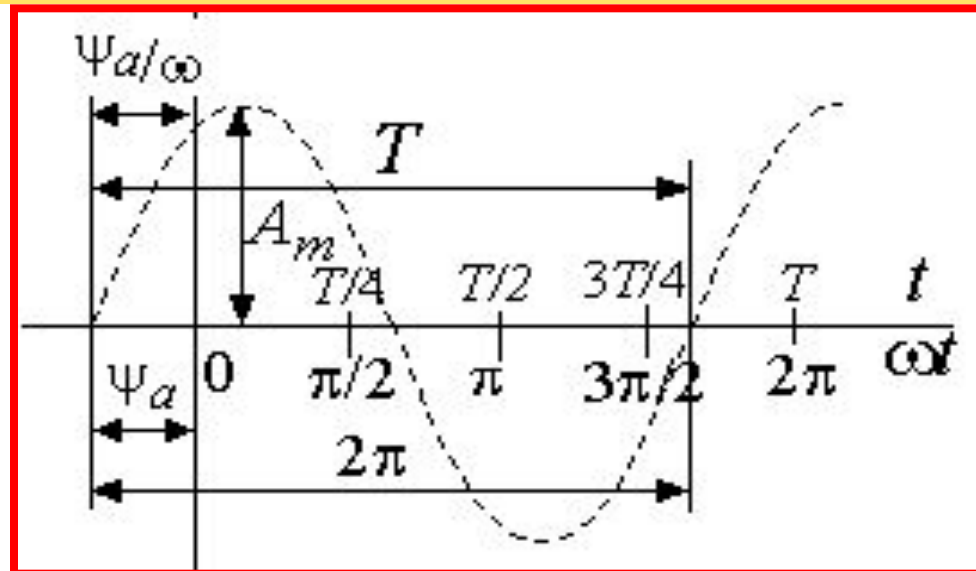


Дисциплина: Основы теории цепей



Лекция №3

Тема: Метод КОМПЛЕКСНЫХ амплитуд



Учебные вопросы

- 1. Основные характеристики гармонических токов и напряжений.
- 2. Основы метода комплексных амплитуд.
- 3. Комплексное сопротивление пассивного двухполюсника. Закон Ома в комплексной форме.
- 4. Комплексная схема замещения цепи. Законы Кирхгофа в комплексной форме.
- 5. Идеализированные пассивные элементы при гармоническом воздействии.

Литература



- 1. Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для вузов спец. "Радиотехника".-М.: Высшая школа, 2007, с. 65-95.

Примеры периодических ТОКОВ

Переменный ток – это ток, значение которого изменяется с течением времени.



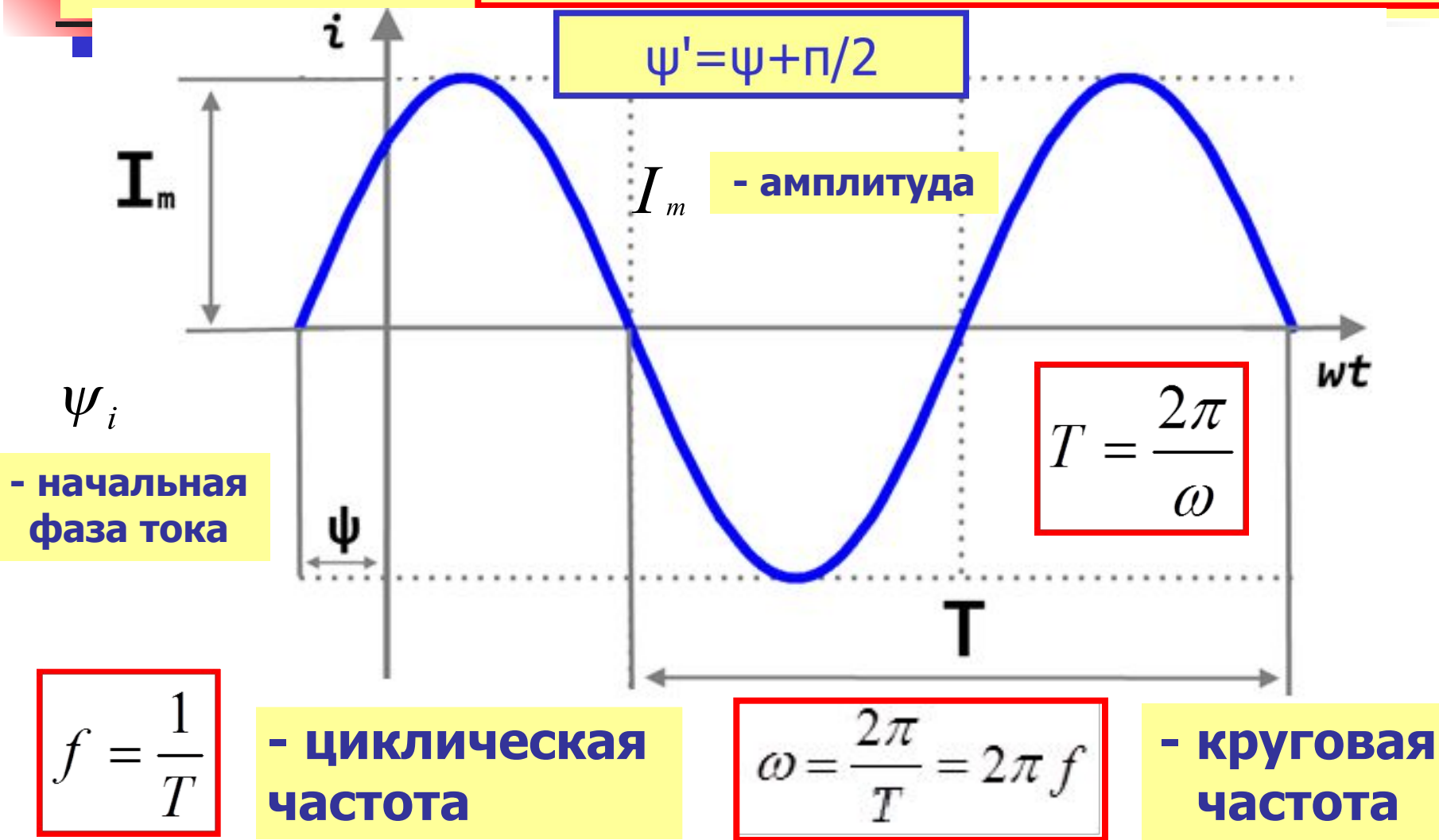
Периодический ток – это переменный ток, мгновенное значение которого повторяется через равные промежутки времени.



