Лекция 4
Многомерность («проклятье размерностей», т.Эйлера на поверхностях рода ≥ 0, знаковые графы и др.)

Шведовский В.А. д.соц.н., к.ф.-м.н.

Спецкурс ВМК «Математическое моделирование в социологии»

Преодоление «проклятья размерности» и его цена

- Теорема. Для любого конечного графа G_p ={V, E}, | V |<∞, |E|<∞ существует его реализация в трёхмерном пространстве R^3 .

- Док-во. Возьмём в R^3 –пространстве прямую и расположим на ней все вершины V1, V2, …, Vp. Пусть число рёбер |E|= q. Проведём через прямую связку плоскостей в количестве q. Получится «книга с q страницами», на каждой из которых разместится по одному ребру, концы которых будут упираться в свою пару вершин ViVj. ЧТД.

Теорема Турана о существовании у графа G треугольника

Теорема   *Наибольшее число ребер у графов, имеющих p вершин и не содержащих треугольников, равно* $[p^2/4]$.

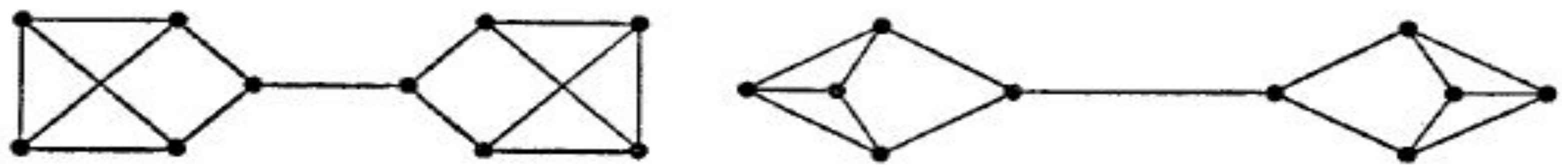
Док. во. Отношение [] означает ближайшее целое число, меньшее вычисленного в
скобках. Для малых p, например, 3 или 4, утверждение очевидно: для p=3 $[p^2/4] = 2$,
для p= 4 $[p^2/4] = 3$. Будем доказывать методом индукции (для чётных p, - для нечётных доказываете сами). Итак, пусть утверждение справедливо для всех чётных
$P \le 2n$. Докажем его для $p = 2n + 2$.
Тогда возьмём граф G с $2n + 2$ – вершинами и не содержащий треугольников. Из факта связности графа вытекает существование у него пары смежных вершин u, v.

В подграфе $G1 = G – \{u,v\}$ имеется $2n$ вершин и нет треугольников, так что по предположению индукции в графе G1 самое большее $[4n^2/4] = n^2$ рёбер. Подсчитаем,
сколько рёбер может быть в графе G.

В графе G не существует такой вершины w, смежной с u, v, ибо тогда в нём был бы треугольник. Таким образом, если вершина u смежна с k вершинами, то вершина v может быть смежна самое большее с 2n – k вершинами. Поэтому в

Планарные и плоские графы

Граф называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости; *плоский граф* — это граф, уже уложенный на плоскости. Например, кубический граф, показанный на рис. 11.1, *а*, планарный, поскольку он изоморфен плоскому графу, изображенному на рис. 11.1, *б*.



а *б*

Рис. 11.1. Планарный граф и его укладка.

Области, определяемые плоским графом, назовем его *гранями* (или *внутренними гранями*); неограниченную область будем называть *внешней гранью*. Если границей грани плоского графа является простой цикл, то иногда под гранью будем понимать этот цикл. Плоский граф, представленный на рис. 11.2, имеет две внутренние грани f_1, f_2 и одну внешнюю f_3. Из этих граней только f_2 ограничена простым циклом.

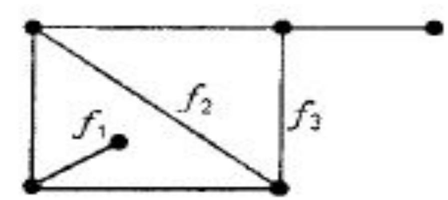


Рис. 11.2. Плоский граф.

Изучение планарных графов было начато Эйлером в его исследованиях полиэдров. С каждым полиэдром связан граф, состоящий из точек и линий полиэдра; этот граф называется 1-*скелетом*. Например, граф Q_3 есть 1-скелет куба.

