

Теория Автоматического Управления

Полулях Антон Иванович, к.т.
н., доцент кафедры АД, зам.
начальника отдела
проектирования систем
автоматического управления

Теория Автоматического Управления

Цель курса состоит в изучении принципов автоматического управления, типов систем автоматического управления, используемых в технике, математического аппарата исследования линейных САУ, основных элементов и характеристик САУ, методов анализа САУ на устойчивость и качество управления, способов корректировки свойств линейных САУ.

1.1 Введение

- С древних времен человек хотел использовать предметы и силы природы в своих целях ,то есть *управлять* ими.
- Управлять можно неодушевленными предметами (например, перекачивая камень на другое место), животными (дрессировка), людьми (начальник – подчиненный).
- Множество задач управления в современном мире связано с техническими системами – автомобилями, кораблями, самолетами, станками. Например, нужно поддерживать заданный курс корабля, высоту самолета, частоту вращения двигателя, температуру в холодильнике или в печи.
- Если эти задачи решаются без участия человека, говорят об *автоматическом управлении*.

Введение

- Теория управления пытается ответить на вопрос «как нужно управлять?». До XIX века науки об управлении не существовало, хотя первые системы автоматического управления уже были (например, ветряные мельницы «научили» разворачиваться навстречу ветру).
- Развитие *теории* управления началось в период промышленной революции.
- Сначала это направление в науке разрабатывалось механиками для решения задач *регулирования*, то есть поддержания заданного значения частоты вращения, температуры, давления в технических устройствах (например, в паровых машинах).
- Так произошло название «теория автоматического регулирования».

Введение

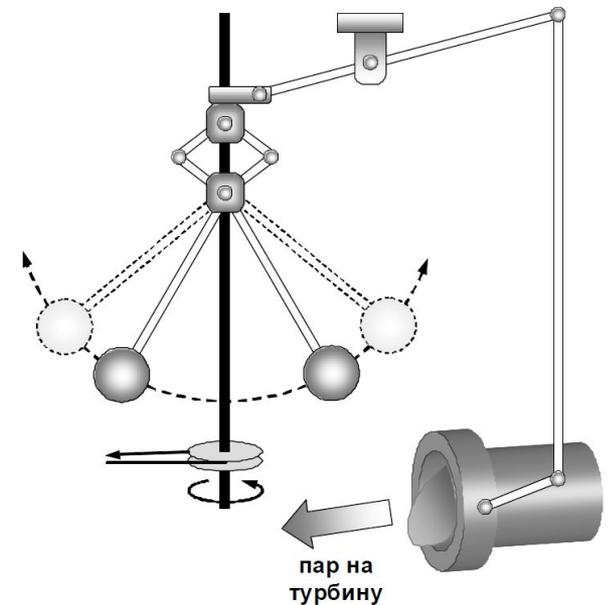
- Принципы управления можно успешно применять не только в технике, но и в биологии, экономике, общественных науках.
- Процессы управления и обработки информации в системах любой природы изучает наука *кибернетика*. Один из ее разделов, связанный главным образом с техническими системами, называется *теорией автоматического управления*. Кроме классических задач регулирования, она занимается также оптимизацией законов управления, вопросами приспособляемости (адаптации).
- Названия «теория автоматического управления» и «теория автоматического регулирования» используются как синонимы.
- В современной зарубежной литературе вы встретите только один термин – *control theory*.

1.2. Системы управления

- В задачах управления всегда есть два объекта – управляемый и управляющий. Управляемый объект обычно называют *объектом управления* или просто *объектом*, а управляющий объект – *регулятором*.
- Например, при управлении частотой вращения объект управления – это двигатель (электромотор, турбина);
- в задаче стабилизации курса корабля – корабль, погруженный в воду;
- в задаче поддержания уровня громкости – динамик.

1.2. Системы управления

- Самый знаменитый из первых механических регуляторов – центробежный регулятор Уатта для стабилизации частоты вращения паровой турбины (на рисунке справа). Когда частота вращения увеличивается, шарики расходятся из-за увеличения центробежной силы. При этом через систему рычагов немного закрывается заслонка, уменьшая поток пара на турбину.



1.2. Системы управления

- Регулятор температуры в холодильнике или термостате – это электронная схема, которая включает режим охлаждения (или нагрева), если температура становится выше (или ниже) заданной.
- Во многих современных системах регуляторы – это микропроцессорные устройства, компьютеры. Они успешно управляют самолетами и космическими кораблями без участия человека. Современный автомобиль буквально «напичкан» управляющей электроникой, вплоть до бортовых компьютеров.

