

# **Графоаналитические методы оценки параметров распределения**

*(Ахметов С.К.)*

# **Последовательность расчетов графоаналитическим методом, основанным на кривой Пирсона III типа**

**Дано:** Ряд наблюдений за СВ

**Требуется:** Оценить параметры распределения –  $x_{cp.}$ ,  $\sigma_x^*$ ,  $C_v^*$ ,  $C_s^*$

## **Последовательность расчетов**

1. Ряд наблюдений ранжируется в убывающем порядке
2. По формуле  $p_m = (m/(n + 1))100\%$ , где  $m$  - порядковый номер, а  $n$  – число наблюдений, рассчитываются ординаты эмпирической кривой обеспеченности
3. На клетчатку вероятности наносятся точки эмпирической кривой распределения. При этом по оси ординат *откладываются значения самой СВ, а не модульные коэффициенты*. По точкам проводится сглаженная кривая.

## Последовательность расчетов графоаналитическим методом, основанным на кривой Пирсона III типа

4. По сглаженной кривой определяются три опорные ординаты для обеспеченностей – 5, 50, 95%, т.е.  $x_5, x_{50}, x_{95}$

Это позволяет составить уравнения для оценки параметров ( $x_{cp}, \sigma_x^*, C_v, C_s^*$ ) по формуле

$$x_p = t_p \sigma_p + m_x$$

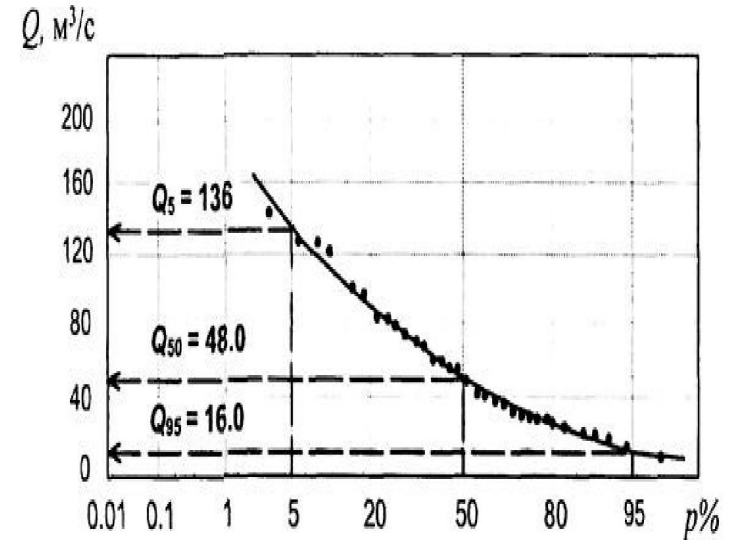
Итак, можно записать, что

$$x_5 = t_5 \sigma_x^* + x_{cp.}$$

$$x_{50} = t_{50} \sigma_x^* + x_{cp.}$$

$$x_{95} = t_{95} \sigma_x^* + x_{cp.}$$

Здесь  $t_5, t_{50}, t_{95}$  – нормированные ординаты кривой обеспеченностей Пирсона III типа, которые определяются по таблице



## *Последовательность расчетов графоаналитическим методом, основанным на кривой Пирсона III типа*

5. Рассчитывается коэффициент скошенности ***S***

$$S = (x_p + x_{100-p} - 2x_{50}) / (x_5 - x_{95})$$

Так как у нас обеспеченность первой ординаты равна 5%, то

$$S = (x_5 + x_{95} - 2x_{50}) / (x_5 - x_{95})$$

подставляя вместо  $x_5, x_{50}, x_{95}$  формулы, записанные выше, получим

$$S = (t_5 + t_{95} - 2t_{50}) / (t_5 - t_{95})$$

6. Зная ***S*** и ***p*** по таблице нормированных ординат для кривой Пирсона III типа находятся значения коэффициента асимметрии  $C_s^*$ . Т.о., находится первая оценка параметра распределения

7. Зная ***S*** и ***p*** по таблице нормированных ординат для кривой Пирсона III типа находятся также ***t***<sub>5</sub>, ***t***<sub>50</sub>, ***t***<sub>95</sub>

