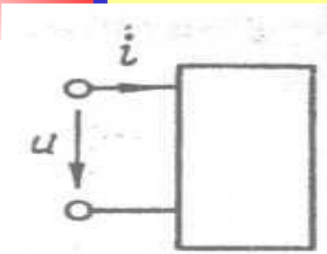
$$\underline{\left(\int i dt\right)} = \frac{I_m}{\omega} e^{j(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2})} = \frac{I_m}{\omega} e^{j(\omega t + \psi_i)} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\underline{\left(\int i dt\right)} = \frac{\underline{i}}{j\omega}}$$

Выводы

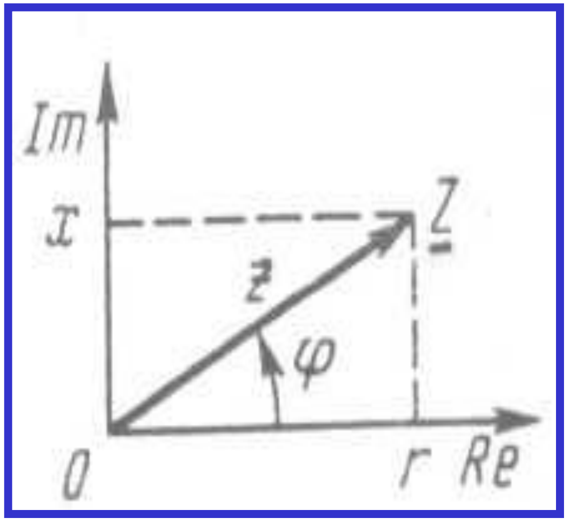
- 1. Операции дифференцирования (интегрирования) синусоидальных функций можно заменить алгебраич. операциями умножения (деления) комплексных мгновенных значений (комплексных амплитуд) этих функций на *jw*.
- 2. При переходе от синусоидальных электрических величин (оригиналов) к их символам (комплексным числам) удаётся **полностью алгебраизовать все операции над синусоидальными электрическими величинами.**
- 3. Это позволяет **существенно упростить анализ линейных цепей синусоидального тока**, т.к. даёт возможность заменить систему интегро-дифференц. уравнений цепи, составленную для мгновенных значений токов и напряжений, системой алгебраических уравнений для комплексных амплитуд соответствующих токов и напряжений.

Комплексное сопротивление пассивного двухполюсника



$$i = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i) = I_m \cos(\omega t + \psi_i),$$

$$u = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \psi_u) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$$



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{I_m e^{j\psi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\psi_u - \psi_i)}$$

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$$

$$\underline{Z} = r + jx$$

$$\underline{Z} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi$$

$$Z = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U}{I}$$

-модуль комплексного сопротивления (полное входным сопротивление)

$$\varphi = \psi_u - \psi_i$$

Закон Ома в комплексной форме

Георг Симон Ом
1789 – 1854

$$
\begin{cases}
\underline{U}_m = \underline{Z}\,\underline{I}_m, \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}; \\
\underline{I}_m = \underline{Y}\,\underline{U}_m, \underline{I} = \underline{U}\,\underline{Y}.
\end{cases}
$$

1 закон Кирхгофа в комплексной форме:

Густав Роберт Кирхгоф
1824 - 1887

$$\sum_k \underline{I}_{mk} = 0$$

$$\sum_k \underline{I}_k = 0$$

сумма комплексных амплитуд (комплексных действующих значений) токов всех ветвей, подключённых к каждому из узлов электрической цепи, равна нулю.