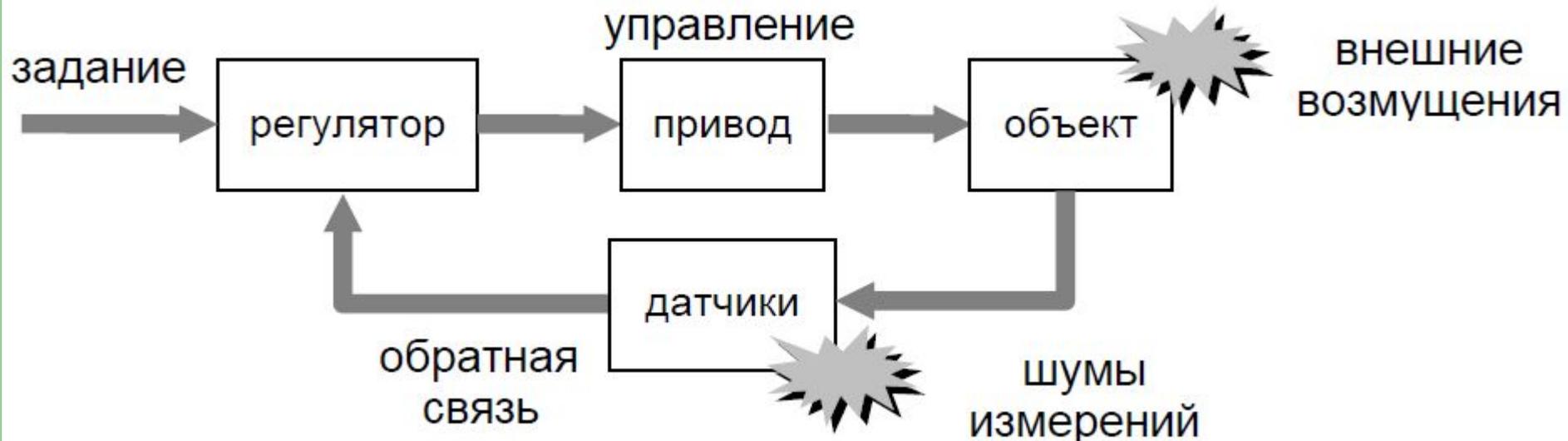
1.2. Системы управления

- Обычно регулятор действует на объект управления не прямо, а через **исполнительные механизмы (приводы)**, которые могут усиливать и преобразовывать сигнал управления, например, электрический сигнал может «превращаться» в перемещение клапана, регулирующего расход топлива, или в поворот руля на некоторый угол.
- Чтобы регулятор мог «видеть», что фактически происходит с объектом, нужны **датчики**. С помощью датчиков чаще всего измеряются те характеристики объекта, которыми нужно управлять. Кроме того, качество управления можно улучшить, если получать дополнительную информацию – измерять внутренние свойства объекта.

1.2. Системы управления

- 1.2.2. Структура системы
- Итак, в типичную систему управления входят объект, регулятор, привод и датчики. Однако, набор этих элементов – еще не система. Для превращения в систему нужны **каналы связи**, через них идет обмен информацией между элементами. Для передачи информации могут использоваться электрический ток, воздух (пневматические системы), жидкость (гидравлические системы), компьютерные сети.
- Взаимосвязанные элементы – это уже *система*, которая обладает (за счет связей) особыми свойствами, которых нет у отдельных элементов и любой их комбинации.