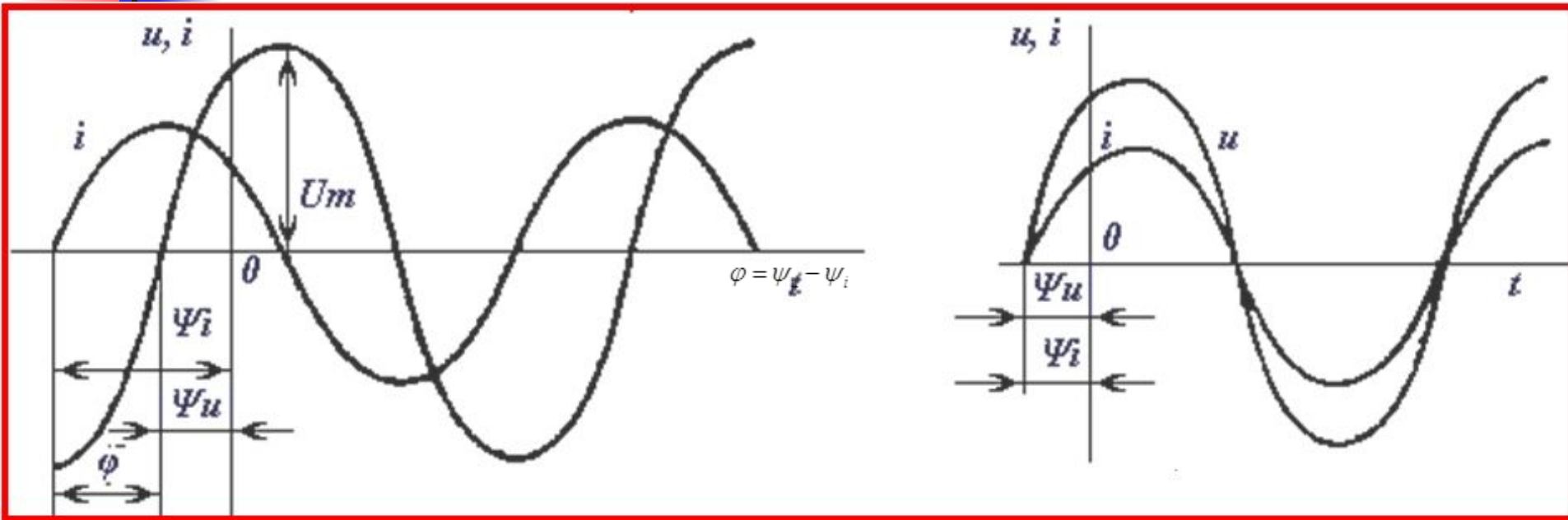
Период электрического тока – наименьший интервал времени, по истечении которого значение периодического электрического тока повторяется.

График гармонического тока

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = I_m \sin(\omega t + \psi'_i)$$



Графики гармонического тока и напряжения

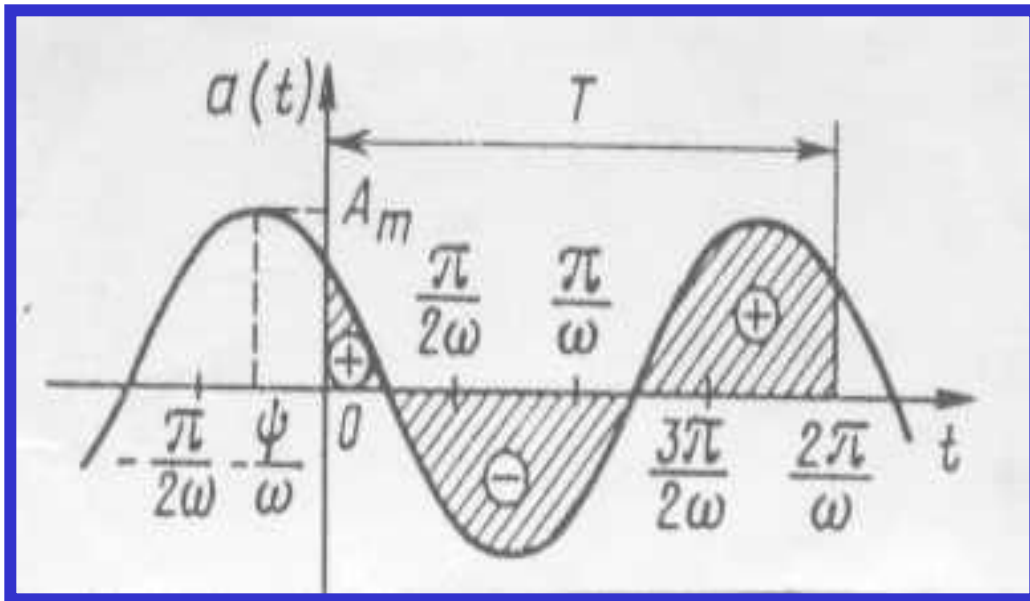


$$\varphi = \psi_u - \psi_i$$

- сдвиг по фазе между напряжением
и током

Характеристики переменного тока

Среднее значение периодического
тока за период



$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

Действующее(эффективное) значение периодического тока

численно равно значению постоянного тока I , при протекании которого за время T , равное периоду, выделяется такое же количество энергии, как и при протекании тока $i(t)$

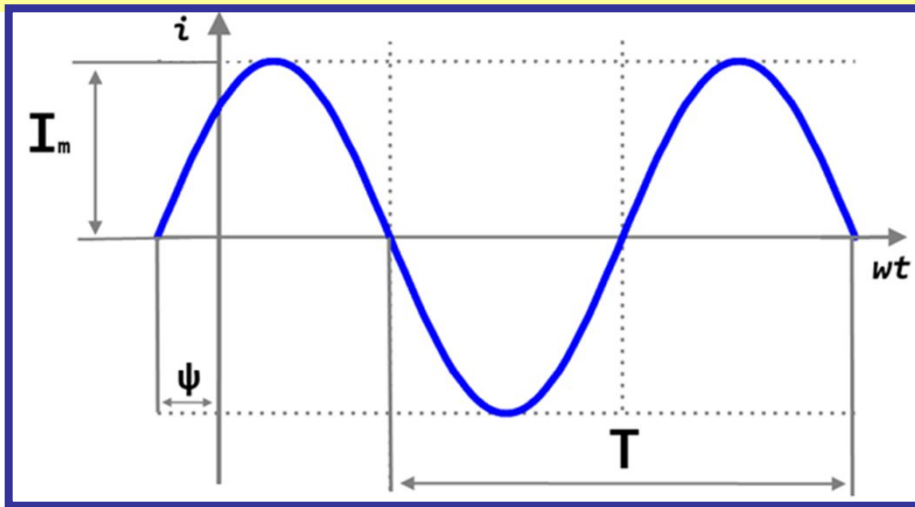
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

Действующим значением
периодического тока
называется
среднеквадратическое
значение тока за период.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