2 закон Кирхгофа в комплексной форме:

Густав Роберт Кирхгоф
1824 - 1887

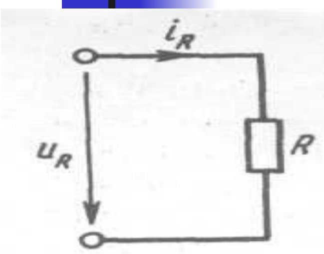
$$\sum_n \underline{U}_{mn} = 0 \qquad \sum_n \underline{U}_n = 0$$

сумма комплексных амплитуд (комплексных действующих значений) напряжений всех ветвей, входящих в замкнутый контур электрической цепи, равна нулю (1-я формулировка)

$$\sum_j \underline{E}_j = \sum_i \underline{I}_i \underline{Z}_i$$

сумма комплексных ЭДС, действующих в замкнутом контуре электрической цепи, равна сумме комплексных падений напряжений на комплексных сопротивлениях участков этого контура (2-я формулировка)

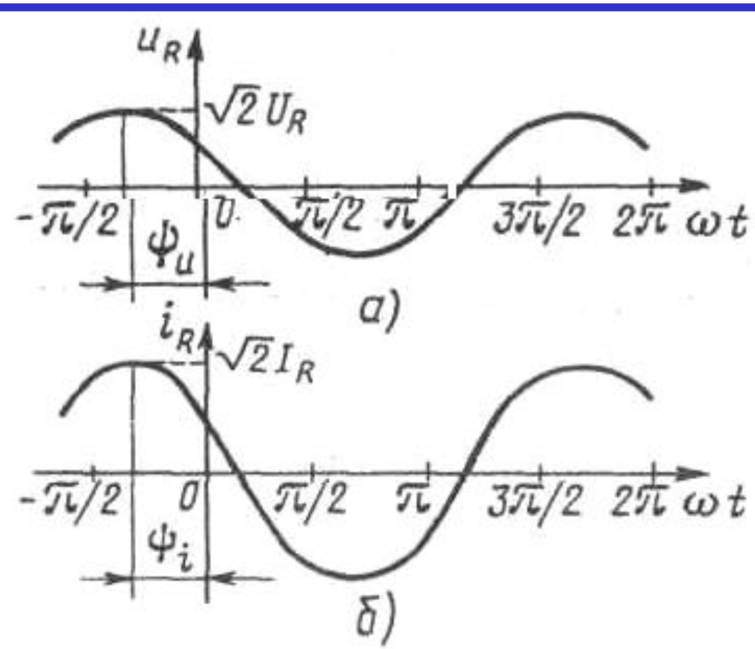
Резистивный элемент при гармоническом воздействии



$$u_R = U_{mR}\cos(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2}U_R\cos(\omega t + \psi_u)$$

$$i_R = \frac{U_R}{R} = \frac{\sqrt{2}U_R}{R}\cos(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2}I_R\cos(\omega t + \psi_i)$$

$$i_R = I_{mR}\cos(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2}I_R\cos(\omega t + \psi_i)$$

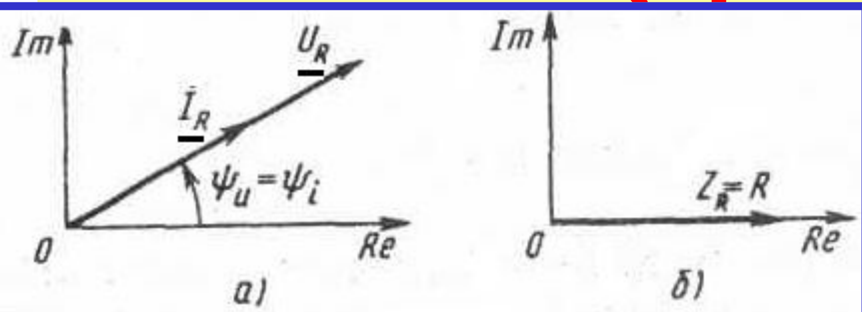


Ток и напряжение линейного резистивного элемента совпадают по фазе:

$$\psi_u = \psi_i = \psi$$

$$I_R = \frac{U_R}{R}$$

Резистивный элемент при гармоническом воздействии (продолжение)



$$\underline{I}_R = I_R e^{j\psi_i} = \frac{U_R}{R} e^{j\psi_u}$$

$$\underline{U}_R = U_R e^{j\psi_U}$$

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}_R}{\underline{I}_R} = \frac{U_R e^{j\psi_u}}{I_R e^{j\psi_i}} = \frac{U_R}{I_R} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z_R e^{j\varphi_R} = Z_R \cos\varphi_R + jZ_R \sin\varphi_R = r_R + jx_R$$