1.2. Системы управления



1.2. Системы управления

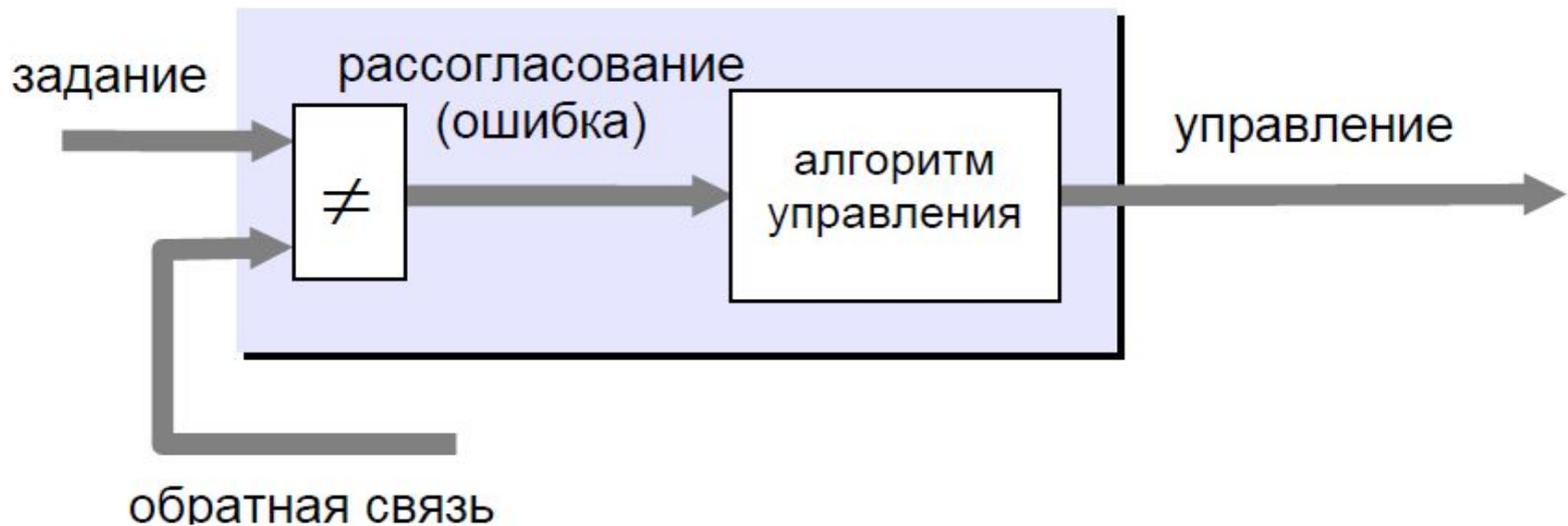
- В системе управления курсом корабля
- **объект управления** – это сам корабль, находящийся в воде; для управления его курсом используется руль, изменяющий направление потока воды;
- **регулятор** – цифровая вычислительная машина;
- **привод** – рулевое устройство, которое усиливает управляющий электрический сигнал и преобразует его в поворот руля;
- **датчики** – измерительная система, определяющая фактический курс;
- **внешние возмущения** – это морское волнение и ветер, отклоняющие корабль от заданного курса;
- **шумы измерений** – это ошибки датчиков.

1.2. Системы управления

- Информация в системе управления как бы «ходит по кругу»: регулятор выдает сигнал управления на привод, который воздействует непосредственно на объект; затем информация об объекте через датчики возвращается обратно к регулятору и все начинается заново.
- Говорят, что в системе есть **обратная связь**, то есть регулятор использует информацию о состоянии объекта для выработки управления. Системы с обратной связью называют **замкнутыми**, поскольку информация передается по замкнутому контуру.

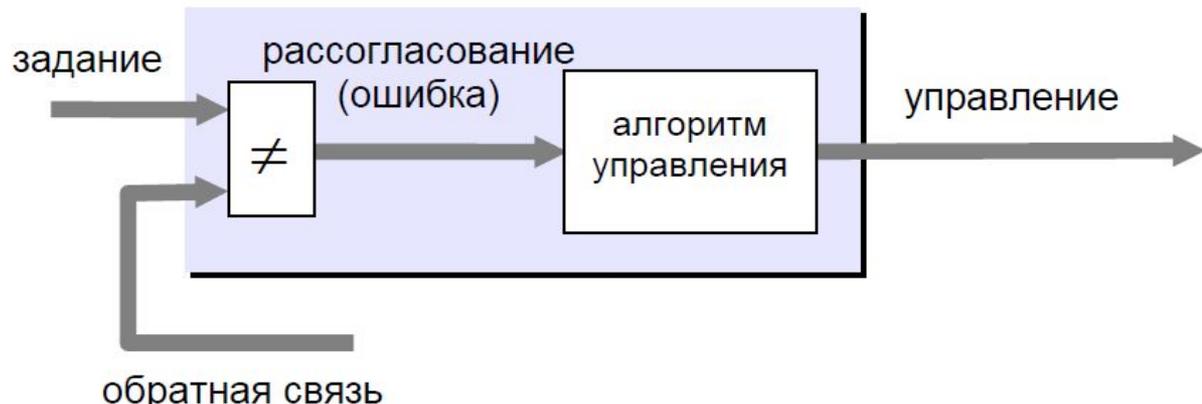
1.2. Системы управления

- Регулятор сравнивает задающий сигнал («задание», «уставку», «желаемое значение») с сигналами обратной связи от датчиков и определяет *рассогласование (ошибку управления)* – разницу между заданным и фактическим состоянием. Если разница есть, регулятор выдает управляющий сигнал, который стремится свести рассогласование к нулю.