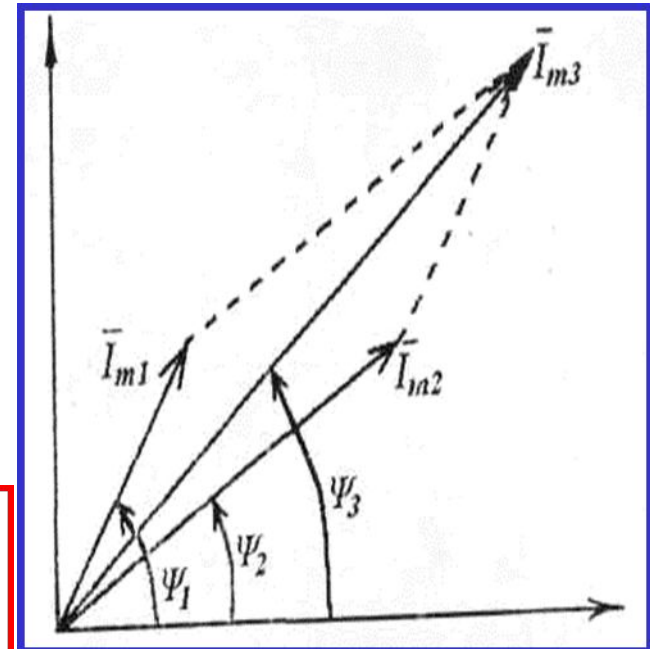
Способы представления гармонических токов и напряжений:

- 1) с помощью временных диаграмм;
- 2) с применением векторных диаграмм;
- 3) с использованием комплексных чисел.

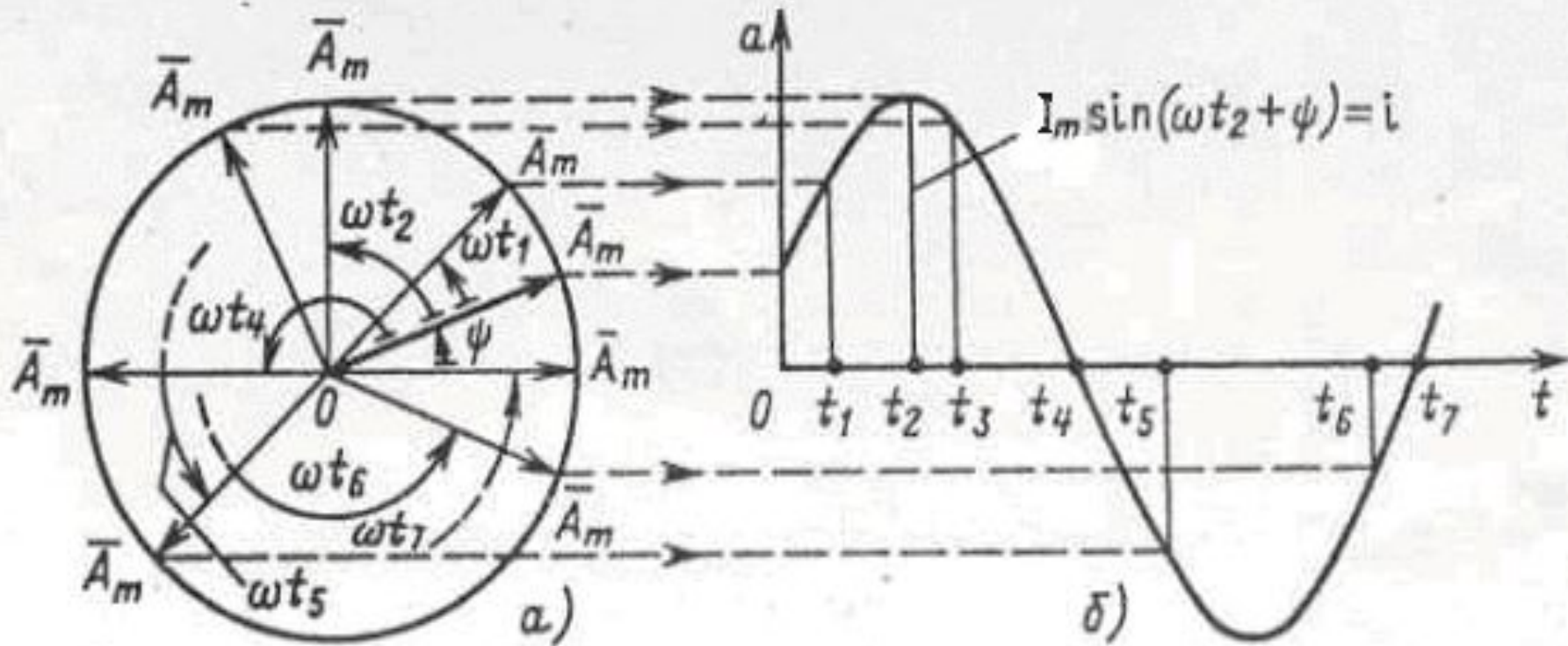


$$\underline{A} = a + jb$$

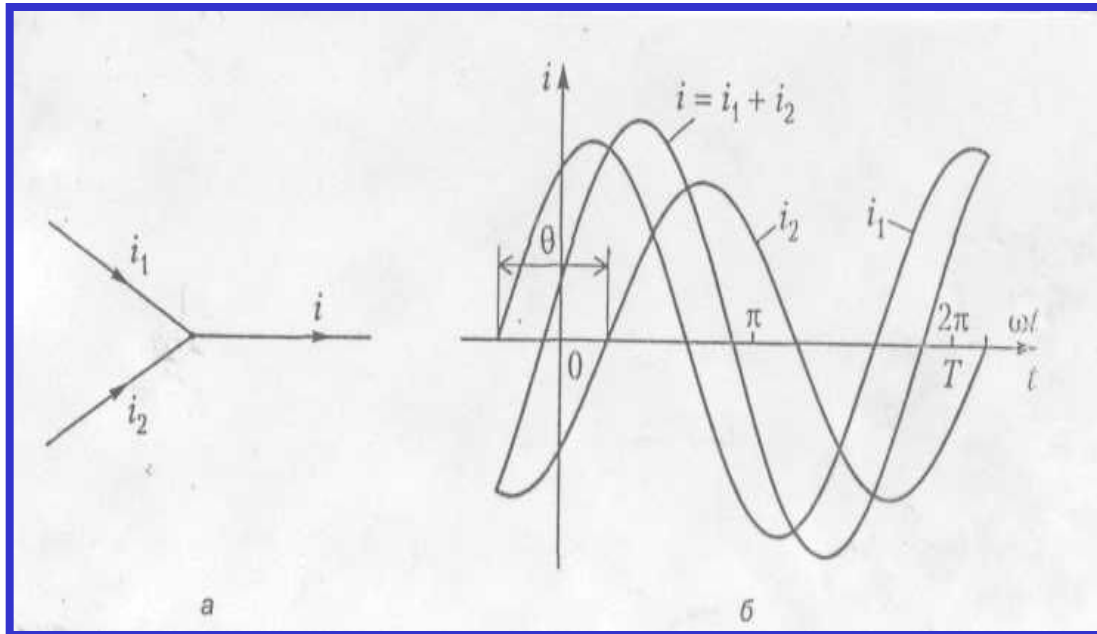
$$\underline{A} = |\underline{A}|e^{j\psi}$$



