Теория Автоматического Управления
Часть 4

Полулях Антон Иванович, к.т.н., доцент кафедры АД, зам. начальника отдела проектирования систем автоматического управления

6. Анализ систем управления

- ***6.1. Требования к управлению***
- Что мы хотим от управления? Это зависит, прежде всего, от решаемой задачи.
- В задаче *стабилизации* наиболее важны свойства *установившегося* режима.
- Для *следящих* систем в первую очередь нужно обеспечить высокое качество переходных процессов при изменении задающего сигнала (*уставки*).
- В целом можно выделить четыре основных требования:
- • **точность** – в установившемся режиме система должна поддерживать заданное значение выхода системы, причем ошибка (разница между заданным и фактическим значением) не должна превышать допустимую;

6. Анализ систем управления

- • **устойчивость** – система должна оставаться устойчивой на всех режимах, не должна идти «вразнос» (корабль не должен идти по кругу при смене курса);
- • **качество переходных процессов** – при смене заданного значения система должна переходить в нужное состояние по возможности быстро и плавно;
- • **робастность** – система должна сохранять устойчивость и приемлемое качество даже в том случае, если динамика объекта и свойства внешних возмущений немного отличаются от тех, что использовались при проектировании.

6. Анализ систем управления

- ***6.2. Процесс на выходе***
- Начнем с простого – покажем, как вычислить процесс на выходе системы с передаточной функцией $W(s)$ при входном сигнале, для которого известно изображение по Лапласу $X(s)$.
- При нулевых начальных условиях изображение выхода равно $Y(s) = W(s)\,X(s)$. Предположим, что $W(s)$ и $X(s)$ – рациональные функции, то есть их можно представить в виде отношения полиномов

$$W(s) = \frac{n_W(s)}{\Delta(s)}, \qquad X(s) = \frac{n_X(s)}{d_X(s)}.$$

- Для простоты будем считать, что полиномы $\Delta(s)$ и $d\,(s)\,X$ имеют только простые вещественные корни, так что

$$\Delta(s) = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\ldots(s-\alpha_N), \qquad d_X(s) = (s-\beta_1)(s-\beta_2)\ldots(s-\beta_M),$$

- общих корней у них нет

6. Анализ систем управления

- Числа $\alpha_i \ (i = 1,\ldots N)$ и $\beta_j \ (j = 1,\ldots M)$
- называются *полюсами* функций $W(s)$ и $X(s)$ соответственно.
- При этих условиях произведение $Y(s) = W(s)\, X(s)$ можно разложить на простые дроби
$$Y(s) = \frac{a_1}{s-\alpha_1} + \frac{a_2}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{a_N}{s-\alpha_N} + \frac{b_1}{s-\beta_1} + \frac{b_2}{s-\beta_2} + \ldots + \frac{b_M}{s-\beta_M}.$$
- Здесь $a_i \ (i = 1,\ldots N)$ и $b_j \ (j = 1,\ldots M)$ – постоянные, которые в данном случае определяются по формулам:
$$a_i = W(s)X(s)(s-\alpha_i)\Big|_{s=\alpha_i}, \quad b_j = W(s)X(s)(s-\beta_j)\Big|_{s=\beta_j}$$
- Далее мы предположим, что произведение $W(s)\, X(s)$ несократимо. В этом случае все числа a_i и b_j не равны нулю.
- Чтобы найти выход $y(t)$, нужно вычислить обратное преобразование Лапласа для $Y(s)$.

6. Анализ систем управления

- По таблицам находим

$$y(t) = a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + a_N e^{\alpha_N t} + b_1 e^{\beta_1 t} + b_2 e^{\beta_2 t} + \ldots + b_M e^{\beta_M t}. \qquad (44)$$

- Вспомним, что функция $e^{\lambda t}$ при $t \to \infty$ стремится к нулю, если $\lambda < 0$; остается постоянной (равной 1) при $\lambda = 0$ и уходит в бесконечность при $\lambda > 0$. Поэтому выражение (44) позволяет сделать следующие выводы:
- • сигнал на выходе системы зависит как от свойств передаточной функции системы, так и от входного сигнала;
- • для того, чтобы переходный процесс затухал (функция *y*(*t*) стремилась к нулю), все числа $\alpha_i \ (i = 1, \ldots N)$ и $\beta_i \ (i = 1, \ldots M)$ должны быть отрицательными (иметь отрицательные вещественные части);

6. Анализ систем управления

- • если один из полюсов $W(s)$ или $X(s)$ равен нулю, $y(t)$ может иметь постоянную (незатухающую) составляющую;
- • если хотя бы один из полюсов $W(s)$ или $X(s)$ больше нуля (имеет положительную вещественную часть), выход системы неограниченно растет.
- Еще раз отметим, что мы предполагали несократимость произведения $W(s)\,X(s)$, иначе некоторые коэффициенты a_i и/или b_j могут оказаться нулевыми и соответствующие экспоненты «исчезают» из формулы (44).
- Тогда, например, может оказаться, что выход не «уходит в бесконечность» даже если $W(s)$ или $X(s)$ имеет полюс с положительной вещественной частью (и он сократился в произведении $W(s)\,X(s)$).