Теорема Эйлера (для плоскости – сферы и 2-мерной поверхности рода $\gamma \geq 1$)

- Формула Эйлера: $V-E+F = 2 - 2\gamma$, для сферы $\gamma = 0$

Теорема 1 (формула Эйлера для полиэдров). *Для любого полиэдра, расположенного на сфере и имеющего V точек, E линий и F граней,*

$$V - E + F = 2. \qquad (1 \quad)$$

Для 3-куба имеем $V=8$, $E=12$ и $F=6$, так что равенство (1) выполняется; для тетраэдра $V=F=4$ и $E=6$. Прежде чем доказывать равенство (1) в общем случае, переформулируем его в теоретико-графовых терминах. *Плоской картой* называется связный плоский граф вместе со всеми его гранями. Уравнение (1) для плоской карты (с p вершинами, q ребрами и r гранями) будет иметь вид

$$p - q + r = 2. \qquad (\quad 1')$$

Теорема Эйлера (продолжение)

- Возьмём остов (дерево) любого плоского n-графа, в котором имеются циклы. В таком графе число вершин $p=n$, а число рёбер $q=n-1$ и число граней $r=1$, ибо циклов нет, а есть только одна внешняя грань, т.е.
  - $p - q + r = 2$
- Будем достраивать по 1 ребру остов до его первоначального графа, и тогда каждое новое ребро доставляет ещё и одну новую грань, что оставляет справедливой приведённую формулу, ч.т.д.

Теорема о плоской карте

- Если графу G соответствует плоская (p,q)- карта, в которой каждая грань является n – циклом, т.е. содержит n – рёбер, то
  - **q= n*(p-2)/(n-2)   (&)**
- Д-во: Поскольку каждая грань графа G есть n – цикл, то любое ребро принадлежит двум граням, а каждая грань содержит n – рёбер. Отсюда: **n*r = 2q.**
- Подставим это выражение в **p - q+r = 2:**
- **p- q + 2q/n = 2** → **p-2 = q*(1-2/n)**   Отсюда (&) Ч.т.д.
- **Для максимальных планарных графов:**
- Следствие 1: Если длина цикла n =3, то **q = 3 p – 6;**

- Следствие 1: Если длина цикла n =4, то **q = 2 p – 4;**

Теорема Куратовского - Понтрягина

Теорема *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$.*

- Д-во. 1) Проверим планарность графа $К_5$: p=5, q –число рёбер
- Условие планарности: $q \leq 3p-6$, т.е. $q_{план} = 9$, но в $К_5$ $q = 10$,
- Аналогично для $К_{3,3}$: $q_{план} = 12$, а по факту для $К_{3,3}$ $q = 16$

- 2)Так как графы $К_5$ и $К_{3,3}$ непланарны, то это значит, что содержащие их в качестве подграфов графы также непланарны, ч.т.д.

Фрагмент из книги Ф.Харари «Теория графов», М.: МИР, 1973

Теория графов в двадцатом веке

В 1936 г. психолог Левин [1] высказал предположение, что «жизненное пространство» индивидуума можно представить с помощью планарной карты [1]). На такой карте области представляют различные типы деятельности человека, например, то, что он делает на работе, дома, или же его хобби.

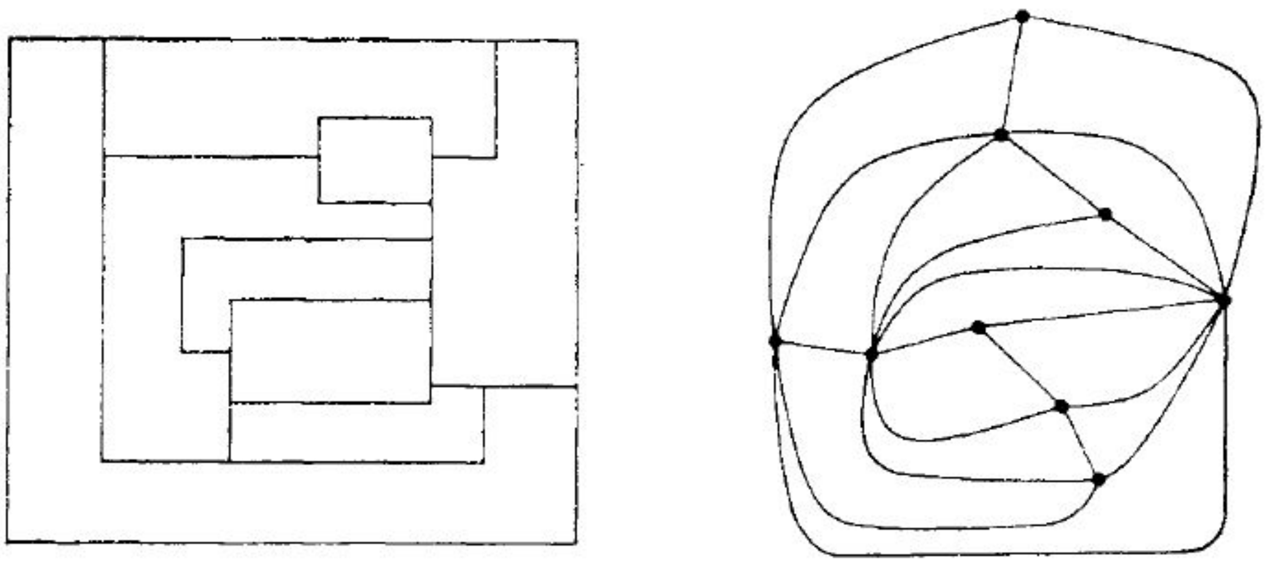
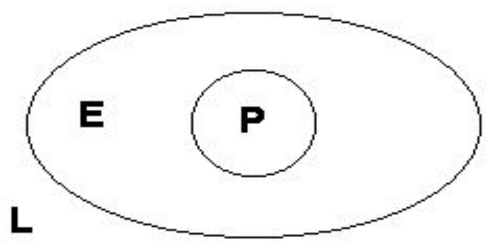
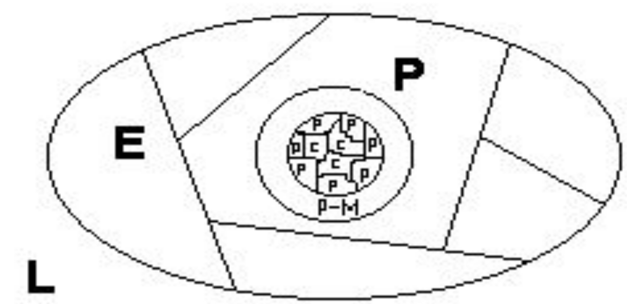