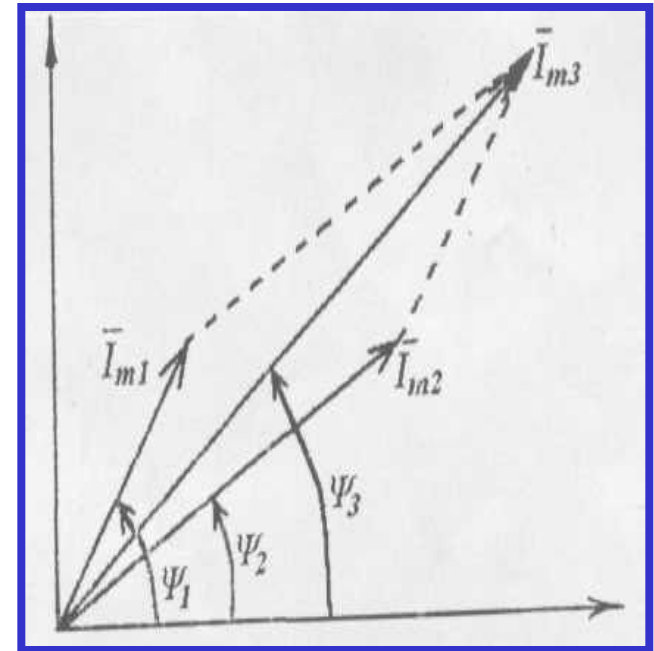
Представление гармонического тока вращающимся вектором



Суммирование токов



с помощью временной
диаграммы



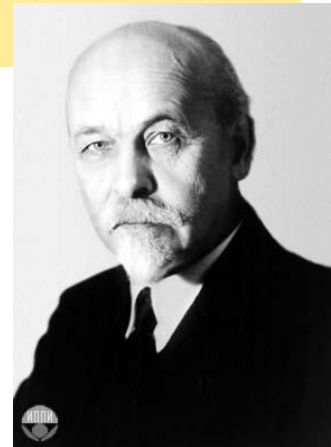
с помощью
векторной
диаграммы



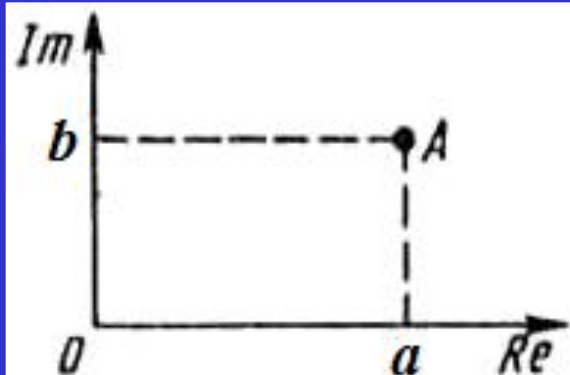
Сущность метода комплексных амплитуд

Символический метод комплексных амплитуд (комплексный метод) основан на представлении гармонических функций времени в виде комплексных чисел. При использовании комплексного метода алгебраически интерпретируется векторная диаграмма.

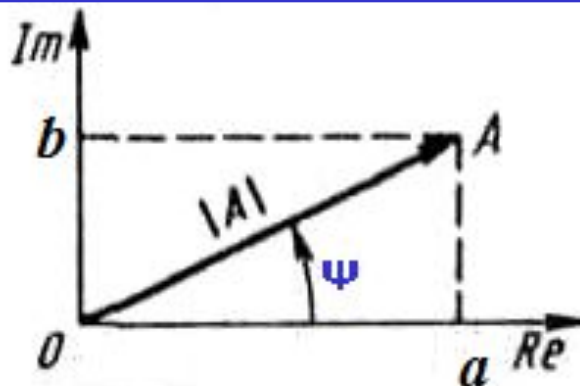
Автор метода – инженер Штейнмец Ч.П.
(США) – 1893 г.,
развил в России академик Миткевич В.Ф.



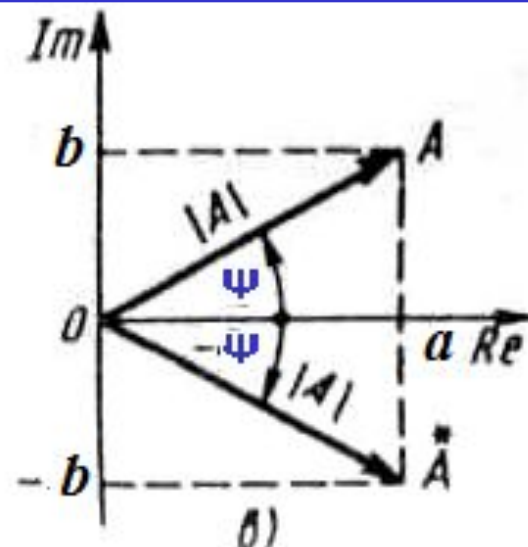
Понятие о комплексных числах



a)



б)



в)

$$\underline{A} = a + jb$$

$$|\underline{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a}$$

$$-\pi \leq \psi \leq \pi$$

$$a = \operatorname{Re}[\underline{A}]$$

$$b = \operatorname{Im}[\underline{A}]$$

$$a = \operatorname{Re}[\underline{A}] = |\underline{A}| \cos \psi$$

$$b = \operatorname{Im}[\underline{A}] = |\underline{A}| \sin \psi$$

$$\underline{A} = |\underline{A}| (\cos \psi + j \sin \psi)$$

$$e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi$$

$$\underline{A} = |\underline{A}| e^{j\psi}$$



Формы записи комплексных чисел

Тригонометрическая

$$\underline{A} = |A|(\cos \psi + j \sin \psi)$$

Алгебраическая

$$\underline{A} = a + jb$$

Показательная

$$\underline{A} = |\underline{A}|e^{j\psi}$$

Действия с комплексными числами

$$\underline{A} = a + jb = |\underline{A}|e^{j\psi_a}$$

$$\underline{A} + \underline{B} = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d),$$

$$\underline{B} = c + jd = |\underline{B}|e^{j\psi_b}$$

$$\underline{A} - \underline{B} = (a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = |\underline{A}|e^{j\psi_A} \cdot |\underline{B}|e^{j\psi_B} = |\underline{A}| \cdot |\underline{B}|e^{j(\psi_A + \psi_B)}; \quad \frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{|\underline{A}|e^{j\psi_A}}{|\underline{B}|e^{j\psi_B}} = \frac{|\underline{A}|}{|\underline{B}|}e^{j(\psi_A - \psi_B)};$$