1.2. Системы управления

- Такая схема показывает *управление по ошибке* (или *по отклонению*). Это значит, что для того, чтобы регулятор начал действовать, нужно, чтобы управляемая величина *отклонилась* от заданного значения. Блок, обозначенный знаком \neq , находит рассогласование. В простейшем случае в нем из заданного значения вычитается сигнал обратной связи (измеренное значение).



1.2. Системы управления

- Можно ли управлять объектом так, чтобы не было ошибки? В реальных системах – нет. Прежде всего, из-за внешних воздействий и шумов, которые заранее неизвестны. Кроме того, объекты управления обладают *инерционностью*, то есть, не могут мгновенно перейти из одного состояния в другое.
- Возможности регулятора и приводов (то есть мощность сигнала управления) всегда ограничены, поэтому быстродействие системы управления (скорость перехода на новый режим) также ограничена.
- Например, при управлении кораблем угол перекадки руля обычно не превышает $30 - 35^\circ$, это ограничивает скорость изменения курса.

1.2. Системы управления

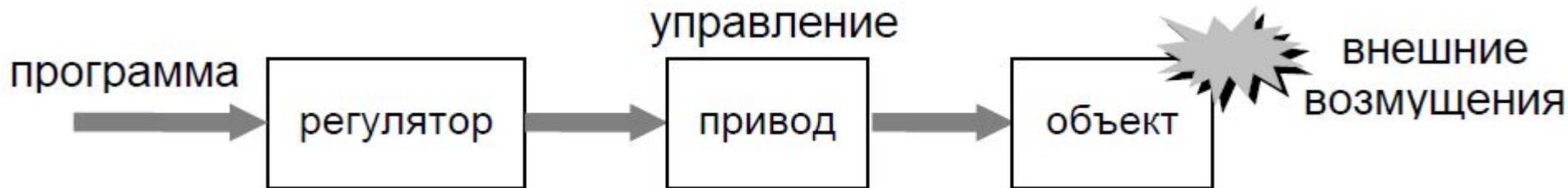
- Мы рассмотрели вариант, когда обратная связь используется для того, чтобы уменьшить разницу между заданным и фактическим состоянием объекта управления. Такая обратная связь называется **отрицательной**, потому что сигнал обратной связи *вычитается* из задающего сигнала.
- Может ли быть наоборот? Оказывается, да. В этом случае обратная связь называется **положительной**, она *увеличивает* рассогласование, то есть, стремится «раскачать» систему. На практике положительная обратная связь применяется, например, в генераторах для поддержания незатухающих электрических колебаний.

1.2. Системы управления

- **1.2.4. Разомкнутые системы.** Можно ли управлять, не используя обратную связь? В принципе, можно. В этом случае регулятор не получает никакой информации о реальном состоянии объекта, поэтому должно быть точно известно, как этот объект себя ведет. Только тогда можно заранее рассчитать, как им нужно управлять (построить нужную *программу управления*). Однако при этом нельзя гарантировать, что задание будет выполнено.
- Такие системы называют **системами программного управления** или **разомкнутыми системами**, поскольку информация передается не по замкнутому контуру, а только в одном направлении.

1.2. Системы управления

- Слепой и глухой водитель тоже может вести машину. Некоторое время. Пока он помнит дорогу и сможет правильно рассчитать свое место. Пока на пути не встретятся пешеходы или другие машины, о которых он заранее не может знать. Из этого простого примера ясно, что без обратной связи (информации с датчиков) невозможно учесть влияние неизвестных факторов, неполноту наших знаний.



1.2. Системы управления

- Несмотря на эти недостатки, разомкнутые системы применяются на практике.
- Например, информационное табло на вокзале. Или простейшая система управления двигателем, в которой не требуется очень точно поддерживать частоту вращения. Однако с точки зрения теории управления разомкнутые системы малоинтересны, и мы не будем больше про них вспоминать.