Рис. 1.6. Карта и соответствующий ей граф.

Модель К.Левина жизненного пространства личности

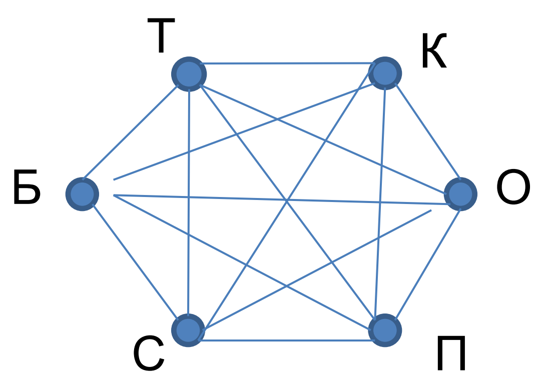
L – жизненное пространство,
p – сама личность с её ячеистой структурой ,
E – психологическая среда, I - информация
Движение фокуса психической активности по ячейкам структуры личности есть процесс её самоидентификации и считывания требуемой I





$\varpi = \{\omega_n\}^{+\infty}_{-\infty}$

$\boldsymbol{\sigma} \{\omega_n\} = \{\omega_{n+1}\}$

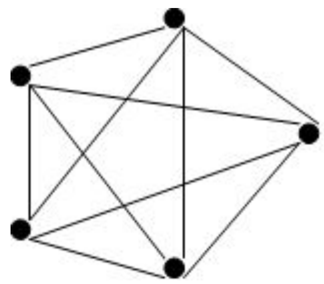


₤{Т, Б, К, О, С, П}

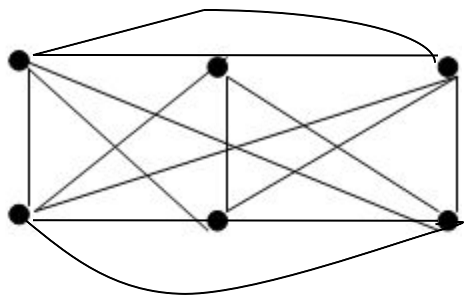
$\Psi(x) = \varpi = \{\omega_n\} \leftrightarrow \mathbf{f}^n x \in E\omega_n \leftrightarrow \mathbf{x} \in \bigcap_n f^{-n} E\omega_n$