6. Анализ систем управления

- Как следует из (44), часть показателей экспонент (числа α_i (i =1,...N)) полностью определяются свойствами системы – это корни полинома $\Delta(s)$.
- Если среди них есть числа с положительной вещественной частью, сигнал выхода будет неограниченно возрастать при *любом входе*, для которого произведение $W(s)\,X(s)$ несократимо.
- В этом случае говорят, что *система неустойчива*, а соответствующие полюса также называют неустойчивыми.
- Полином $\Delta(s)$ называется **характеристическим полиномом**, так как расположение его корней определяет устойчивость (или неустойчивость) системы.

6. Анализ систем управления

- ***6.3. Точность***
- Точность системы обычно оценивается для одного из эталонных входных сигналов. Это может быть, например, единичный скачок

$$x(t) = \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \ge 0 \end{cases}, \qquad X(s) = \frac{1}{s}$$

или линейно возрастающий сигнал

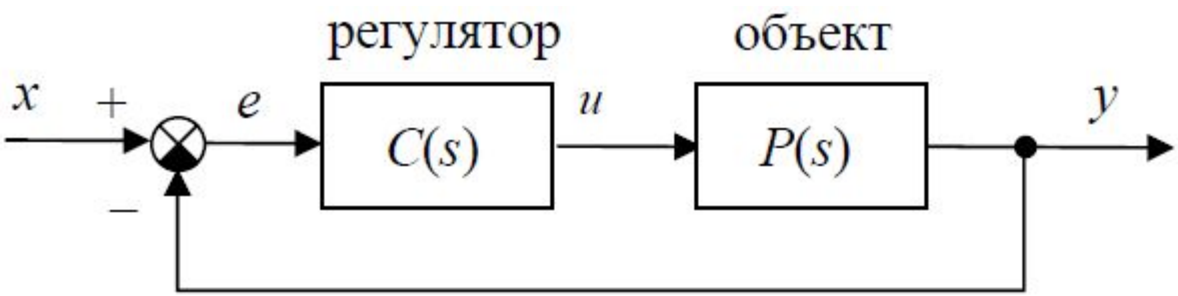
$$x(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ t, t \ge 0 \end{cases}, \qquad X(s) = \frac{1}{s^2}$$

или гармонический сигнал с частотой ω:

$$x(t) = \sin \omega t\,, \qquad X(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\,.$$

6. Анализ систем управления

- Точность системы в установившемся режиме определяется ошибкой $e(t)$ или ее изображением $E(s)$.
- Для ее исследования используют *передаточную функцию по ошибке* $W_e(s)$, которая связывает изображения ошибки и входного сигнала: $E(s) = W_e(s)\,X(s)$.
- Рассмотрим контур управления, состоящий из регулятора и объекта



- Представим передаточные функции $C(s)$ и $P(s)$, а также изображение входа $X(s)$ в виде отношения полиномов:

$$C(s) = \frac{n_C(s)}{d_C(s)}, \quad P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, \quad X(s) = \frac{n_X(s)}{d_X(s)}$$

6. Анализ систем управления

- В данном случае передаточная функция по ошибке равна

$$W_e(s) = \frac{1}{1 + C(s)\,P(s)} = \frac{d_C(s)\,d(s)}{\Delta(s)},$$

- где ($\Delta(s) = d_C(s)\,d(s) + n_C(s)\,n(s)$ -*характеристический полином* замкнутой системы.
- Рассмотрим реакцию системы на единичный ступенчатый входной сигнал, изображение которого равно $X(s) = 1/s$. Как следует из разд. 6.2, сигнал ошибки определяется полюсами передаточной функции $W_e(s)$ (то есть корнями характеристического полинома $\Delta(s)$) и полюсами изображения $X(s)$.
- На практике все полюса $W_e(s)$ должны иметь отрицательные вещественные части, иначе система будет неустойчивой (подробнее см. в разд. 6.4). Поэтому нулевых полюсов у функции $W(s)$ *е* быть не может.

6. Анализ систем управления

- Тогда

$$W_e(s)X(s) = \frac{1}{1+C(s)\,P(s)}\cdot\frac{1}{s} = Y_0(s) + \frac{b}{s}.$$

- Здесь изображение $Y_0\,(s)$ имеет полюса только с отрицательной вещественной частью, а постоянная b рассчитывается по формуле разложения на простые дроби:

$$b = \frac{1}{1+C(0)\,P(0)} = \frac{d_C(0)\,d(0)}{\Delta(0)}$$

- Как следует из разд. 6.2, после затухания всех экспонент с отрицательными показателями получим $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = b$
- Заметим, что для того, чтобы сделать нулевой статическую ошибку, достаточно обеспечить $d_C(0) = 0$ (то есть регулятор должен содержать интегратор) или $d(0) = 0$ (объект содержит интегратор).

