!Здравствуйте

Лекция №19

Свойства преобразования Лапласа

Прежде всего рассмотрим два примера нахождения преобразования Лапласа.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^n$. Тогда

$$\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx = \int_0^\infty x^n e^{-px}dx = \frac{1}{p^{n+1}}\int_0^\infty y^n e^{-y}dy = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

где сделана замена переменных $y = px$.

Пример 2. Пусть $f(x) = e^{-ax}$. Тогда

$$\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx = \int_0^\infty e^{-ax}e^{-px}dx = \int_0^\infty e^{-(p+a)x}dx = \frac{1}{p+a}.$$

А теперь перейдем к изучению свойств преобразования Лапласа, обеспечивших ему популярность. В дальнейшем $F(p)$ и $G(p)$ будут преобразованиями Лапласа от функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

1. **Линейность.**

$$\alpha f(x)+\beta g(x)\leftrightarrow \alpha F(p)+\beta G(p).$$

Действительно

$$\int_0^\infty (\alpha f(x)+\beta g(x))e^{-px}dx=\alpha\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx+\beta\int_0^\infty g(x)e^{-px}dx=\alpha F(p)+\beta G(p)$$

Пример 3.

$$\sin\omega x=\frac{1}{2i}\left(e^{+i\omega x}-e^{-i\omega x}\right)\leftrightarrow\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$\cos\omega x=\frac{1}{2}\left(e^{+i\omega x}+e^{-i\omega x}\right)\leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

2. **Теорема подобия.**

$$f(\alpha x) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Имеем

$$f(\alpha x) \leftrightarrow \int_0^\infty f(\alpha x) e^{-px} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(y) e^{-\frac{p}{\alpha} y} dy = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right),$$

где в интеграле сделана замена переменных $\alpha x = y$.

3. **Дифференцирование оригинала.**

$$f^{(n)}(x) \leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Доказательство.

$$f'(x) \leftrightarrow \int_0^\infty f'(x) e^{-px} dx = \int_0^\infty e^{-px} df(x) =$$

$$= f(x) e^{-px} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx = pF(p) - f(0);$$

Аналогично

$$f''(x) \leftrightarrow \int_0^\infty f''(x) e^{-px} dx = \int_0^\infty e^{-px} df'(x) =$$

$$= f'(x) e^{-px} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f'(x) e^{-px} dx = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

где учтено выражение для изображения $f'(x)$. Общую формулу можно вывести по индукции.

4. **Дифференцирование изображения.**

$$F^{(n)}(p) \leftrightarrow (-1)^n x^n f(x).$$

Действительно, дифференцируя по *p* выражение

$$F(p) = \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx$$

получим:

$$F'(p) = -\int_0^\infty x f(x) e^{-px} dx \leftrightarrow (-1) x f(x),$$

$$F''(p) = \int_0^\infty x^2 f(x) e^{-px} dx \leftrightarrow (-1)^2 x^2 f(x)$$

и так далее.

5. **Интегрирование оригинала.**

$$\int_0^x f(t)dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Действительно, пусть

$$\int_0^x f(t)dt \leftrightarrow G(p).$$

Используя свойство 3, получим

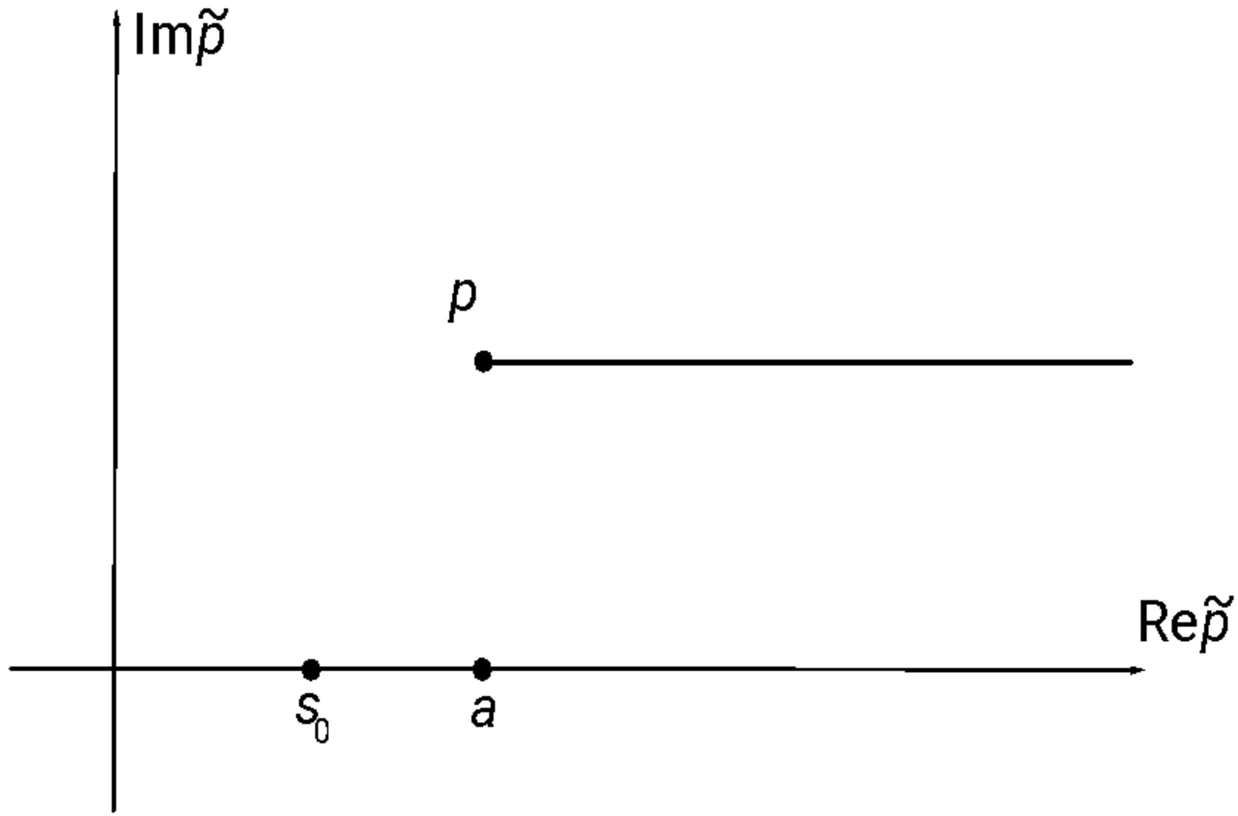
$$f(x) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)' \leftrightarrow pG(p) - 0 = F(p),$$