Теорема Куратовского - Понтрягина

$К_5$

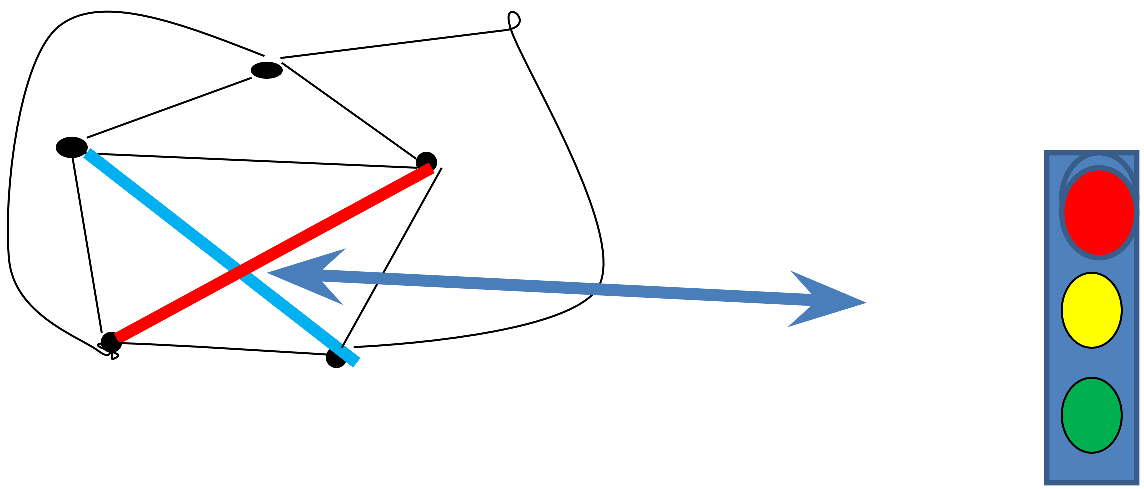


$К_{3,3}$



D=5

D = 4



Построение многомерной сети

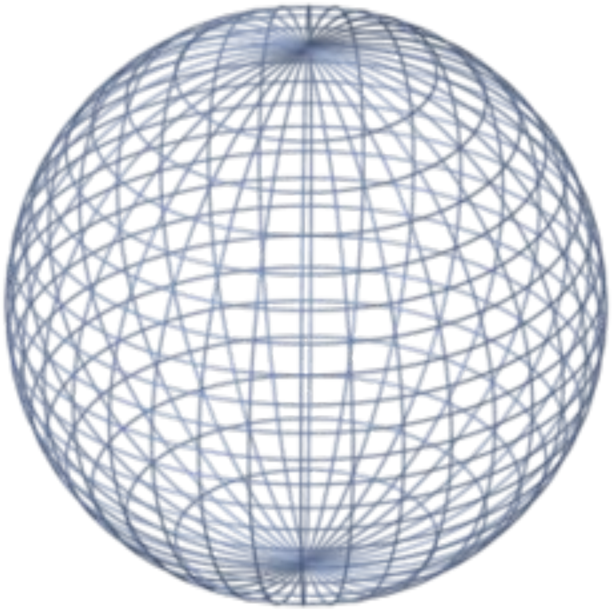
- Рассмотрим граф **n** – мерного куба, т.е. удалим все грани и оставим только вершины и рёбра (такой граф не является полным). Тогда минимальный род двумерных поверхностей, на которых такой граф будет представлен без пересечений ребер, записывается формулой:

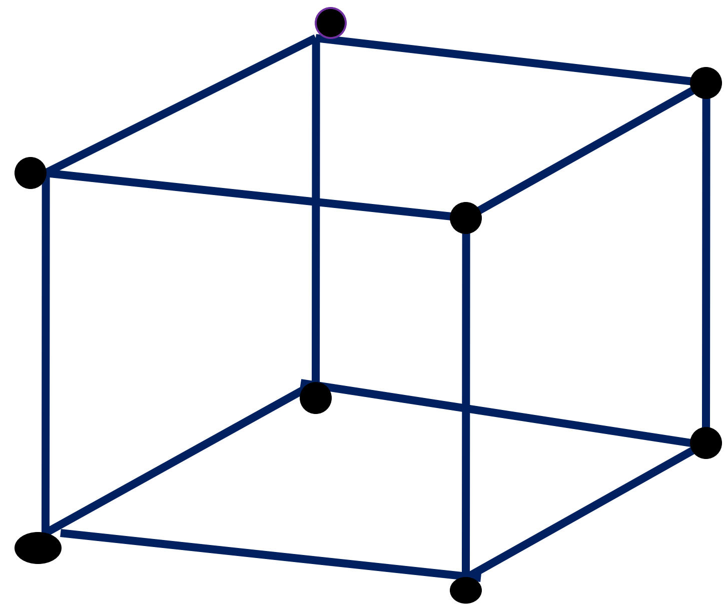
$$\gamma(n) = (n-4)*2^{(n-3)} + 1$$

Байнеке Л.В., Харари Ф. (1974)

Сферическая поверхность - род «γ=0» и граф 3-х куба, образующего сеть на сфере без рёберных пересечений (аналог планарного графа)

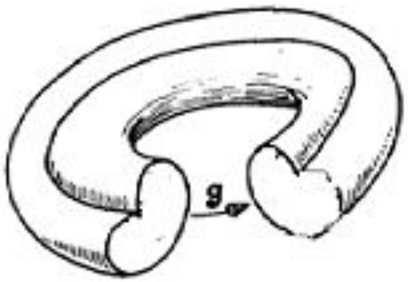
Отличие от плоскости: компактность поверхности, т.е. допускает конечное покрытие поверхности многоугольниками