6. Анализ систем управления

- Этот результат можно обобщить для любых незатухающих входных сигналов, изображения которых имеют полюса на мнимой оси (в точке $s = 0$ или в точках $s = \pm j\omega$).
- Для того, чтобы ошибка стремилась к нулю при $t \to \infty$ необходимо, чтобы эти полюса сократились в произведении

$$W_e(s)X(s) = \frac{d_C(s)d(s)}{\Delta(s)} \cdot \frac{n_X(s)}{d_X(s)}$$

- А это, в свою очередь, возможно только тогда, когда они являются корнями полинома $d_C(s)\, d(s)$, то есть, *внутри* системы есть модель входного сигнала. Этот принцип называется **принципом внутренней модели**.

6. Анализ систем управления

- Например, для точного отслеживания ступенчатого сигнала нужно, чтобы объект или регулятор содержали интегрирующее звено (с передаточной функцией $1/s$).
- Тогда произведение $d_C(s)\,d(s)$ имеет сомножитель s, и полюс $X(s)$ в точке $s = 0$ сократится в произведении $W_e(s)\,X(s)$.
- Таким образом, если передаточная функция разомкнутого контура $C(s)P(s)$ содержит множитель s в знаменателе, обеспечивается нулевая ошибка слежения за постоянным сигналом (нулевая статическая ошибка). Поэтому такую систему называют **астатической**.
- Для отслеживания *линейно возрастающего сигнала* в контуре должно быть уже два интегратора (нужно сократить двойной полюс $X(s)$ в точке $s = 0$). Такая система обладает *астатизмом второго порядка*.

6. Анализ систем управления

- В общем случае система, в которой

$$C(s)P(s) = \frac{1}{s^{\nu}} G(s),$$

- где ν > 0 – натуральное число и функция *G*(*s*) не имеет нулей и полюсов в точке *s* = 0, называется *астатической системой* ν *-ого порядка*.
- Такая система в установившемся режиме без ошибки отслеживает сигнал вида

$$x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \ldots + x_{\nu-1} t^{\nu-1}$$

при любых значениях коэффициентов $x_i (i = 0, \ldots \nu - 1)$.

6. Анализ систем управления

- Казалось бы, для повышения точности можно поставить много интеграторов, и все проблемы будут решены.
- Но при этом нужно учесть, что мы говорили только о точности *в установившемся режиме*, не затрагивая переходные процессы (переход с режима на режим) и вопросы устойчивости.
- Добавление каждого нового интегратора ухудшает переходные процессы, осложняет стабилизацию системы, снижает быстродействие.
- Например, двойным интегратором в принципе невозможно управлять с помощью простого регулятора-усилителя (так называемого *пропорционального* регулятора или П-регулятора).

6. Анализ систем управления

- Кроме того, если разомкнутая система включает два интегратора и более, для сигнала ошибки *e*(*t*) справедливо ограничение

$$\int_0^\infty e(t)\,dt = 0\,.$$

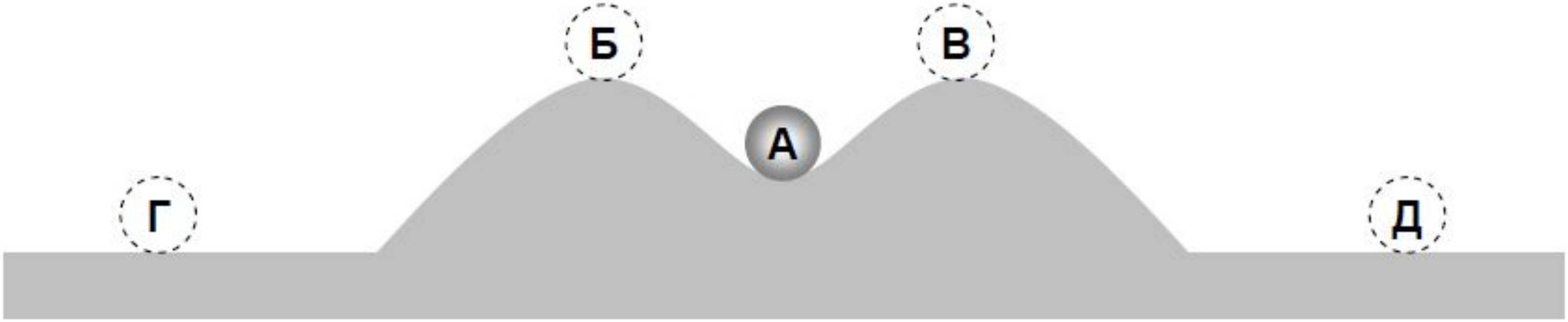
- На вопрос «ну и что?» можно ответить так: поскольку интеграл от ошибки равен нулю, часть времени ошибка должна быть положительной, а часть – отрицательной.
- Поэтому при *любом* управлении не удастся получить монотонный переходный процесс (когда сигнал выхода подходит к заданному значению «с одной стороны», как у апериодического звена).
- Для стохастической системы, в которой все процессы имеют случайный характер, точность оценивается с помощью математического ожидания и дисперсии ошибки.

6. Анализ систем управления

- ***6.4. Устойчивость***
- *6.4.1. Что такое устойчивость?*
- «Бытовое» понятие устойчивости известно нам с детства. Например, табуретка с двумя ножками неустойчива, она упадет при малейшем дуновении ветра, а с тремя – устойчива.
- Всем знакомый пример неустойчивой системы – близко расположенные микрофон и колонки, которые начинают «свистеть».
- Неустойчивость может привести к трагическим последствиям. Достаточно вспомнить аварии самолетов, попавших в грозовой фронт или в штопор, взрыв ядерного реактора на Чернобыльской атомной станции в 1986 г.