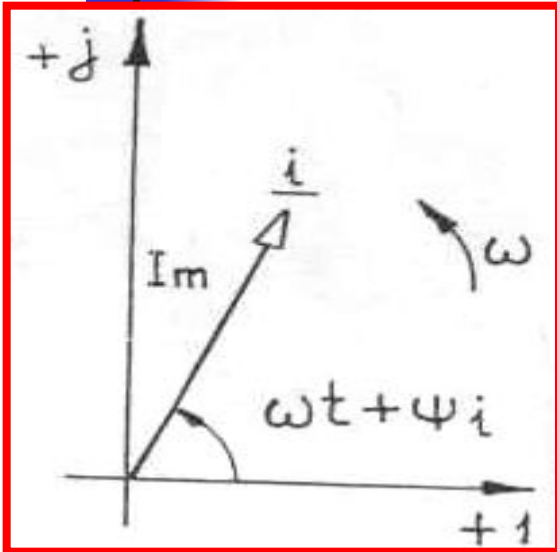
$$\underline{A}^n = [|\underline{A}|e^{j\psi_A}]^n = [|\underline{A}|]^n e^{jn\psi_A}$$

$$j = j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$j \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = |\underline{A}|e^{j(\psi_A + \frac{\pi}{2})}, \quad -j \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = |\underline{A}|e^{j(\psi_A - \frac{\pi}{2})},$$

$$-1 \underline{A} = \underline{A}e^{\pm j\pi} = |\underline{A}|e^{j(\psi_B \pm \pi)}$$

Комплексный мгновенный синусоидальный ток есть комплексная величина, зависящая от времени, модуль которой равен амплитуде, а аргумент - и аргументу заданного синусоидального тока.



Синусоидальному току

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

соответствует вращающийся вектор $\underline{I_m}$

Вращающемуся вектору тока, помещённому на комплексную плоскость соответствует комплексное число

$$\underline{i} = \underline{i}' + j \cdot \underline{i}'' = I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

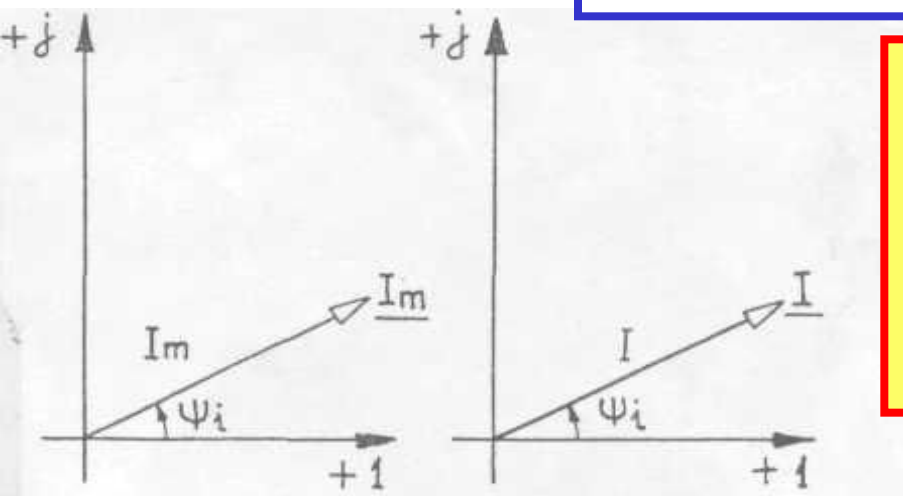
$$\underline{i}' = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \text{Re}[I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)}]$$

$$\underline{i}'' = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \text{Im}[I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)}]$$

Комплексная амплитуда и комплексный действующий ток

$$\underline{i} = I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m \cdot e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t} = \underline{I}_m \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$$



а)

б)

- а)- комплексная амплитуда тока;
- б)- комплексный действующий ток.

Комплексная амплитуда синусоидального тока есть комплексная величина, модуль которой равен амплитуде, а аргумент – начальной фазе данного синусоидального тока.

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_i} = I \cdot e^{j\psi_i}$$

Комплексный действующий синусоидальный ток есть комплексная величина, модуль которой равен действующему значению синусоидального тока, а аргумент – начальной фазе этого тока.

Пример. Пусть имеется гармонический

ТОК

$$i(t) = 5 \cos(\omega t + 53^\circ) A$$

Записать его комплексный мгновенный ток, комплексную амплитуду и комплексный действующий ток.

$$\underline{i}(t) = 5e^{j(\omega t + 53^\circ)} A$$

- комплексный мгновенный ток

Комплексная амплитуда тока:

$$\underline{I}_m = 5e^{j53^\circ} A$$

– в показательной форме;

$$\underline{I}_m = (5 \cos 53^\circ + j5 \sin 53^\circ) A$$

– в тригонометрической форме;

$$\underline{I}_m = (3 + 4j) A$$

– в алгебраической форме.

Комплексный действующий ток:

$$\underline{I} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{j53^\circ} A$$

– в показательной форме;

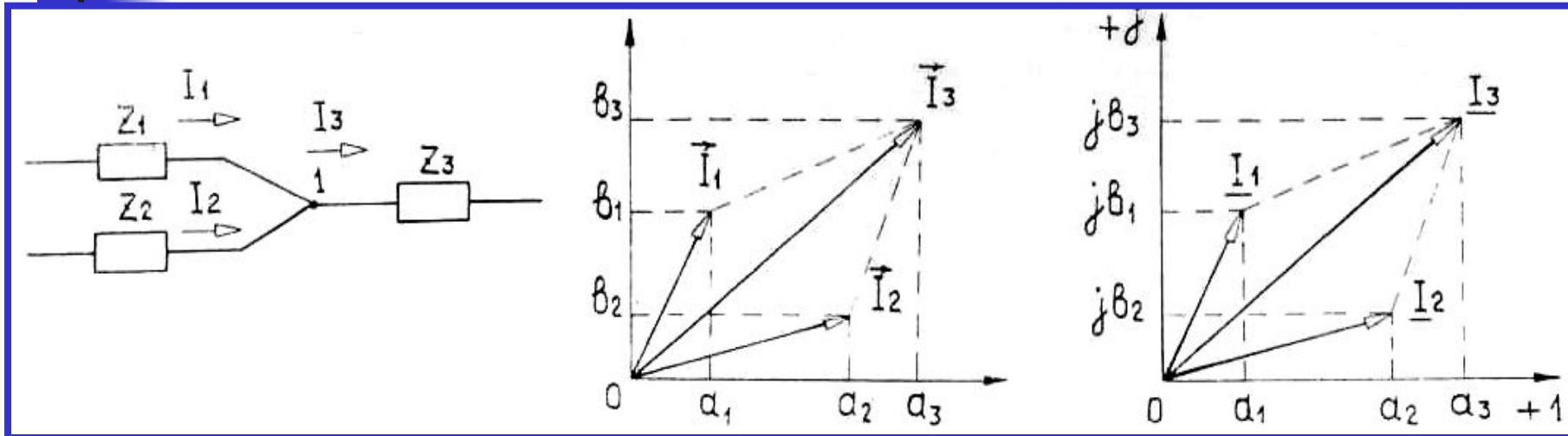
$$\underline{I} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \cos 53^\circ + j \frac{5}{\sqrt{2}} \sin 53^\circ \right) A$$

– в тригонометрической форме;

$$\underline{I} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + j \frac{4}{\sqrt{2}} \right) A$$

– в алгебраической форме.