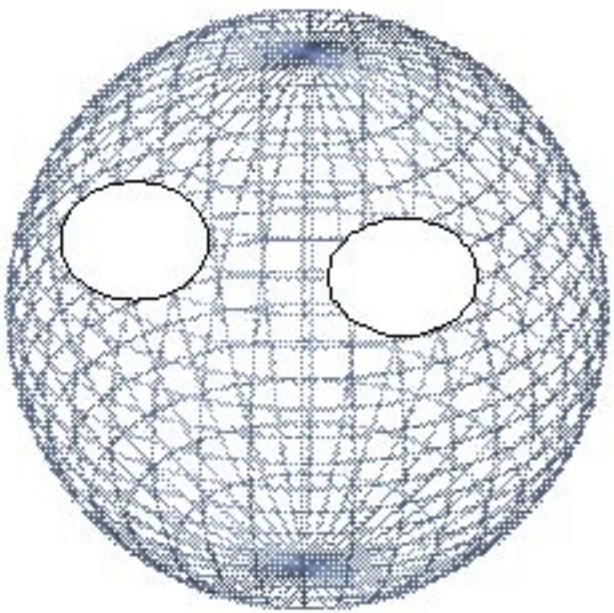


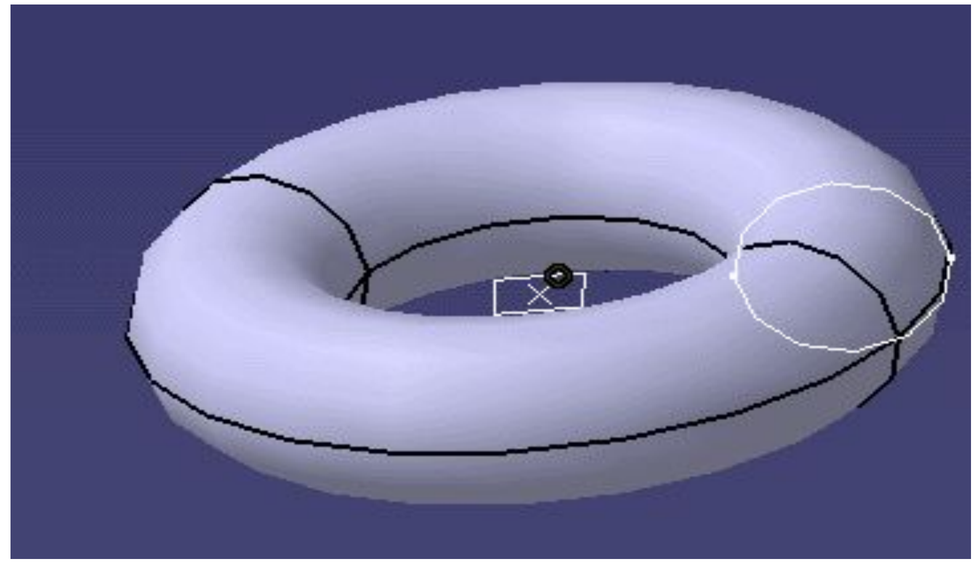


Теорема Эйлера: 2 - 2 * γ = V – E + F = 8 – 12 + 6 = 2

Метод построения поверхностей рода $\gamma>0$ - приклеивание «ручек» к вырезанным отверстиям