ВЫВОДЫ. 1. Модуль комплексного сопротивления:

$$Z = \left|\underline{Z}_R\right| = \frac{U_R}{I_R} = R$$;

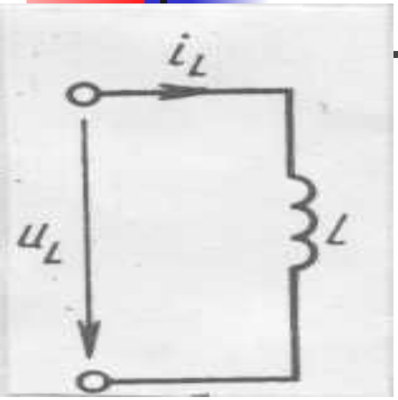
2. Ток и напряжение совпадают по фазе, аргумент комплексного сопротивления;

$$\varphi_R = \varphi_u - \varphi_i = 0$$;

3. Комплексное входное сопротивление резистивного элемента содержит только вещественную составляющую:

$r_R = R$, $x_R = 0$

Индуктивный элемент при гармоническом воздействии



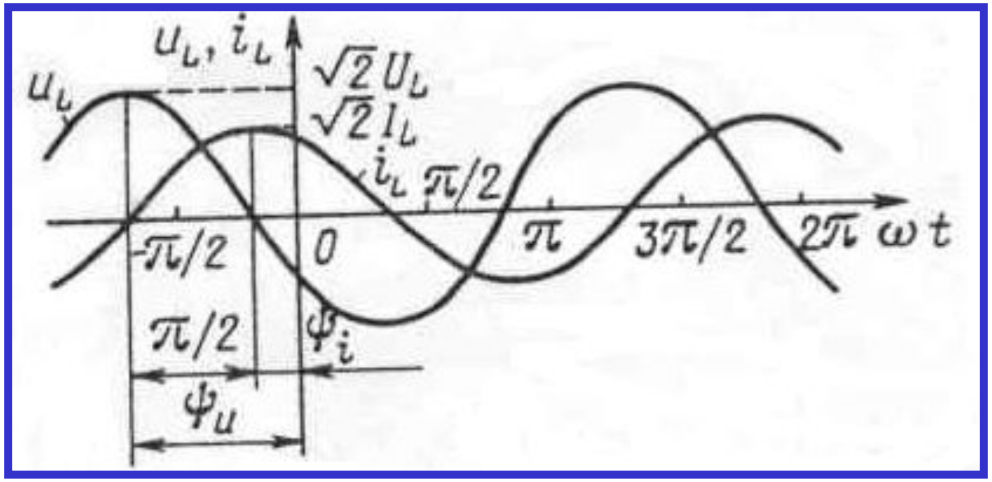
$$i_l = I_{ml}\cos(\omega t+\psi_i) = \sqrt{2}I_L\cos(\omega t+\psi_i)$$

$$U_l = L\frac{di_l}{dt} = L\frac{d[\sqrt{2}I_L\cos(\omega t+\psi_i)]}{dt} = -\omega L\sqrt{2}I_L\sin(\omega t+\psi_i)$$

$$\sqrt{2}\omega LI_L\cos(\omega t+\psi_i+\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}U_L\cos(\omega t+\psi_u)$$