откуда и следует, что $G(p) = F(p)/p$.

6. **Интегрирование изображения.**

$$\frac{f(x)}{x} \leftrightarrow \int_{p}^{\infty} F(\tilde{p})\,d\tilde{p},$$

где интегрирование идет по пути, изображенному на рис., где $\operatorname{Re} p = a > s_0$.



Имеем

$$\int_p^\infty F(\widetilde{p})d\widetilde{p} = \int_p^\infty d\widetilde{p}\int_0^\infty f(x)e^{-\widetilde{p}x}dx = \int_0^\infty f(x)dx\int_p^\infty e^{-\widetilde{p}x}d\widetilde{p} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}e^{-px}dx \leftrightarrow \frac{f(x)}{x}.$$

7. **Теорема запаздывания.**

$$f(x-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau} F(p).$$

Заметим, что, так как $f(x)=0$ при $x<0$, то $f(x-\tau)=0$ при $x<\tau$. А теперь имеем

$$f(x-\tau) \leftrightarrow \int_0^\infty f(x-\tau) e^{-px} dx = \int_\tau^\infty f(x-\tau) e^{-px} dx =$$

$$= \int_0^\infty f(y) e^{-py-p\tau} dy = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(y) e^{-py} dy = e^{-p\tau} F(p),$$

где сделана замена переменных $x - \tau = y$.

8. **Теорема смещения.**

$$e^{p_0 x} f(x) \leftrightarrow F(p - p_0).$$

Имеем

$$e^{p_0 x} f(x) \leftrightarrow \int_0^\infty e^{p_0 x} f(x) e^{-px} dx = \int_0^\infty f(x) e^{-(p-p_0)x} dx = F(p - p_0).$$

Пример 4.

$$e^{-\lambda x} \sin \omega x \leftrightarrow \frac{\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2},$$

$$e^{-\lambda x} \cos \omega x \leftrightarrow \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}.$$

9. **Теорема умножения**.