6. Анализ систем управления

- Термин «устойчивость» используется в численных методах, механике, экономике, социологии, психологии. Во всех этих науках имеют в виду, что устойчивая система возвращается в состояние равновесия, если какая-то сила выведет ее из этого состояния.
- Шарик на рисунке находится в *устойчивом* равновесии в положении А – если немного сдвинуть его с места, он скатится обратно в ямку.



6. Анализ систем управления

- Однако мы можем заметить, что если шарик *сильно* отклонить от равновесия, он может свалиться через горку вбок, то есть устойчивость нарушится.
- В положениях Б и В шарик также находится в положении равновесия, но оно *неустойчиво*, так как при малейшем сдвиге в сторону шарик скатывается с вершины.
- В положениях Г и Д равновесие шарика *нейтральное* – при небольшом смещении он остается в новом положении. При этом говорят, что система *нейтрально устойчива*, то есть находится на границе устойчивости.

6. Анализ систем управления

- Можно показать, что система «шарик-горка» – **нелинейная**. Как мы увидели, для нее
- • устойчивость – не свойство системы, а свойство некоторого положения равновесия;
- • может быть несколько положений равновесия, из них некоторые – устойчивые, а некоторые – нет;
- • положение равновесия может быть устойчиво при малых отклонениях (система устойчива «в малом») и неустойчиво при больших («в большом»).
- *6.4.2. Устойчивость бывает разная*
- Известно несколько определений устойчивости, которые отличаются некоторыми деталями. Если рассматривается только выход системы при различных ограниченных входах, говорят об устойчивости «выход-выход».

6. Анализ систем управления

- Кроме того, часто изучают устойчивость *автономной* системы, на которую не действуют внешние сигналы (все входы нулевые). Предполагается, что систему вывели из положения равновесия (задали *ненулевые начальные условия*) и «отпустили». Система, которая сама возвращается в исходное положение равновесия, называется устойчивой.
- Если при этом рассматривается только выход системы (а не ее внутренние сигналы), говорят о *«технической устойчивости»* (или *устойчивости по выходу*).
- Напротив, *внутренняя* или *математическая устойчивость* означает, что не только выход, но и все внутренние переменные (переменные состояния) приближаются к своим значениям в положении равновесия.

6. Анализ систем управления

- В некоторых задачах основной рабочий режим – это периодические колебания, поэтому можно рассматривать *устойчивость процессов*, а не только положения равновесия. Однако почти все такие системы – нелинейные, и эти вопросы выходят за рамки нашего курса.
- *6.4.3. Устойчивость «вход-выход»*
- Обычно для инженеров практиков в первую очередь важно, чтобы система не «пошла вразнос», то есть, чтобы управляемая величина не росла неограниченно при всех допустимых входных сигналах. Если это так, говорят, что система обладает *устойчивостью «вход-выход»* (при ограниченном входе выход также ограничен).
- Заметим, что при этом нас не интересует, как меняются внутренние переменные объекта, важен только вход и выход.

6. Анализ систем управления

- Рассмотрим ванну, которая наполняется водой из крана. Модель этой системы – интегрирующее звено. При постоянном (ограниченном по величине!) входном потоке уровень воды в ванне будет неограниченно увеличиваться (пока вода не польется через край), поэтому такая системе не обладает устойчивостью «вход-выход».
- *6.4.4. «Техническая» устойчивость*
- В отличие от устойчивости «вход-выход», понятие «техническая устойчивость» относится к автономной системе, у которой все входные сигналы равны нулю.
- *Положением равновесия* называют состояние системы, которая находится в покое, то есть, сигнал выхода $y(t)$ – постоянная величина, и все его производные равны нулю.

6. Анализ систем управления

- Систему выводят из положения равновесия и убирают все возмущения. Если при этом с течением времени (при $t \to \infty$) система возвращается в положение равновесия, она называется *устойчивой*.
- Если выходная координата остается ограниченной (не уходит в бесконечность), система называется *нейтрально устойчивой*, а если выход становится бесконечным – *неустойчивой*.
- Если вернуться к примеру с ванной, становится понятно, что эта система – нейтрально устойчива, потому что уровень воды остается постоянным, когда мы перекроем кран.
- С одной стороны, уровень воды не возвращается к предыдущему значению, а с другой – не растет бесконечно (система не является неустойчивой).

6. Анализ систем управления

- *6.4.5. Внутренняя устойчивость*
- Говоря о внутренней устойчивости, рассматривают не только выход, но и все переменные, описывающие состояние системы. В математической теории систем вектор состояния обозначают через $x(t)$, а уравнение движения системы записывают в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x,t) \qquad (45)$$

- Фактически это система дифференциальных уравнений первого порядка, в нем правая часть зависит только от значений t и $x(t)$, но не от производных.