Нормированные ординаты кривой обеспеченностей Пирсона III типа,

$$t_p = f(C_s, p); t_p = (x_p - \bar{x}) / \sigma = (k_p - 1) / C_v$$

$C_s$	Обеспеченность, $p$ %																	$S$
	0,01	0,1	1,0	5,0	10	20	25	30	50	70	75	80	90	95	97	99	99,9	
-1,8	1,11	1,11	1,09	1,02	0,94	0,80	0,72	0,64	0,28	-0,24	-0,42	-0,64	-1,32	-1,99	-2,46	-3,50	-5,64	-0,51
-1,6	1,26	1,24	1,20	1,10	0,99	0,81	0,73	0,64	0,25	-0,28	-0,46	-0,68	-1,33	-1,97	-2,42	-3,39	-5,37	-0,45
-1,4	1,41	1,39	1,32	1,17	1,04	0,83	0,73	0,64	0,22	-0,31	-0,49	-0,71	-1,34	-1,95	-2,37	-3,27	-5,09	-0,39
-1,2	1,68	1,58	1,45	1,24	1,08	0,84	0,74	0,63	0,19	-0,35	-0,52	-0,73	-1,34	-1,92	-2,31	-3,15	-4,81	-0,34
-1,0	1,92	1,79	1,59	1,32	1,13	0,85	0,73	0,62	0,16	-0,38	-0,55	-0,76	-1,34	-1,88	-2,25	-3,02	-4,53	-0,27
-0,8	2,23	2,02	1,74	1,38	1,17	0,86	0,73	0,60	0,13	-0,41	-0,58	-0,79	-1,34	-1,84	-2,18	-2,89	-4,24	-0,22
-0,6	2,57	2,27	1,88	1,45	1,20	0,85	0,72	0,59	0,10	-0,44	-0,61	-0,80	-1,33	-1,80	-2,12	-2,75	-3,96	-0,17
-0,4	2,98	2,54	2,03	1,52	1,23	0,85	0,71	0,57	0,07	-0,47	-0,63	-0,82	-1,32	-1,75	-2,04	-2,61	-3,66	-0,11
-0,2	3,37	2,81	2,18	1,58	1,26	0,85	0,69	0,55	0,03	-0,50	-0,65	-0,83	-1,30	-1,70	-1,96	-2,47	-3,38	-0,05
0,0	3,72	3,09	2,33	1,64	1,28	0,84	0,67	0,52	0,00	-0,52	-0,67	-0,84	-1,28	-1,64	-1,88	-2,33	-3,09	0,00
0,2	4,16	3,38	2,47	1,70	1,30	0,83	0,65	0,50	-0,03	-0,55	-0,69	-0,85	-1,26	-1,58	-1,79	-2,81	-2,81	0,06
0,4	4,61	3,66	2,61	1,75	1,32	0,82	0,63	0,47	-0,07	-0,57	-0,71	-0,85	-1,23	-1,52	-1,70	-2,03	-2,54	0,11
0,6	5,05	3,96	2,75	1,80	1,33	0,80	0,61	0,44	-0,10	-0,59	-0,72	-0,85	-1,20	-1,45	-1,61	-1,88	-2,27	0,17
0,8	5,50	4,24	2,89	1,84	1,34	0,78	0,58	0,41	-0,13	-0,60	-0,73	-0,86	-1,17	-1,38	-1,52	-1,74	-2,02	0,22
1,0	5,96	4,53	3,02	1,88	1,34	0,76	0,55	0,38	-0,16	-0,62	-0,73	-0,85	-1,13	-1,32	-1,42	-1,59	-1,79	0,28
1,2	6,41	4,81	3,15	1,92	1,34	0,73	0,52	0,35	-0,19	-0,63	-0,74	-0,84	-1,08	-1,24	-1,33	-1,45	-1,58	0,34
1,4	6,87	5,09	3,27	1,95	1,34	0,71	0,49	0,31	-0,22	-0,64	-0,73	-0,83	-1,04	-1,17	-1,23	-1,32	-1,39	0,39
1,6	7,31	5,37	3,39	1,97	1,33	0,68	0,46	0,28	-0,25	-0,64	-0,73	-0,81	-0,99	-1,10	-1,14	-1,20	-1,24	0,45
1,8	7,76	5,64	3,50	1,99	1,32	0,64	0,42	0,24	-0,28	-0,64	-0,72	-0,80	-0,94	-1,02	-1,06	-1,09	-1,11	0,51
2,0	8,21	5,91	3,60	2,00	1,30	0,61	0,39	0,20	-0,31	-0,64	-0,71	-0,78	-0,90	-0,95	-0,97	-0,99	-1,00	0,57
2,2	8,63	6,14	3,68	2,02	1,27	0,57	0,35	0,16	-0,33	-0,64	-0,69	-0,75	-0,84	-0,88	-0,90	-0,90	-0,91	0,62
2,4	9,00	6,37	3,78	2,00	1,25	0,52	0,29	0,12	-0,35	-0,62	-0,67	-0,72	-0,79	-0,82	-0,83	-0,83	-0,83	0,67
2,6	9,39	6,54	3,86	2,00	1,21	0,48	0,25	0,085	-0,37	-0,61	-0,66	-0,70	-0,75	-0,76	-0,77	-0,77	-0,77	0,72
2,8	9,77	6,86	3,96	2,00	1,18	0,44	0,22	0,057	-0,39	-0,60	-0,64	-0,67	-0,70	-0,71	-0,71	-0,72	-0,72	0,76
3,0	10,16	7,10	4,05	1,97	1,13	0,39	0,19	0,027	-0,40	-0,59	-0,62	-0,64	-0,66	-0,66	-0,67	-0,67	-0,67	0,80