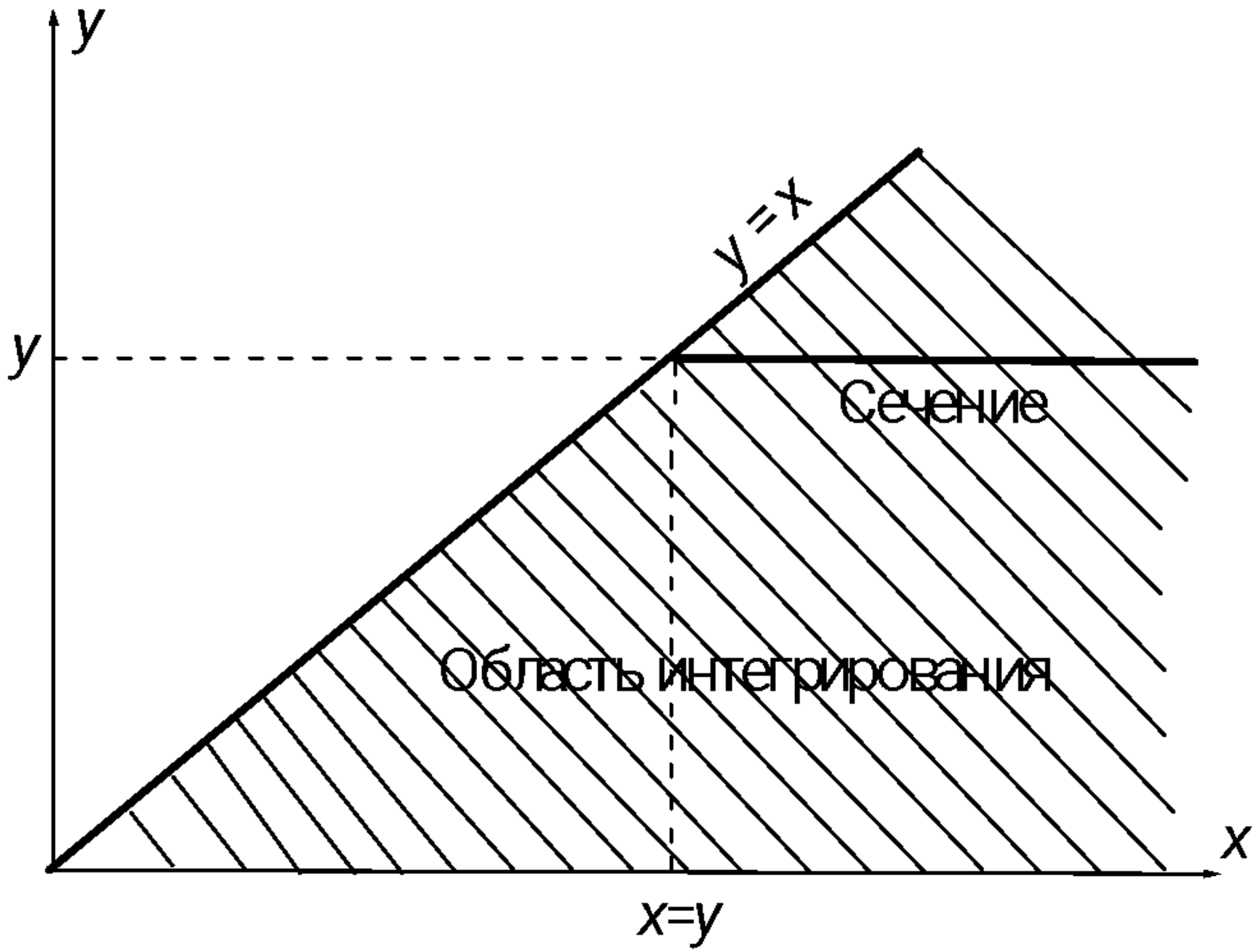
$$F(p)G(p) \leftrightarrow \int_0^x f(y)g(x-y)dy.$$

Заметим, что написанный выше интеграл называется **сверткой** функций $f(x)$ и $g(x)$ и часто обозначается $f(x) * g(x)$. Эта операция очень часто встречается в теории вероятностей, где показывается, что плотность вероятностей суммы двух независимых случайных величин есть свертка плотностей вероятностей слагаемых.

Доказательство.

Имеем

$$\int_0^x f(y)g(x-y)dy \leftrightarrow \int_0^\infty e^{-px}dx \int_0^x f(y)g(x-y)dy$$


y
y = x
y
Сечение
Область интегрирования
x
x=y

Переставим местами интегралы в двойном интеграле используя методику, изложению в части 2. Во внутреннем интеграле стоят пределы интегрирования от 0 до x. Поэтому область интегрирования ограничена прямыми $y = 0$ и $y = x$ (см. рис.). Проектируя эту область на ось OY получаем, что y меняется в пределах от 0 до ∞. Беря какое-то значение y и проводя прямую, параллельную оси OX, получим, что при фиксированном y переменная x меняется в пределах от y до ∞. Поэтому

$$\int_0^\infty e^{-px}dx\int_0^x f(y)g(x-y)dy = \int_0^\infty f(y)dy\int_y^\infty g(x-y)e^{-px}dx =$$

$$= \int_0^\infty f(y)e^{-py}dy\int_0^\infty g(z)e^{-pz}dz = F(p)G(p),$$

где во внутреннем интеграле сделана замена переменных $x - y = z$, так что $x = y + z$.

10. **Предельные соотношения.**

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0); \quad \lim_{p\to 0} pF(p) = f(+\infty).$$

А) Так как $f'(x) \leftrightarrow pF(p) - f(0)$, то

$$\int_0^\infty f'(x)e^{-px}dx = pF(p) - f(0). \tag{7}$$

Пусть существуют числа M и s_1 такие, что для любых x $|f'(x)| < Me^{s_1 x}$. Тогда, если взять p у которого Re $p = s$, то

$$\left|\int_0^\infty f'(x)e^{-px}dx\right| \le M\int_0^\infty e^{-(s-s_1)x}dx = \frac{M}{s-s_1}\xrightarrow[s\to+\infty]{} 0.$$

Поэтому, переходя в (7) к пределу $p\to\infty$, получим

$$0 = \lim_{p\to\infty} pF(p) - f(0),$$

откуда и следует, что $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = f(0)$.

Б) Аналогично, переходя в (7) к пределу $p\to 0$, получим

$$\int_0^\infty f'(x)dx = f(+\infty) - f(0) = \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0).$$

Сокращая $f(0)$ получим, что $\lim_{p\to 0} pF(p) = f(+\infty)$.