1.3. Типы систем управления

- *Автоматическая система* – это система, работающая без участия человека. Есть еще *автоматизированные* системы, в которых рутинные процессы (сбор и анализ информации) выполняет компьютер, но управляет всей системой человек-оператор, который и принимает решения. Мы будем далее изучать только автоматические системы.
- *1.3.1. Задачи систем управления.* Автоматические системы управления применяются для решения трех типов задач:
- *стабилизация*, то есть поддержание заданного режима работы, который не меняется длительное время (задающий сигнал – постоянная, часто нуль);
- *программное управление* – управление по заранее известной программе (задающий сигнал меняется, но заранее известен);
- *слежение* за неизвестным задающим сигналом.

1.3. Типы систем управления

- К системам стабилизации относятся, например, авторулевые на кораблях (поддержание заданного курса), системы регулирования частоты вращения турбин.
- Системы программного управления широко используются в бытовой технике, например, в стиральных машинах.
- Следящие системы служат для усиления и преобразования сигналов, они применяются в приводах и при передаче команд через линии связи, например, через Интернет.

1.3. Типы систем управления

- 1.3.2. Одномерные и многомерные системы
- По количеству входов и выходов бывают **одномерные** системы, у которых один вход и один выход (они рассматриваются в так называемой *классической* теории управления);
- **Многомерные системы**, имеющие несколько входов и./или выходов (главный предмет изучения *современной* теории управления).
- Мы будем изучать только одномерные системы, где и объект, и регулятор имеют один входной и один выходной сигнал. Например, при управлении кораблем по курсу можно считать, что есть одно управляющее воздействие (поворот руля) и одна регулируемая величина (курс).

1.3. Типы систем управления

- Однако, в самом деле это не совсем верно. Дело в том, что при изменении курса меняется также крен и дифферент корабля. В одномерной модели мы пренебрегаем этими изменениями, хотя они могут быть очень существенными. Например, при резком повороте крен может достигнуть недопустимого значения.
- С другой стороны, для управления можно использовать не только руль, но и различные подруливающие устройства, стабилизаторы качки и т.п., то есть объект имеет несколько входов.
- Таким образом, реальная система управления курсом – многомерная.
- В инженерных расчетах стараются иногда упрощенно представить многомерную систему как несколько одномерных, и довольно часто такой метод приводит к успеху.

1.3. Типы систем управления

- 1.3.3. *Непрерывные и дискретные системы*
- По характеру сигналов системы могут быть **Непрерывными**, в которых все сигналы – функции непрерывного времени, определенные на некотором интервале;
- **Дискретными**, в которых используются дискретные сигналы (последовательности чисел), определенные только в отдельные моменты времени; • *непрерывно-дискретными*, в которых есть как непрерывные, так и дискретные сигналы.
- Непрерывные (или *аналоговые*) системы обычно описываются дифференциальными уравнениями. Это все системы управления движением, в которых нет компьютеров и других элементов дискретного действия (микропроцессоров, логических интегральных схем).

1.3. Типы систем управления

- Микропроцессоры и компьютеры – это **дискретные системы**, поскольку в них вся информация хранится и обрабатывается в дискретной форме. Компьютер не может обрабатывать непрерывные сигналы, поскольку работает только с *последовательностями* чисел. Примеры дискретных систем можно найти в экономике (период отсчета – квартал или год). Для их описания применяют *разностные* уравнения.
- Существуют также и гибридные **непрерывно-дискретные** системы. В них часть элементов описывается дифференциальными уравнениями, а часть – разностными. Это создает большие сложности для их исследования, поэтому во многих случаях непрерывно-дискретные системы сводят к упрощенным чисто непрерывным или чисто дискретным моделям.

1.3. Типы систем управления

- 1.3.4. *Стационарные и нестационарные системы*
- Для управления очень важен вопрос о том, изменяются ли характеристики объекта со временем. Системы, в которых все параметры остаются постоянными, называются **стационарными**, что значит «не изменяющиеся во времени». Мы будем рассматривать только стационарные системы.
- В практических задачах часто дело обстоит не так радужно. Например, летящая ракета расходует топливо и за счет этого ее масса изменяется. Таким образом, ракета – нестационарный объект. Системы, в которых параметры объекта или регулятора изменяются со временем, называются **нестационарными**. Хотя *теория* нестационарных систем существует (формулы написаны), применить ее на практике не так просто.