## Последовательность расчетов графоаналитическим методом, основанным на кривой Пирсона III типа

8. Вычитая друг от друга уравнения  $x_5 = t_5 \sigma_x^* + x_{cp.}$  и  $x_{95} = t_{95} \sigma_x^* + x_{cp.}$ , получим оценку второго параметра - **СКО**

$$\sigma_x^* = (x_5 - x_{95}) / (t_5 - t_{95})$$

9. Оценку **МО** находим из третьего уравнения, а именно:  $x_{50} = t_{50} \sigma_x^* + x_{cp.}$

$$x_{cp.} = x_{50} - t_{50} \sigma_x^*$$

10. С учетом формулы того, что  $C_v = \sigma_x / m_x$  получим, что

$$C_v^* = \sigma_x^* / x_{cp.}$$

## ***Последовательность построения аналитической кривой распределения Пирсона III типа***

***Дано:***  $x_{cp.}$ ,  $\sigma_x^*$ ,  $C_v^*$ ,  $C_s^*$ ,  $t_5$ ,  $t_{50}$ ,  $t_{95}$  ряда СВ (только что определили)

***Требуется:*** Построить аналитическую кривую распределения

1. Определяем  $x_5$ ,  $x_{50}$ ,  $x_{95}$  по формулам

$$x_5 = t_5 \sigma_x^* + x_{cp.}$$

$$x_{50} = t_{50} \sigma_x^* + x_{cp.}$$

$$x_{95} = t_{95} \sigma_x^* + x_{cp.}$$

и наносим их на клетчатку вероятности распределения. Проводим по этим точкам сглаженную аналитическую кривую распределения.

## *Графоаналитический метод на основе трехпараметрической логарифмической кривой распределения*

- У этого вида распределения третий параметр ( $a$ ) не влияет на форму кривой обеспеченности, а лишь приводит к сдвигу по оси  $X$ . Поэтому, для этого вида распределения коэффициент скошенности  $S$  однозначно зависит от коэффициента асимметрии. Поэтому можно применить тот же способ, как и для кривой Пирсона III типа и составить таблицы
- Т.о., значения коэффициента скошенности  $S$ , вычисленные на основе опорных ординат  $t_5, t_{50}, t_{95}$  логнормального распределения в зависимости от коэффициента асимметрии  $C_s$ , определяются по таблице



**Значения коэффициента скошенности  $S$ ,  
вычисленные на основе опорных ординат  $t_5, t_{50}, t_{95}$   
логнормального распределения в зависимости от  
коэффициента асимметрии  $C_s$**