Сложение комплексных ТОКОВ



$$\underline{I}_3 = a_3 + j b_3 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = (a_1 + j b_1) + (a_2 + j b_2) = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

Геометрической сумме векторов синусоидальных электрических величин соответствует алгебраическая сумма комплексных чисел, изображающих эти векторы.

Дифференцирование и интегрирование гармонических функций

$$\frac{di}{dt} = -\omega \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \omega \cdot I_m \cos(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2})$$

$$\int i dt = \frac{I_m}{\omega} \cdot \sin(\omega t + \psi_i) = \frac{I_m}{\omega} \cdot \cos(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2})$$

$$\left(\frac{di}{dt} \right) = \omega \cdot I_m e^{j(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2})} = \omega \cdot I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\frac{di}{dt} \right) = j \omega \underline{i}$$

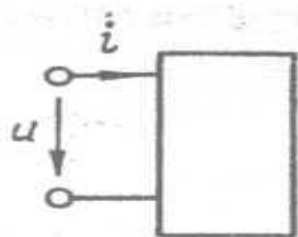
$$\left(\int i dt \right) = \frac{I_m}{\omega} e^{j(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2})} = \frac{I_m}{\omega} e^{j(\omega t + \psi_i)} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\int i dt \right) = \frac{\underline{i}}{j \omega}$$

Выводы

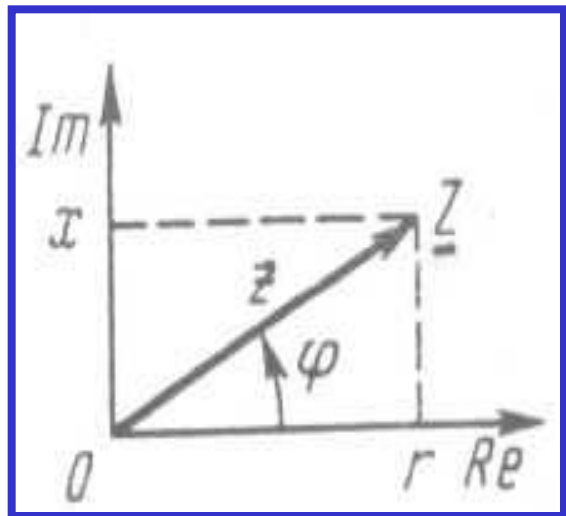
- 1. Операции дифференцирования (интегрирования) синусоидальных функций можно заменить алгебраич. операциями умножения (деления) комплексных мгновенных значений (комплексных амплитуд) этих функций на $j\omega$.
- 2. При переходе от синусоидальных электрических величин (оригиналов) к их символам (комплексным числам) удаётся **полностью алгебраизовать все операции над синусоидальными электрическими величинами.**
- 3. Это позволяет **существенно упростить анализ линейных цепей синусоидального тока**, т.к. даёт возможность заменить систему интегро-дифференц. уравнений цепи, составленную для мгновенных значений токов и напряжений, системой алгебраических уравнений для комплексных амплитуд соответствующих токов и напряжений.

Комплексное сопротивление пассивного двухполюсника



$$i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i) = I_m \cos(\omega t + \psi_i),$$

$$u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u) = U_m \cos(\omega t + \psi_u)$$



$$\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{I_m e^{j\psi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\psi_u - \psi_i)}$$

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$$

$$\underline{Z} = r + jx$$

$$\underline{Z} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi$$

$$\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$$

**-модуль комплексного
сопротивления (полное входным
сопротивление)**

$$\varphi = \psi_u - \psi_i$$

Закон Ома в комплексной форме



Георг Симон Ом
1789 – 1854

$$\begin{cases} \underline{U}_m = \underline{Z} \underline{I}_m, \underline{U} = \underline{Z} \underline{I}; \\ \underline{I}_m = \underline{Y} \underline{U}_m, \underline{I} = \underline{Y} \underline{U}. \end{cases}$$

1 закон Кирхгофа в комплексной форме:



Густав Роберт
Кирхгоф
1824 - 1887

$$\sum_k \underline{I}_{mk} = 0$$

$$\sum_k \underline{I}_k = 0$$

сумма комплексных амплитуд (комплексных действующих значений) токов всех ветвей, подключённых к каждому из узлов электрической цепи, равна нулю.



Густав Роберт
Кирхгоф
1824 - 1887

2 закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum_n \underline{U}_{mn} = 0$$

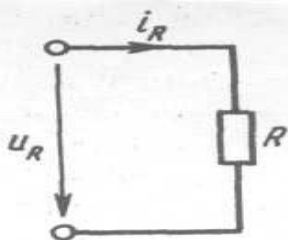
$$\sum_n \underline{U}_n = 0$$

сумма комплексных амплитуд
(комплексных действующих значений)
напряжений всех ветвей, входящих в
замкнутый контур электрической цепи,
равна нулю (1-я формулировка)

$$\sum_j \underline{E}_j = \sum_i \underline{I}_i \underline{Z}_i$$

сумма комплексных ЭДС,
действующих в замкнутом контуре
электрической цепи, равна сумме
комплексных падений напряжений на
комплексных сопротивлениях
участков этого контура (2-я
формулировка)

Резистивный элемент при гармоническом воздействии



$$u_R = U_{mR} \cos(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2}U_R \cos(\omega t + \psi_u)$$