6. Анализ систем управления

- Если вектор состояния $x(t)$ состоит из двух компонентов, $x_1(t)$ и $x_2(t)$, уравнение (45) можно записать в развернутой форме

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x,t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x,t) \end{cases}$$

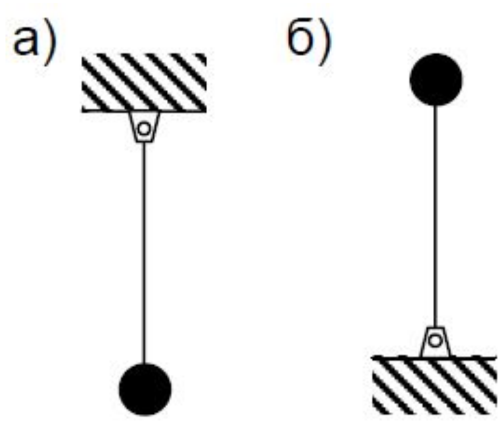
- где функции $f_1(x,t)$ и $f_2(x,t)$ зависят от вектора состояния и времени.
- Устойчивость определяется для некоторого положения равновесия. Для нелинейной системы может быть несколько положений равновесия, причем некоторые из них могут быть устойчивы, а некоторые – нет. В положении равновесия все производные равны нулю, то есть $f(x^*,t) = 0$, где x^* – соответствующий вектор состояния

6. Анализ систем управления

- Предположим, что систему вывели в некоторое начальное состояние $x_0 = x(0)$ (задали начальные условия), а потом внешнее воздействие прекратили.
- Дальнейшее изменение координат («движение» системы $x(t)$) можно найти как решение уравнения (45) при заданных начальных условиях.
- Нестрого говоря, *устойчивость* означает, что все движения $x(t)$, которые начинаются близко от положения равновесия x^* , при всех t остаются в некоторой окрестности x^* .
- Лучше, конечно, если система не просто устойчива, а еще и возвращается в положение равновесия, то есть, $x(t)$ стремится к x^* при $t \to \infty$. В этом случае говорят об *асимптотической устойчивости*.

6. Анализ систем управления

- Рассмотрим маятник на рисунке а) справа, состоящий из подвешенного металлического стержня и шарика. Здесь положение равновесия – шарик в нижней точке.
- Если не учитывать трение, маятник, выведенный из положения равновесия, будет качаться бесконечно долго, причем амплитуда колебаний не будет увеличиваться, то есть, система устойчива.
- В реальности трение, конечно, есть, поэтому колебания маятника будут постепенно затухать (амплитуда уменьшается), и система в конце концов возвращается в положение равновесия. Это значит, что маятник с трением – асимптотически устойчивая система.



- Маятник на рисунке б) тоже находится в положении равновесия, но оно неустойчиво: при малейшем отклонении маятник упадет вниз.

6. Анализ систем управления

- Формальное определение внутренней устойчивости было введено в работах А.М. Ляпунова, поэтому такое понятие устойчивости принято называть *устойчивостью по Ляпунову*.
- Для простоты рассмотрим систему первого порядка, с одной переменной состояния $x(t)$. Система называется устойчивой по Ляпунову в положении равновесия x^* , если при начальном отклонении от положения равновесия x^* не более, чем на δ , траектория движения отклоняется от x^* не более, чем на ε , причем для каждого ε можно найти соответствующее ему δ (ε) :

$$\left| x_0 - x^* \right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| x(t) - x^* \right| < \varepsilon \text{ при всех } t > 0 .$$

- Фактически это означает, что чем меньше начальное отклонение, тем меньше траектория движения отклоняется от положения равновесия.

6. Анализ систем управления

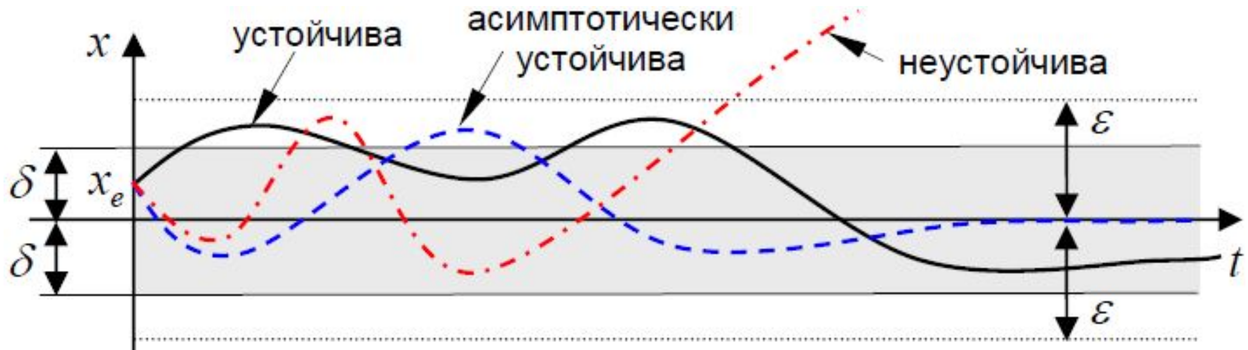
- Если кроме того вектор состояния стремится к положению равновесия, то есть,

$$\left| x(t) - x^* \right| \to 0 \text{ при } t \to \infty, \qquad (46)$$

- система называется *асимптотически устойчивой* в положении равновесия *x** . Заметим, что выполнение условия сходимости (46) не гарантирует устойчивость по Ляпунову.
- Существуют примеры достаточно сложных нелинейных систем, в которых даже при очень малых отклонениях от положения равновесия сначала наблюдается большой «выброс», а затем траектория сходится к точке равновесия.
- Очевидно, что асимптотическая устойчивость – более сильное требование. Положения равновесия, которые устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически устойчивы, иногда называются *нейтрально устойчивыми* (маятник без трения, ванна с водой).