$C_s$	$S$	Нормированные ординаты $t_p$			$C_s$	$S$	Нормированные ординаты $t_p$		
		5 %	50 %	95 %			5 %	50 %	95 %
0	0	1,64	0	-1,64	1,9	0,41	1,89	-0,23	-1,12
0,1	0,03	1,67	-0,02	-1,62	2,0	0,42	1,89	-0,24	-1,10
0,2	0,06	1,70	-0,04	-1,59	2,1	0,44	1,89	-0,24	-1,08
0,3	0,09	1,72	-0,06	-1,56	2,2	0,45	1,89	-0,25	-1,06
0,4	0,11	1,75	-0,07	-1,53	2,3	0,46	1,88	-0,25	-1,04
0,5	0,14	1,77	-0,09	-1,49	2,4	0,48	1,88	-0,26	-1,02
0,6	0,16	1,79	-0,10	-1,46	2,5	0,49	1,88	-0,26	-1,00
0,7	0,19	1,81	-0,11	-1,43	2,6	0,50	1,87	-0,26	-0,99
0,8	0,21	1,82	-0,13	-1,40	2,7	0,51	1,87	-0,27	-0,97
0,9	0,23	1,84	-0,14	-1,37	2,8	0,51	1,86	-0,27	-0,96
1,0	0,25	1,85	-0,15	-1,34	2,9	0,52	1,86	-0,27	-0,95
1,1	0,27	1,86	-0,16	-1,31	3,0	0,53	1,85	-0,28	-0,93
1,2	0,29	1,87	-0,17	-1,29	3,2	0,55	1,84	-0,28	-0,90
1,3	0,31	1,88	-0,18	-1,26	3,4	0,56	1,83	-0,29	-0,88
1,4	0,33	1,88	-0,19	-1,23	3,6	0,57	1,81	-0,29	-0,86
1,5	0,35	1,89	-0,20	-1,21	3,8	0,58	1,80	-0,29	-0,84
1,6	0,37	1,89	-0,21	-1,18	4,0	0,59	1,78	-0,29	-0,82
1,7	0,38	1,89	-0,22	-1,16	4,5	0,62	1,75	-0,30	-0,78
1,8	0,39	1,89	-0,22	-1,14	5,0	0,64	1,71	-0,30	-0,74

*Графоаналитический метод  
на основе трехпараметрической  
логарифмической кривой распределения*

- Методика отличается тем, что здесь нужно дополнительно вычислить сдвиг  $a$ , который вычисляется по формуле

$$a = (x_5 x_{95} - x_{50}^2) / (x_5 + x_{95} - 2x_{50})$$

- Дальнейший расчет ведется по той же схеме.

# *Последовательность расчетов графоаналитическим методом на основе трехпараметрической логарифмической кривой распределения*

**Дано:** Ряд наблюдений за СВ

**Требуется:** Оценить параметры распределения –  $x_{cp}, \sigma_x^*, C_v^*, C_s^*$

## *Последовательность расчетов*

1. Ряд наблюдений ранжируется в убывающем порядке
2. По формуле  $p_m = (m/(n + 1))100\%$ , где  $m$  - порядковый номер, а  $n$  – число наблюдений, рассчитываются ординаты эмпирической кривой обеспеченности
3. На клетчатку вероятности наносятся точки эмпирической кривой распределения. При этом по оси ординат *откладываются значения самой СВ, а не модульные коэффициенты*. По точкам проводится сглаженная кривая
4. По сглаженной кривой определяются три опорные ординаты для обеспеченностей – 5, 50 и 95%, то есть  $x_5, x_{50}, x_{95}$

## *Последовательность расчетов графоаналитическим методом на основе трехпараметрической логарифмической кривой распределения*

5. Для оценки коэффициента асимметрии рассчитывается коэффициент скошенности  $S$

$$S = (x_5 + x_{95} - 2x_{50}) / (x_5 - x_{95})$$

6. Зная  $S$  и  $p$  по таблице нормированных ординат для трехпараметрической логарифмической кривой распределения находим значение коэффициента асимметрии  $C_s^*$ , а также  $t_5, t_{50}, t_{95}$

7. Вычисляем оценку второго параметра –  $CKO$  по формуле

$$\sigma_x^* = (x_5 - x_{95}) / (t_5 - t_{95})$$

## *Последовательность расчетов графоаналитическим методом на основе трехпараметрической логарифмической кривой распределения*

8. Оценка *МО* находится из третьего из уравнения  $x_{cp.} = x_{50} - t_{50} \sigma_x^*$

9. Коэффициент вариации рассчитывается по формуле  $C_v^* = \sigma_x^* / x_{cp.}$

10. Если на основе этих оценок нужно рассчитать ординаты аналитической кривой обеспеченности, то дополнительно вычисляется сдвиг *a* по формуле

$$a = (x_5 x_{95} - x_{50}^2) / (x_5 + x_{95} - 2x_{50})$$

Далее по схеме, как было изложено по методу кривой Пирсона III типа.