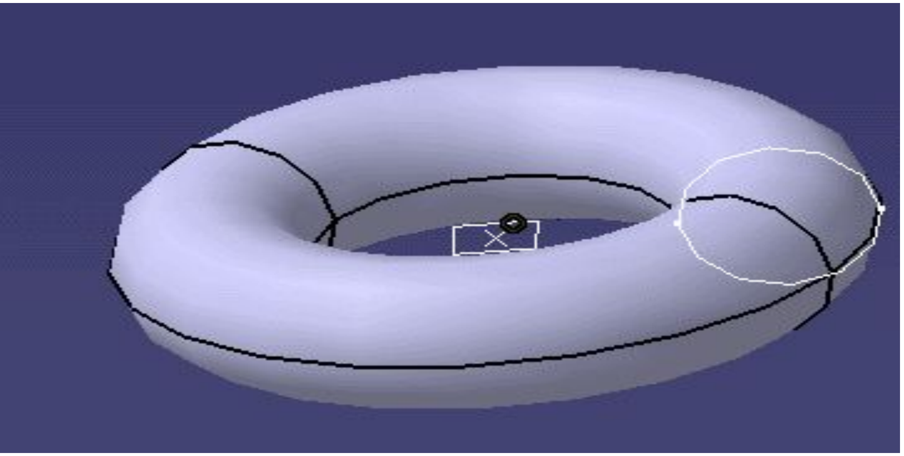


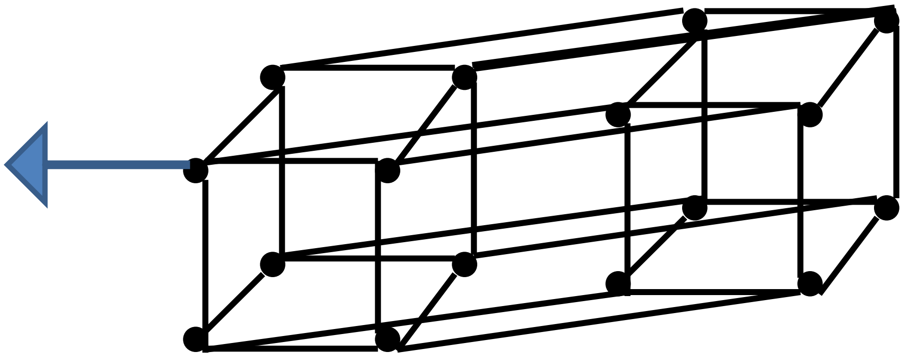
$\gamma = 1$

Минимальная сеть - граф 4-х куба для поверхности тора

$$\gamma(n) = (n-4)*2^{(n-3)} + 1$$

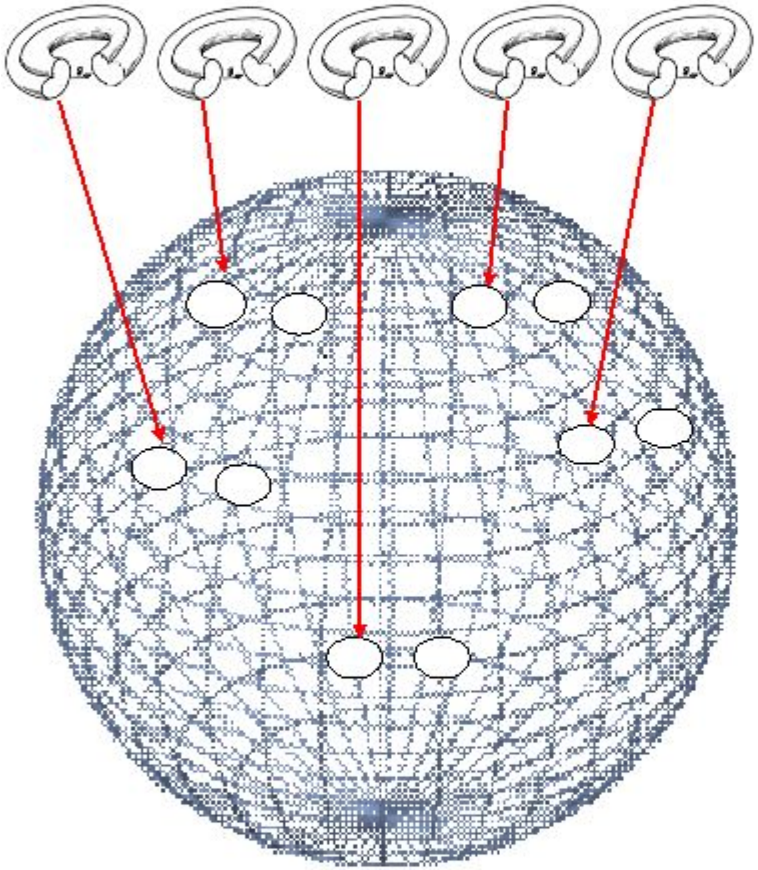
$$\gamma(4) = (4-4)*2^{(4-3)} + 1 = 1$$



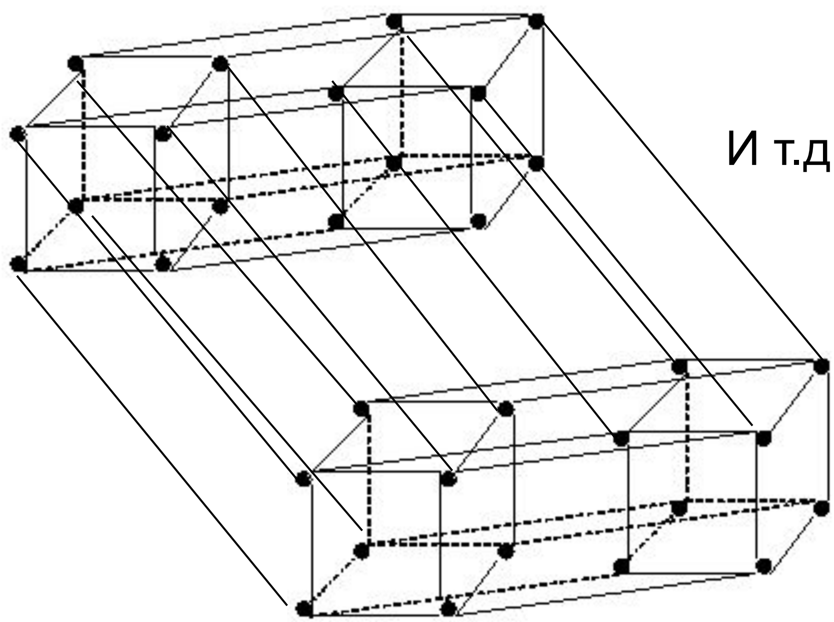


Каков род поверхности для графа 5-мерного куба?

$$\gamma(5) = (5-4)*2^{(5-3)} + 1 = 5$$



Вид минимальной «безсветофорной» сети для пространства личности с **γ(5)**



И т.д.