6. Анализ систем управления

- Положение равновесия *неустойчиво*, если для него не выполняется условие устойчивости Ляпунова.
- Это значит, что существует такое ε > 0 , что траектория $x(t)$ выходит за границы области $|x(t) - x^*| < \varepsilon$ при сколь угодно малом отклонении начального состояния x_0 от положения равновесия x^* .
- Например, система переходит в *другое* положение равновесия, или $x(t)$ неограниченно возрастает.
- Движения устойчивой, асимптотически устойчивой и неустойчивой систем первого порядка (с одной координатой $x(t)$):



6. Анализ систем управления

- Если вектор состояния содержит несколько переменных, для оценки разности векторов $x_0 - x^*$ и $x(t) - x^*$ вместо модуля используют евклидову норму (корень из суммы квадратов отклонений по каждой координате).
- Например, для системы второго порядка

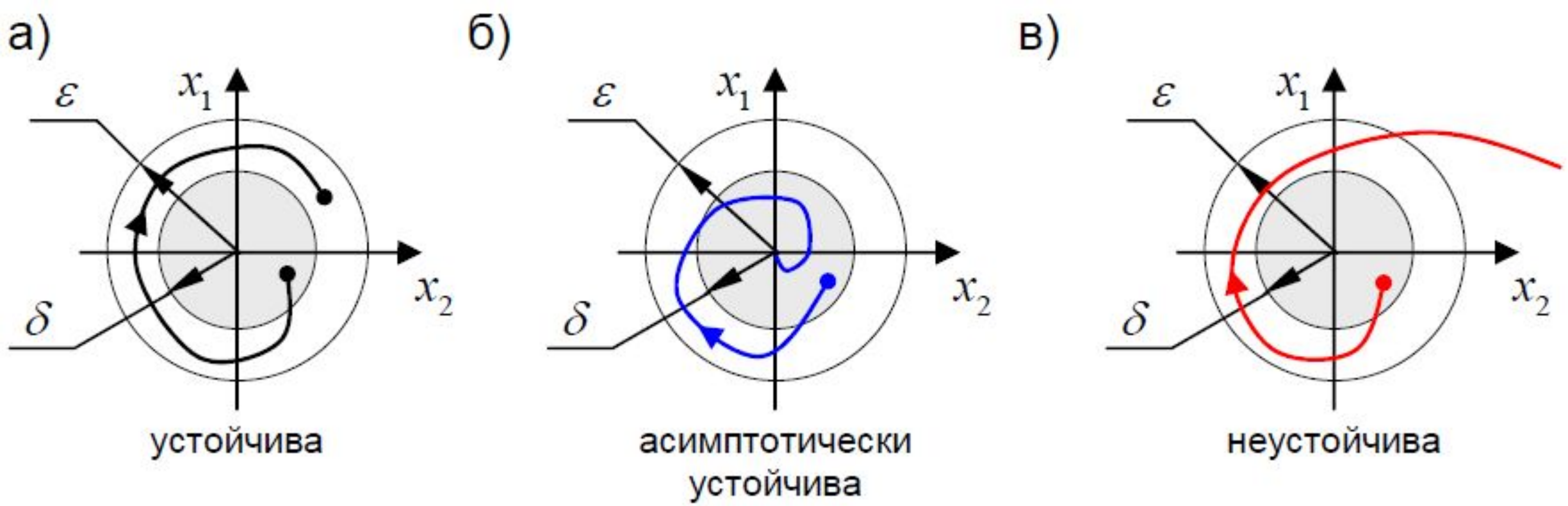
$$\|x(t) - x_e\| = \sqrt{(x_1(t) - x_1^*)^2 + (x_1(t) - x_2^*)^2} ,$$

где x_1^* и x_2^* – компоненты вектора x^*.

- Траекторию движения систем второго порядка обычно изображают на *фазовой плоско-сти*, где по одной оси откладывается $x_1(t)$, а по другой – $x_2(t)$.

6. Анализ систем управления

- На следующем рисунке показаны движения устойчивой, асимптотически устойчивой и неустойчивой систем.
- Для простоты предполагается, что положение равновесия – это начало координат, $x_1 = x_2 = 0$.