## *Графоаналитический метод на основе кривой Крицкого-Менкеля*

□ У этого вида зависимости нет однозначной связи между коэффициентом асимметрии  $C_s$  и коэффициентом скошенности  $S$

□ Поэтому, наряду с обычным коэффициентом скошенности  $S$ , рассчитывается также коэффициент  $S_2$ .

$$S_2 = 2x_{50}/(x_5 - x_{95}) = 2k_{50}/(k_5 - k_{95})$$

□ При фиксированном значении  $C_s/C_v$  коэффициент  $S_2$  однозначно зависит от  $S$ . Зависимость эта представляется в виде номограммы

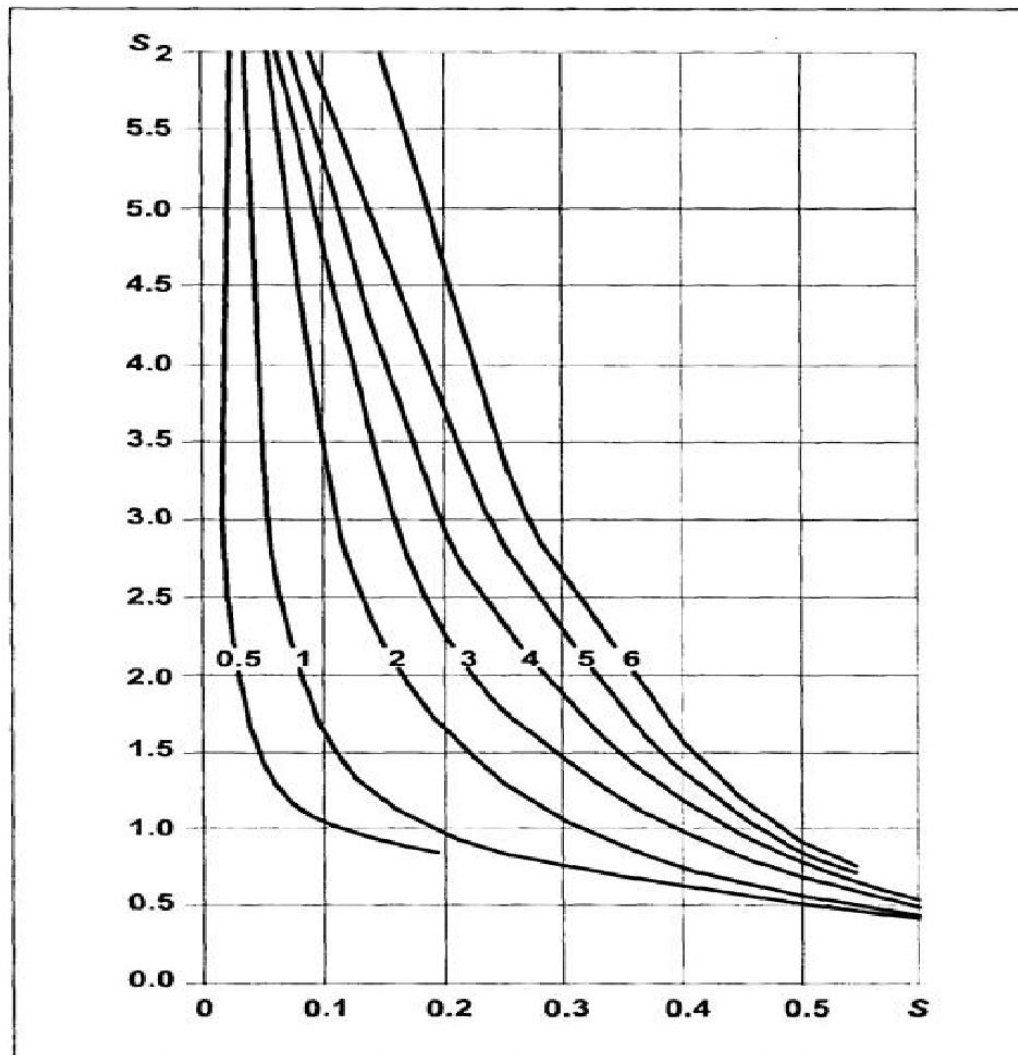
□ Таким образом, рассчитав  $S$  и  $S_2$ , можно по номограмме оценить соотношение  $C_s/C_v$ . При этом нужно значение  $C_s/C_v$  округлять до 0,5