1.3. Типы систем управления

- 1.3.5. *Определенность и случайность*
- Самый простой вариант – считать, что все параметры объекта определены (заданы) точно, так же, как и внешние воздействия. В этом случае мы говорим о **детерминированных** системах, которые рассматривались в классической теории управления.
- Тем не менее, в реальных задачах точных данных у нас нет. Прежде всего, это относится к внешним воздействиям. Например, для исследования качки корабля на первом этапе можно считать, что волна имеет форму синуса известной амплитуды и частоты. Это детерминированная модель. Так ли это на практике? Естественно нет. С помощью такого подхода можно получить только приближенные, грубые результаты.

1.3. Типы систем управления

- По современным представлениям форма волны приближенно описывается как сумма синусоид, которые имеют *случайные*, то есть неизвестные заранее, частоты, амплитуды и фазы.
- Помехи, шум измерений – это тоже случайные сигналы.
- Системы, в которых действуют случайные возмущения или параметры объекта могут изменяться случайным образом, называются **стохастическими (вероятностными)**. Теория стохастических систем позволяет получать только вероятностные результаты. Например, нельзя гарантировать, что отклонение корабля от курса *всегда* будет составлять не более 2° , но можно попытаться обеспечить такое отклонение с некоторой *вероятностью* (вероятность 99% означает, что требование будет выполнено в 99 случаях из 100).

1.3. Типы систем управления

- 1.3.6. *Оптимальные системы*
- Часто требования к системе можно сформулировать в виде *задачи оптимизации*. В *оптимальных* системах регулятор строится так, чтобы обеспечить минимум или максимум какого-то критерия качества. Нужно помнить, что выражение «оптимальная система» не означает, что она действительно идеальная. Все определяется принятым критерием – если он выбран удачно, система получится хорошая, если нет – то наоборот.

1.3. Типы систем управления

- 1.3.7. *Особые классы систем*
- Если параметры объекта или возмущений известны неточно или могут изменяться со временем (в нестационарных системах), применяют *адаптивные* или *самонастраивающиеся* регуляторы, в которых закон управления меняется при изменении условий.
- В простейшем случае (когда есть несколько заранее известных режимов работы) происходит простое переключение между несколькими законами управления. Часто в адаптивных системах регулятор оценивает параметры объекта в реальном времени и соответственно изменяет закон управления по заданному правилу.

1.3. Типы систем управления

- Самонастраивающаяся система, которая пытается настроить регулятор так, чтобы «найти» максимум или минимум какого-то критерия качества, называется *экстремальной* (от слова *экстремум*, обозначающего максимум или минимум).
- Во многих современных бытовых устройствах (например, в стиральных машинах) используются *нечеткие регуляторы*, построенные на принципах *нечеткой логики*. Этот подход позволяет формализовать человеческий способ принятия решения: «если корабль ушел сильно вправо, руль нужно сильно переложить влево».
- Одно из популярных направлений в современной теории – нейронные сети. Регулятор строится (или только настраивается) на основе *нейронной сети*, которую предварительно обучает человек эксперт.

2.1. Математические модели

- Цель любого управления – изменить состояние объекта нужным образом (в соответствии с заданием).
- Теория автоматического регулирования должна ответить на вопрос: «как построить регулятор, который может управлять данным объектом так, чтобы достичь цели?»
- Для этого разработчику необходимо знать, как система управления будет реагировать на разные воздействия, то есть нужна **МОДЕЛЬ** системы: объекта, привода, датчиков, каналов связи, возмущений, шумов.

2.1. Математические модели

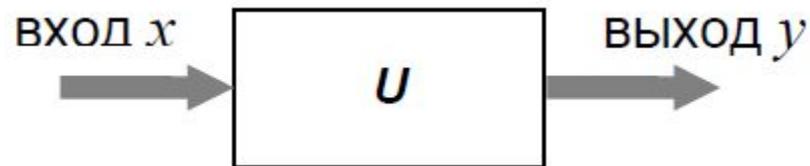
- *Модель* – это объект, который мы используем для изучения другого объекта (*оригинала*).
- Модель и оригинал должны быть в чем-то похожи, чтобы выводы, сделанные при изучении модели, можно было бы (с некоторой вероятностью) перенести на оригинал.
- Нас будут интересовать в первую очередь *математические модели*, выраженные в виде формул.
- Кроме того, в науке используются также описательные (словесные), графические, табличные и другие модели.