6. Анализ систем управления

- *6.4.6. Устойчивость линейных систем*
- Линейные системы обладают рядом особенностей, которые во многих случаях упрощают анализ устойчивости:
- • автономная линейная система (на которую не действуют внешние силы) может иметь единственное положение равновесия (в котором все сигналы равны нулю) или бесконечно много положений равновесия (шарик на плоской поверхности);
- • устойчивость – это свойство линейной системы, а не отдельного положения равновесия: или все ее движения устойчивы (асимптотически устойчивы), или все неустойчивы;
- • асимптотическая устойчивость линейной системы «в малом» сразу означает ее устойчивость «в целом», то есть, при любых отклонениях от положения равновесия;

6. Анализ систем управления

- • асимптотически устойчивая система также обладает устойчивостью «вход-выход», а просто устойчивая (нейтрально устойчивая, не асимптотически устойчивая) – нет.
- Для того, чтобы получить условия устойчивости, рассмотрим уравнение движения линейной системы, на которую не действуют возмущения. Пусть *W*(*s*) – ее передаточная функция.
- Будем считать, что она имеет только простые (не кратные) полюса $\alpha_i \; (i = 1, \dots, N)$ (корни знаменателя):

$$W(s) = \frac{n_W(s)}{\Delta(s)} = \frac{n_W(s)}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\dots(s-\alpha_N)},$$ где $n_w(s)$ и $\Delta(s)$ – полиномы.

6. Анализ систем управления

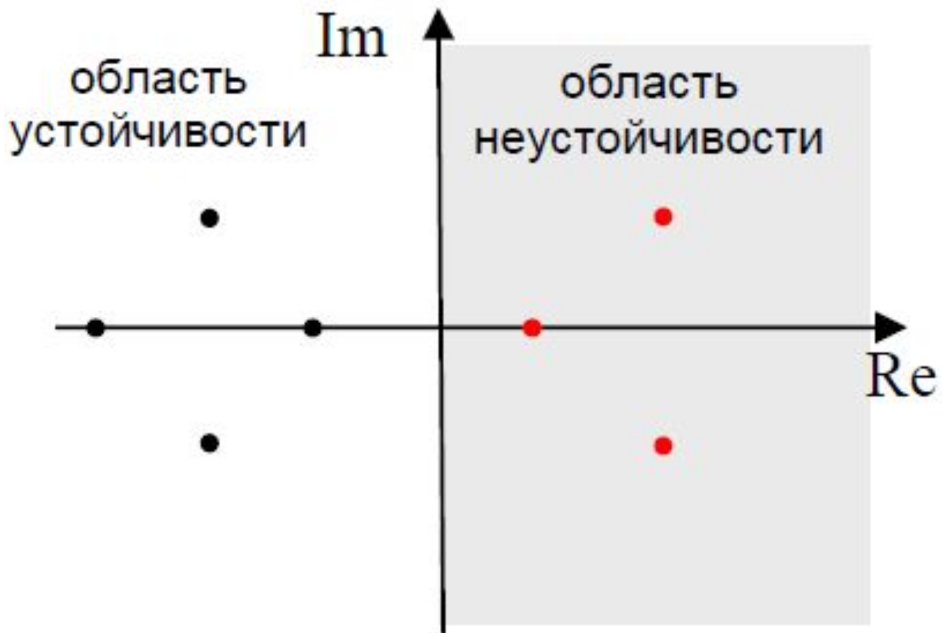
- Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что при отсутствии возмущений выход такой системы можно представить в виде:

$$y(t) = a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + a_N e^{\alpha_N t}, \qquad (47)$$

- где $\alpha_i \ (i = 1, \ldots, N)$ – постоянные, которые определяются начальными условиями. Таким образом, процесс *y*(*t*) затухает при любых начальных условиях тогда и только тогда, когда все корни $\alpha_i \ (i = 1, \ldots, N)$ имеют *отрицательные вещественные части*. В этом случае система *асимптотически устойчива*.
- Поскольку устойчивость линейной системы определяют корни полинома Δ(*s*) – знаменателя передаточной функции *W*(*s*) , этот полином называется ***характеристическим*** *полиномом* системы.

6. Анализ систем управления

- Если показать корни характеристического полинома (в общем случае – комплексные числа) на комплексной плоскости, то слева от мнимой оси будут *устойчивые корни* (с отрицательной вещественной частью), а справа неустойчивые. Таким образом, область устойчивости – это левая полуплоскость.



6. Анализ систем управления

- Предположим, что один из корней полинома Δ(*s*) равен нулю (скажем, $\alpha_1 = 0$), а остальные *устойчивы*, то есть, их вещественные части отрицательные. Это значит, что система содержит интегрирующее звено.

Учитывая, что $e^{\alpha_1 t} = e^0 = 1$ при всех t, получаем

$$y(t) = a_1 + a_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + a_N e^{\alpha_N t} .$$

- Здесь все слагаемые в правой части, кроме первого, затухают с течением времени, а постоянная составляющая a_1 остается.
- С другой стороны, выход не возрастает неограниченно, поэтому система *нейтрально устойчива*.