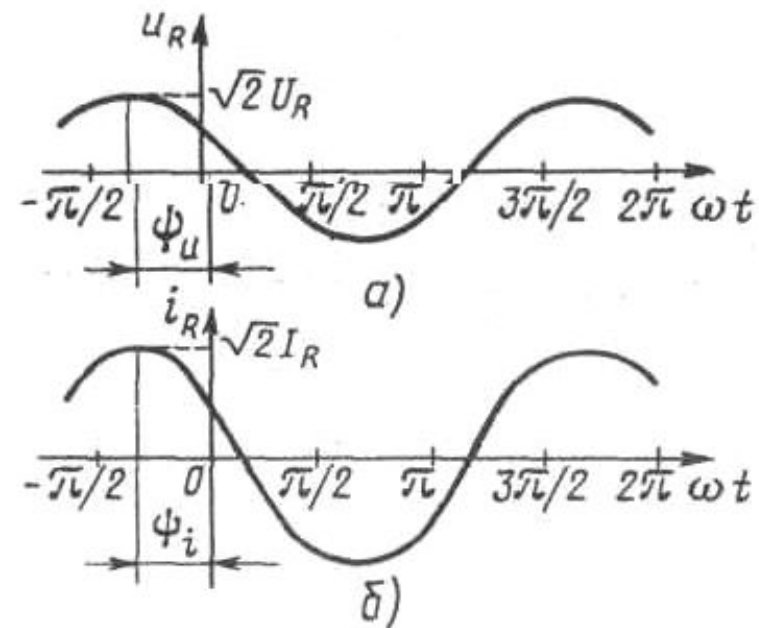
$$i_R = \frac{U_R}{R} = \frac{\sqrt{2}U_R}{R} \cos(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2}I_R \cos(\omega t + \psi_i)$$

$$i_R = I_{mR} \cos(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2}I_R \cos(\omega t + \psi_i)$$

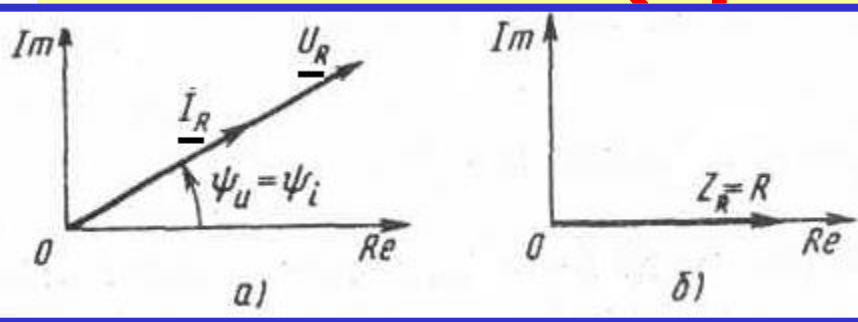
Ток и напряжение линейного резистивного элемента совпадают по фазе:

$$\psi_u = \psi_i = \psi$$

$$I_R = \frac{U_R}{R}$$



Резистивный элемент при гармоническом воздействии (продолжение)



$$\underline{I}_R = I_R e^{j\psi_i} = \frac{U_R}{R} e^{j\psi_u}$$

$$\underline{U}_R = U_R e^{j\psi_U}$$

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}_R}{\underline{I}_R} = \frac{U_R e^{j\psi_u}}{I_R e^{j\psi_i}} = \frac{U_R}{I_R} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = Z_R e^{j\varphi_R} = Z_R \cos \varphi_R + j Z_R \sin \varphi_R = r_R + jx_R$$

ВЫВОДЫ. 1. Модуль комплексного сопротивления:

$$Z = |\underline{Z}_R| = \frac{U_R}{I_R} = R$$

2. Ток и напряжение совпадают по фазе, аргумент комплексного сопротивления;

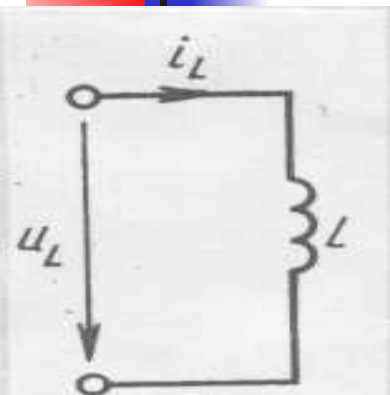
$$\varphi_R = \varphi_u - \varphi_i = 0$$

3. Комплексное входное сопротивление резистивного элемента содержит только вещественную составляющую:

$$r_R = R$$

$$x_R = 0$$

Индуктивный элемент при гармоническом воздействии



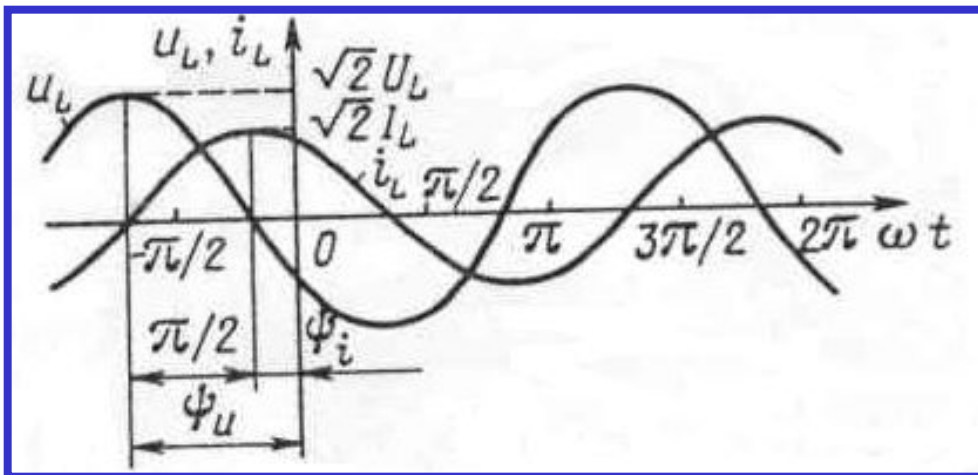
$$i_l = I_{ml} \cos(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2} I_L \cos(\omega t + \psi_i)$$

$$U_l = L \frac{di_l}{dt} = L \frac{d[\sqrt{2} I_L \cos(\omega t + \psi_i)]}{dt} = -\omega L \sqrt{2} I_L \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$\sqrt{2} \omega L I_L \cos(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} U_L \cos(\omega t + \psi_u)$$

$$U_L = \omega L I_L$$

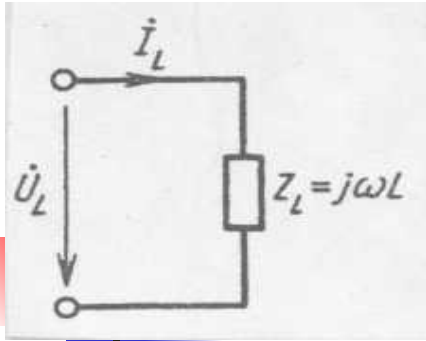
$$U_L = \sqrt{2} U_L \cos(\omega t + \psi_u) = U_{mL} \cos(\omega t + \psi_u)$$