2.2. Связь входа и выхода

- Любой объект взаимодействует с внешней средой с помощью входов и выходов.
- Входы – это возможные воздействия на объект, выходы – это те сигналы, которые можно измерить.
- Например, для электродвигателя входами могут быть напряжение питания и нагрузка, а выходами – частота вращения вала, температура.
- Что является входом и выходом для газотурбинного двигателя?

2.2. Связь входа и выхода

- Входы независимы, они «приходят» из внешней среды. При изменении информации на входе меняется внутреннее *состояние объекта* (так называют его изменяющиеся свойства) и, как следствие, выходы:



- Это значит, что существует некоторое правило, по которому элемент преобразует вход x в выход y . Это правило называется *оператором*. Запись $y = U[x]$ означает, что выход y получен в результате применения оператора U ко входу x .

2.2. Связь входа и выхода

- Рассмотрим электродвигатель постоянного тока.
- Вход этого объекта – это напряжение питания (в вольтах), выход – частота вращения (в оборотах в секунду).
- Будем считать, что при напряжении 1 В частота вращения равна 1 об/сек, а при напряжении 2 В – 2 об/сек, то есть частота вращения равна по величине напряжению (условно).
- Легко видеть, что действие такого оператора можно записать в виде
- $U[x] = x$.

2.2. Связь входа и выхода

- Теперь предположим, что этот же двигатель вращает колесо и в качестве выхода объекта мы выбрали число оборотов колеса относительно начального положения (в момент $t = 0$).
- В этом случае при равномерном вращении произведение $x \cdot \Delta t$ дает нам количество оборотов за время Δt , то есть $y(t) = x \cdot \Delta t$ (здесь запись $y(t)$ явно обозначает зависимость выхода от времени t).
- Можно ли считать, что этой формулой мы определили оператор U ? Очевидно, что нет, потому что полученная зависимость справедлива только для постоянного входного сигнала. Если напряжение на входе $x(t)$ меняется (все равно как!), угол поворота запишется в виде интеграла

$$U[x] = \int_0^t x(t) dt$$

2.2. Связь входа и выхода

- Оператор, который действует по такому правилу, называется *оператором интегрирования*.
- С помощью этого оператора можно, например, описать наполнение пустого бака водой.
- Если сечение бака S (в m^2) постоянно по всей его высоте, то уровень воды h определяется как интеграл от потока воды q (в m^3/c), деленный на S :

$$h(t) = \frac{1}{S} \int_0^t q(t) dt ,$$

2.2. Связь входа и выхода

- Обратный оператор – **оператор дифференцирования** – вычисляет производную:

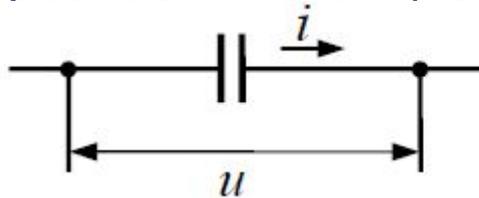
$$U[x(t)] = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

- Этот оператор играет очень важную роль в описании объектов управления.
- Обычно оператор дифференцирования обозначается буквой p . Запись $y(t) = p x(t)$ внешне выглядит как «умножение» оператора p на сигнал $x(t)$, но на самом деле обозначает *действие* этого оператора, то есть **дифференцирование**:

$$p x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

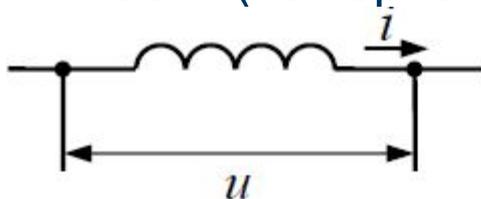
2.2. Связь входа и выхода

- Где встречаются такие операторы? Приведем примеры из электротехники. Например, известно, что ток i (в амперах), проходящий по цепи с конденсатором, пропорционален производной от разности потенциалов u (в вольтах) на его пластинах:



$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C p u(t)$$

- Здесь C – емкость конденсатора (измеряется в фарадах). Кроме того, падение напряжения u на катушке индуктивности пропорционально производной от проходящего тока i : где L – индуктивность (измеряется в генри).