□ Если значение коэффициента скошенности  $S > 0,6$ , то  $C_v > 1$ . В этой ситуации оценка  $C_s/C_v$  является крайне ненадежной и следует отказаться от расчета графоаналитическим методом (можно принять районное соотношение  $C_s/C_v$ )

## *Графоаналитический метод на основе кривой Крицкого-Менкеля*

- При фиксированном  $Cs/Cv$  имеет место однозначная зависимость между коэффициентом вариации  $Cv$  и коэффициентом скошенности  $S$ . Эта зависимость представляется в виде таблицы. При известных значениях  $Cs/Cv$  и  $S$  по таблице можно определить коэффициент вариации  $Cv$
- Для расчета среднего значения необходимо по таблице ординат кривой обеспеченности Крицкого – Менкеля определить модульный коэффициент 50% обеспеченности  $k_{50}$ . Тогда  $x_{cp.} = x_{50}/k_{50}$

**Номограмма для определения соотношения  $C_s/C_v$  в зависимости от коэффициента скошенности  $S$  и параметра  $S_2$  для кривой Крицкого – Менкеля.**





**Значения коэффициента скошенности  $S$   
в зависимости от  $C_v$  и соотношения  $C_s/C_v$   
для кривой обеспеченности Крицкого - Менкеля**

$C_v$	Соотношение $C_s/C_v$						
	0,5	1	2	3	4	5	6
0,1	0,027	0,036	0,055	0,061	0,068	0,091	0,152
0,2	0,030	0,056	0,113	0,163	0,198	0,238	0,270
0,3	0,041	0,084	0,169	0,229	0,286	0,326	0,356
0,4	0,050	0,113	0,226	0,298	0,348	0,378	0,402
0,5	0,074	0,156	0,279	0,357	0,403	0,427	0,443
0,6	0,114	0,206	0,335	0,409	0,450	0,464	0,481
0,7	0,197	0,270	0,390	0,461	0,488	0,489	0,508
0,8		0,358	0,445	0,504	0,527	0,538	0,539
0,9		0,456	0,506	0,546	0,561	0,563	0,571
1,0		0,562	0,565	0,586	0,595		
1,1		0,663	0,618	0,623	0,625		
1,2		0,754	0,667	0,658	0,652		
1,3		0,823	0,715	0,689	0,679		
1,4		0,871	0,760	0,719	0,704		
1,5		0,904	0,796	0,746	0,726		
1,6		0,930	0,823	0,772	0,748		
1,7		0,952	0,856	0,795	0,768		
1,8		0,969	0,882	0,817	0,786		
1,9		0,983	0,902	0,837	0,803		
2,0		0,996	0,920	0,855	0,819		

# **Последовательность расчетов графоаналитическим методом на основе кривой Крицкого-Менкеля**

**Дано:** Ряд наблюдений

**Требуется:** Оценить параметры распределения по кривой обеспеченности Крицкого – Менкеля.

- 1.** Ряд наблюдений ранжируется в убывающем порядке
- 2.** По формуле  $p_m = (m/(n + 1))100\%$ , где  $m$  - порядковый номер, а  $n$  – число наблюдений, рассчитываются ординаты эмпирической кривой обеспеченности
- 3.** На клетчатку вероятности наносятся точки эмпирической кривой распределения. При этом по оси ординат **откладываются значения самой СВ, а не модульные коэффициенты.** По точкам проводится сглаженная кривая.
- 4.** По сглаженной кривой определяются три опорные ординаты для обеспеченностей – 5, 50 и 95%, то есть  **$x_5, x_{50}, x_{95}$**

## *Последовательность расчетов графоаналитическим методом на основе кривой Крицкого-Менкеля*

5. Рассчитывается коэффициент скошенности  $S$  по формуле

$$S = (x_5 + x_{95} - 2x_{50}) / (x_5 - x_{95})$$

6. Рассчитывается коэффициент  $S_2$  по формуле

$$S_2 = 2x_{50} / (x_5 - x_{95}) = 2k_{50} / (k_5 - k_{95})$$

7. Зная  $S$  и  $S_2$  по номограмме определяется соотношение  $C_s / C_v$

8. По таблице значения коэффициента скошенности  $S$  в зависимости от  $C_v$  и соотношения  $C_s / C_v$  для кривой обеспеченности Крицкого – Менкеля определяется коэффициент вариации

9. По таблицам кривой обеспеченности Крицкого – Менкеля (см. лекцию 3) определяем  $k_{50}$ .