Побочный продукт-
32-х вершинный классификатор:
В каждой вершине совмещаются полюса шкал семантического дифференциала, например, вариант выбора идеала Спутника

Душевный – чёрствый
Аккуратный – неряшливый
Волевой – безвольный
Трудолюбивый – ленивый
Спокойный - нервный

Оценки min числа неустранимых рёберных пересечений для обыкновенных графов, расположенных на плоскости

- это наименьшее число, согласно Т.Саати (1964), не превосходит

- **$1/64 * n * (n-2)^2 * (n-4)$ - при n чётном**
-
- и не превосходит
-
- **$1/64 * (n-1)^2 * (n-3)^2$ - при n нечётном**

К объяснению смысла «7» в законе «7 ± 2»

Табл.1. Зависимость эффективности построения «безсветофорной» сети посредством усложнения топологии поверхности от её рода

Степень вершин графа G(X, U)	Число «свето – форов»	Число ручек	Число светофоров на 1 ручку	Число вершин G(X, U) Абсолютное	Число вершин G(X, U) Относитель. - на 1 ручку
n	**m**	**$\gamma(n)$**	**$m/\gamma(n)$**	**$\lvert X\rvert$**	**$\lvert X\rvert/\gamma(n)$**
4	**0**	**1**	**0**	**16**	**16**
5	0.5	5	0.1	32	6.4
6	3	17	0.17	64	3.76
7	9	49	0.18	128	2.61
8	18	129	0.13	256	1.98
9	36	321	0.11	512	1.59
10	60	769	0.07	1024	1.33
11	100	**1793**	0.055	2048	1.14

Характеристика Эйлера-Пуанкаре $\boldsymbol{\chi}$ *графа многомерной сети на поверхности рода* ***p***

- Эта характеристика в данном контексте – «p = **γ(n)» -** определяется как

$$\chi = 2 - 2p = 2 - (n-4)*2^{(n-2)} - 2 = (4-n)*2^{(n-2)}$$

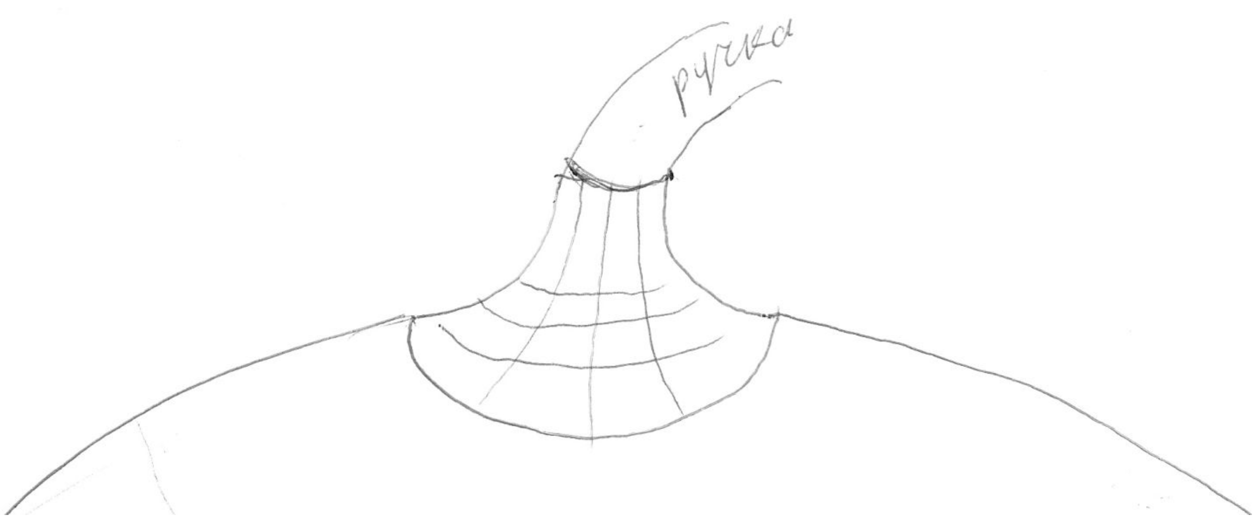
n	p	χ	Δχ
3	0	2	
4	1	0	- 8
5	5	-8	-24
6	17	-32	-128
7	49	-160	-96
8	129	--256	-384

Связь с гауссовой кривизной

- характеристика Эйлера-Пуанкаре связана со средним по поверхности от величины гауссовой кривизны:

- $\int \mathbf{KdS = 2\pi\ \chi}$

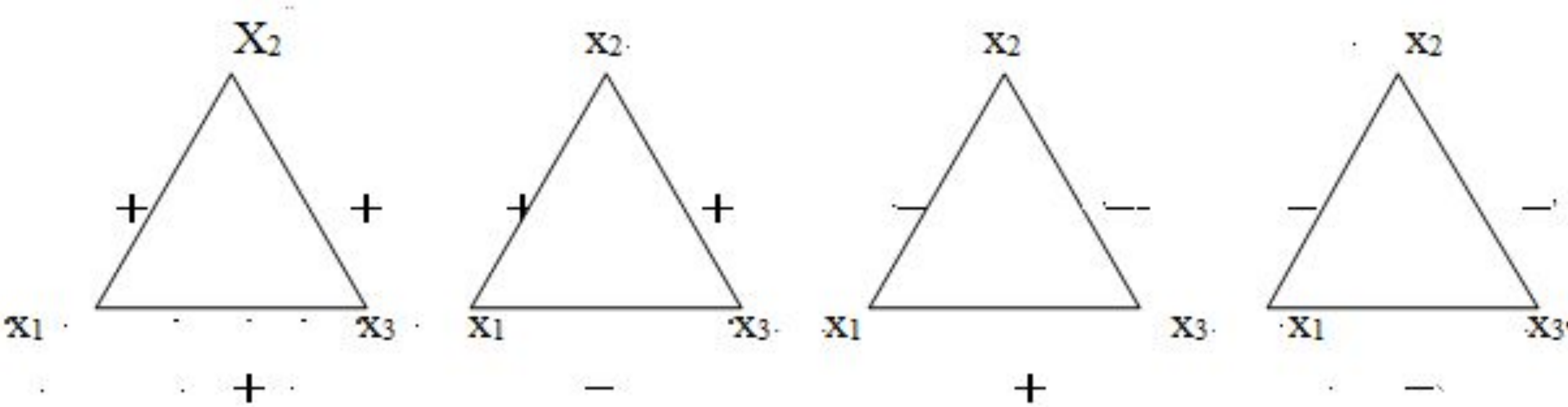
$\int K ds$ -интеграл по поверхности сопряжения ручки со сферой



$\int K^{-} ds =$

Пробл$\int_{3\pi/2}^{\pi} \cos(\varphi) \cdot \sqrt{}(r2 + R2 - 2Rr\cos(\varphi))/(R + r\cos(\varphi))d\varphi \int_{2\pi}^{0} d\psi$г кривизны в среднем отрицательнои к кривизне отрицательной в почти каждой точке

Знаковые графы и структурная теорема



Второй и четвертый гра… . отношений – напряженные, неустойчивые ситуации.
Первый и третий – стабильное равновесие.

Структурная теорема Хайдера, Харари и Картрайта.

Знаковый граф сбалансирован, если и только если все множество его вершин может быть разбито на два подмножества таких, что в каждом из них вершины соединены ребром с положительным знаком, а вершины, принадлежащие разным подмножествам соединены между собой ребром с отрицательным знаком.

Пример применения т. Хайдера – Картрайта - Харари

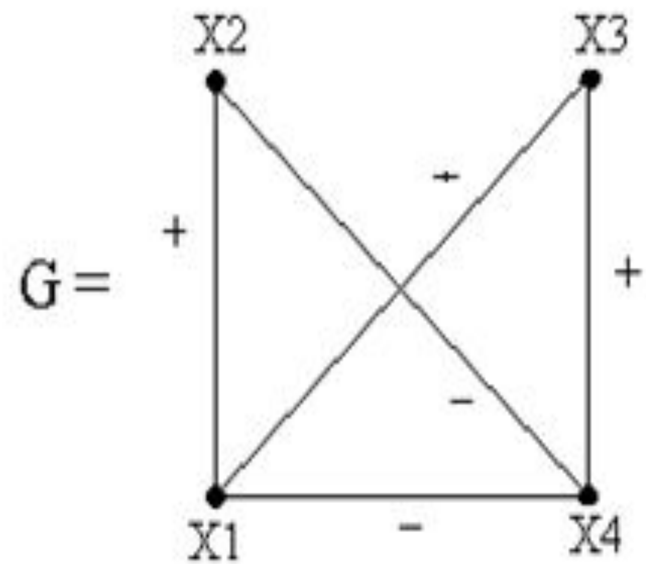


Рис. Граф отношений взаимных симпатий и антипатий в группе из 4-х субъектов.

Литература

- 1. Емеличев В.А. Мельников О.И. и др. Лекции по теории графов: Учебное пособие. Изд. 4-е. М.: ЛЕНАНД, 2015.- 390 с.
- 2. Оре О. Теория графов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»/URSS, 2009. – 352 с.
- 3. Харари Ф. Теория графов. – М.: КомКнига /URSS, 2006. – 296 с.
- 4. Панюкова Т.А. Комбинаторика и теория графов: Учебное пособие. Изд. 3-е. испр. М.: ЛЕНАНД, 2014.- 216 с.