Напряжение линейного индуктивного элемента опережает ток по фазе на угол $\pi/2$:

$$\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}$$

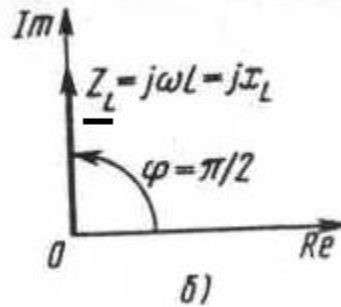
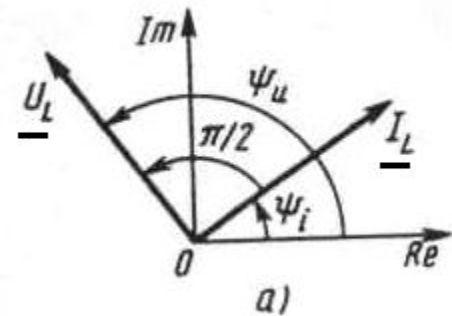
Индуктивный элемент при гармоническом воздействии



$$\underline{I}_L = I_L e^{j\psi_i};$$

$$\underline{U}_L = U_L e^{j\psi_u} = \omega L I_L e^{j(\psi_i + \frac{\pi}{2})}.$$

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} = \frac{\omega L I_L e^{j(\psi_i + \frac{\pi}{2})}}{I_L e^{j\psi_i}} = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L$$



ВЫВОДЫ. 1. Модуль комплексного сопротивления:

$$Z = |\underline{Z}_L| = \omega L;$$

2. Начальная фаза напряжения на $\pi/2$ больше начальной фазы тока

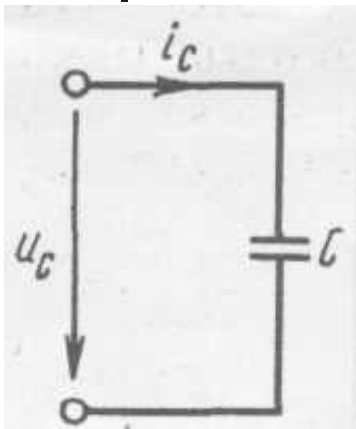
$$\varphi_L = \frac{\pi}{2};$$

3. Комплексное входное сопротивление резистивного элемента содержит только мнимую составляющую:

$$r_L = 0$$

$$x_L = \omega L$$

Ёмкостной элемент при гармоническом воздействии

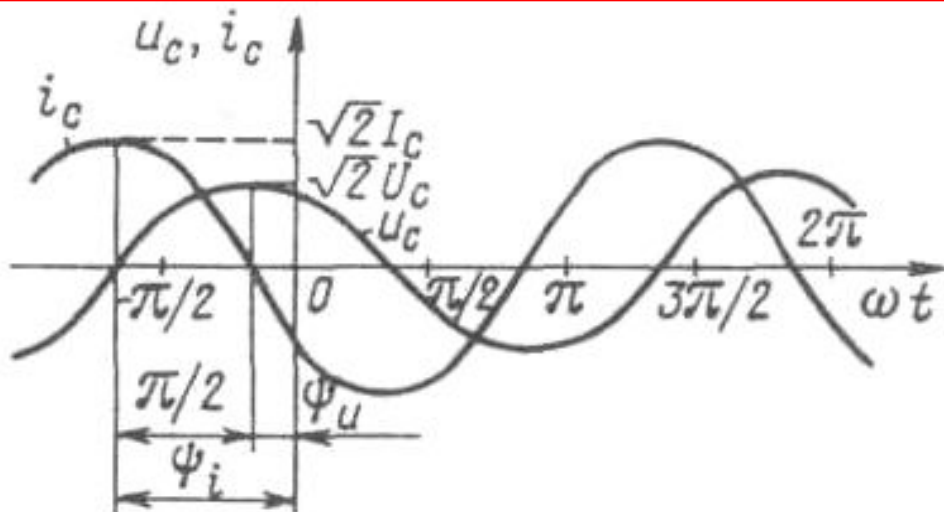


$$U_c = U_{mc} \cos(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2}U_c \cos(\omega t + \psi_u)$$

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = C \frac{d[\sqrt{2}U_c \cos(\omega t + \psi_u)]}{dt} = \omega C \sqrt{2}U_c \sin(\omega t + \psi_u) = \sqrt{2}\omega C U_c \cos(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}I_c \cos(\omega t + \psi_i)$$

$$I_c = \omega C U_c$$

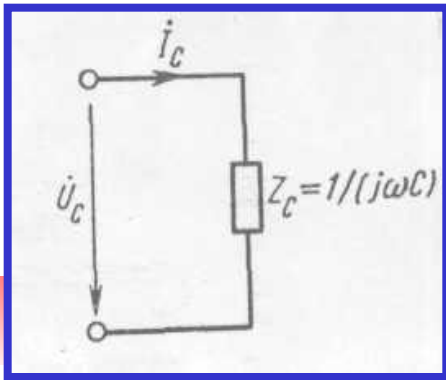
$$i_c = \sqrt{2}I_c \cos(\omega t + \psi_i) = I_{mc} \cos(\omega t + \psi_i)$$



Ток линейного ёмкостного элемента опережает напряжение по фазе на угол $\pi/2$:

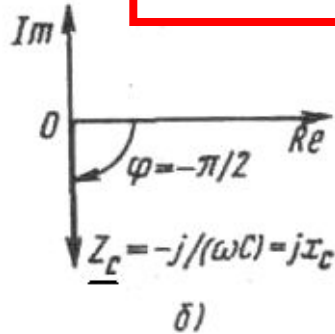
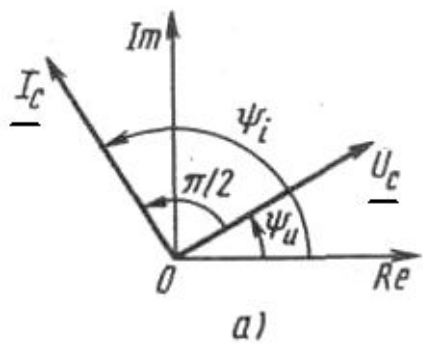
$$\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}$$

Ёмкостный элемент при гармоническом воздействии



$$U_c = U_c e^{j\psi_u}$$

$$I_c = I_c e^{j\psi_i} = \omega C U_c e^{j(\psi_u + \frac{\pi}{2})}$$



$$Z_c = \frac{U_c}{I_c} = \frac{U_c e^{j\psi_u}}{\omega C U_c e^{j(\psi_u + \frac{\pi}{2})}} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

ВЫВОДЫ. 1. Модуль комплексного сопротивления:

$$|Z_c| = \frac{1}{\omega C};$$

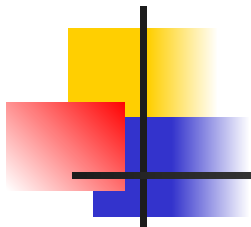
2. Начальная фаза тока на $\pi/2$ больше начальной фазы напряжения

$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2};$$

3. Комплексное входное сопротивление ёмкостного элемента содержит только мнимую составляющую:

$$r_c = 0;$$

$$x_c = \frac{1}{\omega C};$$



**Спасибо
за работу и внимание!**