10. По формуле  $x_{cp.} = x_{50} / k_{50}$  определяется среднее значение СВ -  $x_{cp.}$

*Расчет ординат аналитической кривой обеспеченности производится по схеме, изложенной в предыдущих лекциях.*

## Обратная последовательность расчетов

1. По полученным оценкам ( $x_{cp.}$ ,  $C_v$ ,  $C_s/C_v$ ) по таблице ординат кривой обеспеченностей Крицкого и Менкеля определяются модульные коэффициенты
2. Умножаем модульный коэффициент на  $x_{cp.}$  и получаем расчетное значение СВ для 5%, 50% и 95% обеспеченностей
3. Наносим полученные значения на клетчатку вероятностей и проводим аналитическую кривую распределения по Крицкому – Менкелю

*Хотя графоаналитические методы являются достаточно простыми и наглядными, их нужно применять с осторожностью, так как проведение сглаженной эмпирической кривой всегда носит субъективный характер и требует определенных навыков.*

**Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого – Менкеля  
(трехпараметрического гамма-распределения)  
в модульных коэффициентах,  $C_s/C_v = 2,0$**

<i>p</i> %	Коэффициент вариации, <i>C<sub>v</sub></i>									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,01	1,42	1,92	2,52	3,20	3,98	4,85	5,81	6,85	7,98	9,21
0,1	1,34	1,73	2,19	2,70	3,27	3,87	4,56	5,30	6,08	6,91
0,3	1,30	1,64	2,02	2,45	2,91	3,42	3,96	4,55	5,16	5,81
0,5	1,28	1,59	1,94	2,32	2,74	3,20	3,68	4,19	4,74	5,30
1,0	1,25	1,52	1,82	2,16	2,51	2,89	3,29	3,71	4,15	4,60
3	1,20	1,41	1,64	1,87	2,13	2,39	2,66	2,94	3,21	3,51
5	1,17	1,35	1,54	1,74	1,94	2,15	2,36	2,57	2,78	3,00
10	1,13	1,26	1,40	1,54	1,67	1,80	1,94	2,06	2,19	2,30
20	1,08	1,16	1,24	1,31	1,38	1,44	1,50	1,54	1,58	1,61
25	1,06	1,13	1,18	1,23	1,28	1,31	1,34	1,37	1,38	1,39
30	1,05	1,09	1,13	1,16	1,19	1,21	1,22	1,22	1,22	1,20
40	1,02	1,04	1,05	1,05	1,04	1,03	1,01	0,984	0,955	0,916
50	0,997	0,986	0,970	0,948	0,918	0,886	0,846	0,800	0,748	0,693
60	0,972	0,938	0,898	0,852	0,803	0,748	0,692	0,632	0,568	0,511
70	0,945	0,886	0,823	0,760	0,691	0,622	0,552	0,488	0,424	0,357
75	0,931	0,858	0,784	0,708	0,634	0,556	0,489	0,416	0,352	0,288
80	0,915	0,830	0,745	0,656	0,574	0,496	0,419	0,352	0,280	0,223
90	0,873	0,754	0,640	0,532	0,436	0,352	0,272	0,208	0,154	0,105
95	0,842	0,696	0,565	0,448	0,342	0,256	0,181	0,120	0,082	0,051
97	0,821	0,660	0,517	0,392	0,288	0,202	0,139	0,088	0,046	0,030
99	0,782	0,594	0,436	0,304	0,206	0,130	0,076	0,040	0,019	0,010
99,5	0,761	0,560	0,394	0,269	0,166	0,099	0,054	0,027	0,012	0,005
99,7	0,748	0,537	0,374	0,240	0,144	0,082	0,042	0,019	0,008	0,003
99,9	0,719	0,492	0,319	0,192	0,107	0,052	0,027	0,008	0,004	0,001

***СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!***