6. Анализ систем управления

- Теперь допустим, что характеристический полином имеет пару чисто мнимых корней: $\alpha_1 = j\omega$ и $\alpha_2 = -j\omega$. Это значит, что система содержит *консервативное звено* – генератор колебаний.
- При этом процесс (47) на выходе системы содержит слагаемые $a_1 e^{j\omega t}$ и $a_2 e^{-j\omega t}$, которые могут быть (с помощью формулы Эйлера) представлены в виде

$$a_1 e^{j\omega t} = a_1(\cos\omega t + j\sin\omega t)\,, \quad a_2 e^{-j\omega t} = a_2(\cos\omega t - j\sin\omega t)\,.$$

- Эти составляющие дают незатухающие колебания (по крайней мере, для некоторых начальных условий), поэтому система находится на границе устойчивости (*нейтрально устойчива*). Заметим, что постоянные a_1 и a_2 – комплексно-сопряженные, то есть, если $a_1 = b + jc$, то $a_2 = b - jc$. При этом сумма

$$a_1 e^{j\omega t} + a_2 e^{-j\omega t} = 2b\cos\omega t - 2c\sin\omega t$$

- не содержит мнимой части.

6. Анализ систем управления

- *6.4.7. Внутренняя устойчивость линейных систем*
- Мы фактически рассмотрели *техническую устойчивость*, то есть, устойчивость по выходу при ненулевых начальных условиях.
- Теперь посмотрим, как определить *внутреннюю устойчивость* линейной системы, то есть, устойчивость внутренних процессов. Поскольку выход системы нас пока не интересует используем модель «вход-состояние»:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

- где $x(t)$ – вектор состояния, $u(t)$ – входной сигнал, A и B – постоянные матрицы. Если вход равен нулю (нет возмущений), уравнение упрощается

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \qquad (48)$$

- Таким образом, свободное движение определяется только свойствами матрицы A .

6. Анализ систем управления

- Сначала для простоты будем считать, что матрица *A* имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

- Тогда уравнение (48) распадается на два независимых уравнения (две подсистемы):

$$\dot{x}_1(t) = \alpha_1 x(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \alpha_2 x(t)$$

- Здесь устойчивость определяется значениями α_1 и α_2 . Если они оба отрицательны, то система асимптотически устойчива. Если одно из них – нуль, а второе отрицательно (или оба нулевых), то система нейтрально устойчива.

6. Анализ систем управления

- В общем случае внутренняя устойчивость зависит от *собственных чисел* матрицы *A* , то есть, от корней *характеристического уравнения* $\det(\lambda I - A) = 0$, где *I* – единичная матрица, а « det » обозначает определитель квадратной матрицы. Полином $\det(\lambda I - A)$ от переменной λ называют *характеристическим полиномом.*
- Например, для рассмотренной выше диагональной матрицы *A*

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix}\lambda-\alpha_1 & 0\\ 0 & \lambda-\alpha_2\end{bmatrix} = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)$$

- Очевидно, что корни этого полинома – это α_1 и α_2 .

6. Анализ систем управления

- Если все корни характеристического полинома устойчивы (имеют отрицательные вещественные части, расположены в левой полуплоскости), то система *асимптотически устойчива*.
- Если есть неустойчивые корни (с положительной вещественной частью), то система *неустойчива*.
- Если характеристический полином имеет один нулевой корень или пару комплексно сопряженных корней на мнимой оси, система *нейтрально устойчива*
- Внутренняя устойчивость – более сильное требование, чем техническая устойчивость, потому что определяет ограниченность не только выхода, но и всех внутренних переменных при любых начальных условиях.

6. Анализ систем управления

- Рассмотрим, например, такую модель в пространстве состояний

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

- Здесь матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- имеет собственные числа 1 и −1, причем первое из них – неустойчиво, поэтому система внутренне неустойчива.
- Теперь найдем передаточную функцию (см. раздел 3.7):

$$W(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}.$$

6. Анализ систем управления

- Ее знаменатель (характеристический полином) $\Delta(s) = s + 1$ устойчив, так как имеет единственный устойчивый корень -1, хотя система внутренне неустойчива!
- Обратите внимание, что система имеет порядок 2, а знаменатель передаточной функции – порядок 1.
- В данном случае это означает, что некоторые внутренние движения системы *не наблюдаемы* на выходе, не влияют на него.
- Вспомним, что передаточная функция описывает свойства системы только *при нулевых начальных условиях*.
- Поэтому выводы об устойчивости внутренних процессов в системе, сделанные по передаточной функции, могут оказаться неверными, если степень ее знаменателя меньше порядка исходного дифференциального уравнения.

6. Анализ систем управления

- *6.4.8. Устойчивость линеаризованных систем*
- Устойчивость нелинейной системы можно во многих случаях оценивать с помощью линеаризованной системы. Для этого применяют **теоремы Ляпунова**, которые связывают корни характеристического полинома $\Delta(s)$ линейной модели и устойчивость нелинейной системы в окрестности точки линеаризации:
- 1) если все корни имеют отрицательные вещественные части, то нелинейная система также устойчива;
- 2) если есть хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то нелинейная система неустойчива;

6. Анализ систем управления

- 3) если нет корней с положительной вещественной частью, но есть хотя бы один корень с нулевой вещественной частью, то об устойчивости нелинейной системы ничего нельзя сказать без дополнительного исследования.
- Таким образом, для исследования устойчивости положения равновесия нелинейной системы нужно линеаризовать модель в окрестности этой точки и найти корни характеристического полинома.