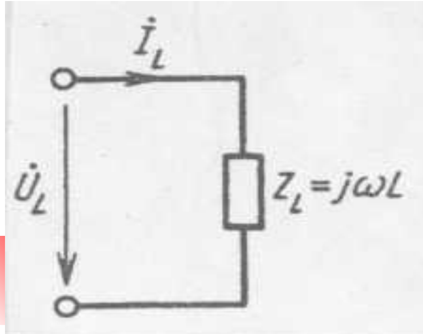
$$U_L = \omega LI_L$$

$$U_L = \sqrt{2}U_L\cos(\omega t+\psi_u) = U_{mL}\cos(\omega t+\psi_u)$$



Напряжение линейного индуктивного элемента опережает ток по фазе на угол п/2:

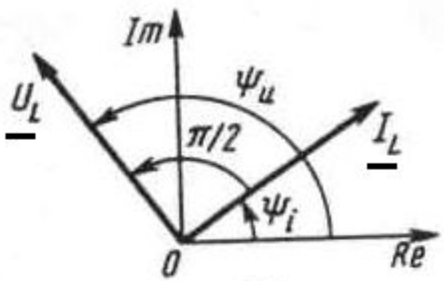
$$\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}$$



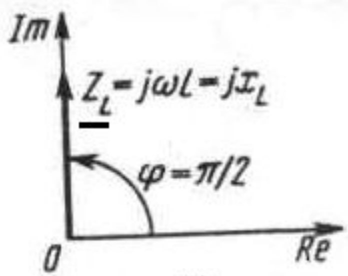
Индуктивный элемент при гармоническом воздействии

$$\underline{I}_L = I_L e^{j\psi_i};$$

$$\underline{U}_L = U_L e^{j\psi_u} = \omega L I_L e^{j(\psi_i+\frac{\pi}{2})}.$$



а)



б)

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} = \frac{\omega L I_L e^{j(\psi_i+\frac{\pi}{2})}}{I_L e^{j\psi_i}} = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L$$

ВЫВОДЫ. 1. Модуль комплексного сопротивления:

$$Z = \left|\underline{Z}_L\right| = \omega L;$$

;

2. Начальная фаза напряжения на п/2 больше начальной фазы тока

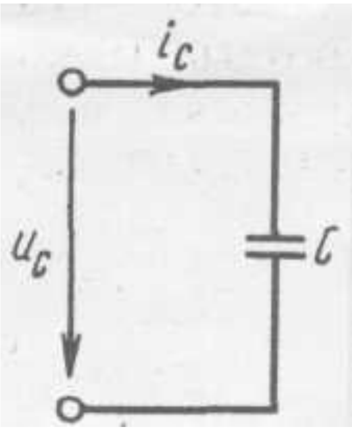
$$\varphi_L = \frac{\pi}{2};$$

;

3. Комплексное входное сопротивление резистивного элемента содержит только мнимую составляющую:

$r_L = 0$ **,** $x_L = \omega L$

Ёмкостной элемент при гармоническом воздействии



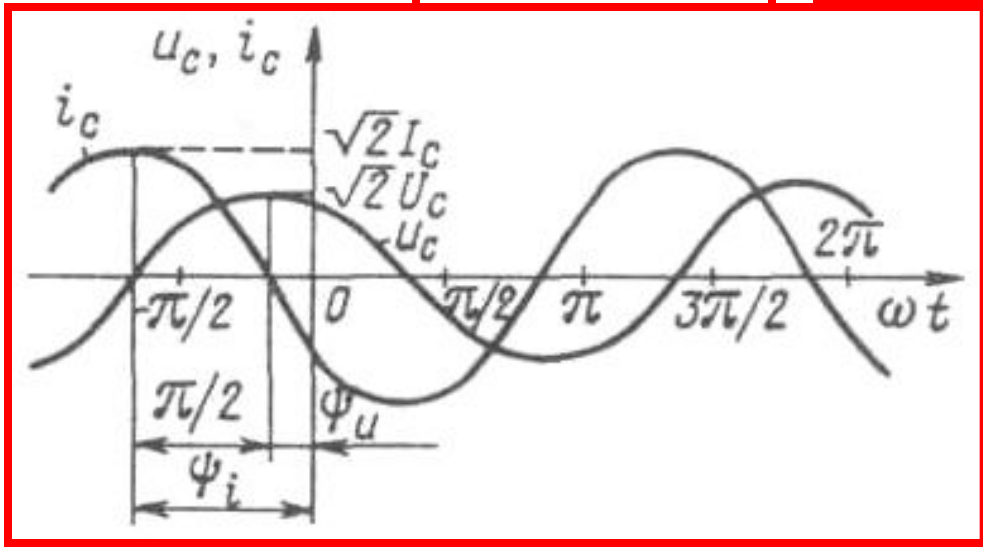
$$U_c = U_{mc}\cos(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2}U_c\cos(\omega t + \psi_u)$$

$$i_c = C\frac{du_c}{dt} = C\frac{d[\sqrt{2}U_c\cos(\omega t + \psi_u)]}{dt} = \omega c\sqrt{2}U_c\sin(\omega t + \psi_u) =$$

$$= \sqrt{2}\omega c U_c\cos(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}I_c\cos(\omega t + \psi_i)$$

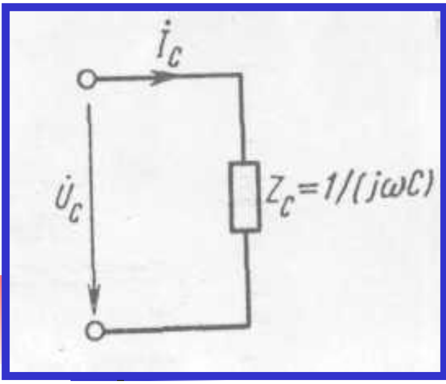
$$I_c = \omega c U_c$$

$$i_c = \sqrt{2}I_c\cos(\omega t + \psi_i) = I_{mc}\cos(\omega t + \psi_i)$$



Ток линейного ёмкостного элемента опережает напряжение по фазе на угол п/2:

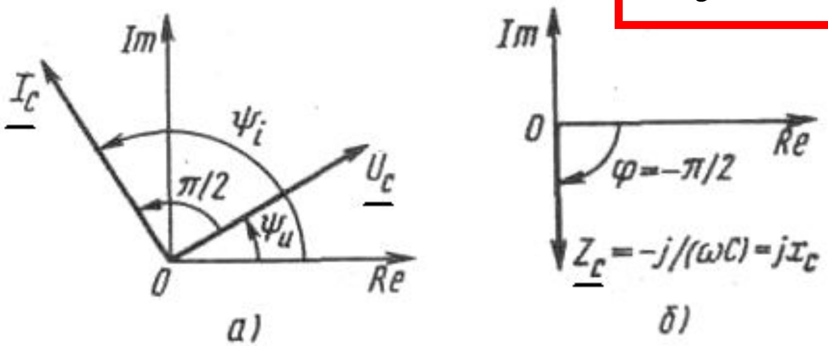
$$\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}$$



Ёмкостный элемент при гармоническом воздействии

$$\underline{U}_c = U_c e^{j\psi_u}$$

$$\underline{I}_C = I_C e^{j\psi_i} = \omega C U_C e^{j(\psi_u + \frac{\pi}{2})}$$



$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{I}_c} = \frac{U_c e^{j\psi_u}}{\omega c U_c e^{j(\psi_u + \frac{\pi}{2})}} = \frac{1}{\omega c} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\omega c} = -\frac{j}{\omega c}$$

ВЫВОДЫ. 1. Модуль комплексного сопротивления:

$$|Z_c| = \frac{1}{\omega c};$$

;

2. Начальная фаза тока на π/2 больше начальной фазы напряжения

$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2};$$

;

3. Комплексное входное сопротивление ёмкостного элемента содержит только мнимую составляющую:

$r_c = 0$, $x_c = \dfrac{1}{\omega c}$

Спасибо
за работу и внимание!