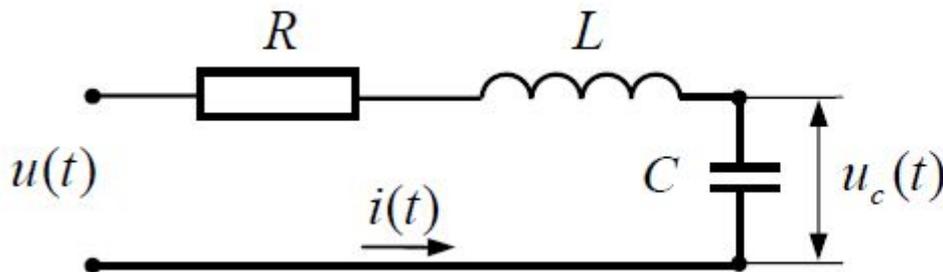
$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L p i(t)$$

2.2. Связь входа и выхода

- Оператор дифференцирования – это идеальный (*физически нереализуемый*) оператор, его невозможно реализовать на практике.
- Чтобы понять это вспомним, что при мгновенном изменении сигнала его производная (скорость возрастания) будет равна бесконечности, а никакое реальное устройство не может работать с бесконечными сигналами.

2.3. Построение моделей

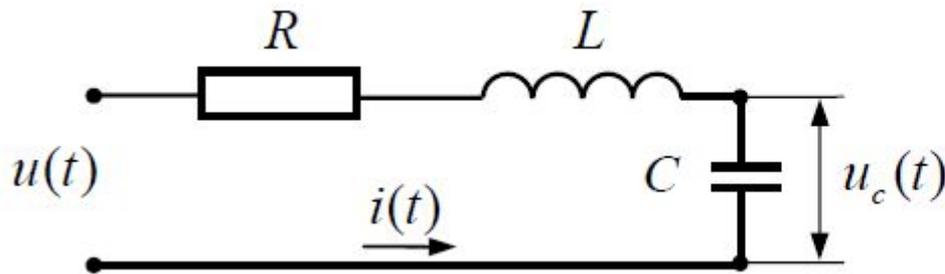
- Во-первых, математические модели могут быть получены теоретически **из законов физики** (законы сохранения массы, энергии, импульса). Эти модели описывают внутренние связи в объекте и, как правило, наиболее точны.
- Рассмотрим RLC -цепочку, то есть последовательное соединение резистора с сопротивлением R (в омах), катушки индуктивности с индуктивностью L и конденсатора с емкостью C . Она может быть описана с помощью двух уравнений:



$$u(t) = u_c(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t)$$

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

2.3. Построение моделей



$$u(t) = u_c(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t)$$

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

- Первое уравнение означает, что разность потенциалов на концах RLC -цепочки равна сумме разностей потенциалов на всех промежуточных участках. Разность потенциалов $R \cdot i(t)$ на резисторе вычисляется по закону Ома, а на катушке – по формуле, приведенной выше. Второе уравнение описывает связь между напряжением и током для конденсатора. Вход этого объекта – напряжение $u(t)$ на концах цепочки, а выход – разность потенциалов $u_c(t)$ на пластинах конденсатора.

2.3. Построение моделей

- Второй способ – построение модели в результате **наблюдения за объектом** при различных входных сигналах (этим занимается *теория идентификации*).
- Объект рассматривается как «черный ящик», то есть, его внутреннее устройство неизвестно.
- Мы смотрим, как он реагирует на входные сигналы, и стараемся подстроить модель так, чтобы выходы модели и объекта совпадали как можно точнее при разнообразных входах.

2.3. Построение моделей

- На практике часто используется смешанный способ: структура модели (вид уравнения, связывающего вход и выход) определяется из теории, а коэффициенты находят опытным путем.
- Например, общий вид уравнений движения корабля хорошо известен, однако в этих уравнениях есть коэффициенты, которые зависят от многих факторов (формы корпуса, шероховатости поверхности и т.п.), так что их крайне сложно (или невозможно) найти теоретически.
- В этом случае для определения неизвестных коэффициентов строят масштабные модели и испытывают их в бассейнах по специальным методикам. В авиастроении для тех же целей используют аэродинамические трубы.

2.3. Построение моделей

- Для любого объекта управления можно построить множество различных моделей, которые будут учитывать (или не учитывать) те или иные факторы. Обычно на первом этапе стараются описать объект как можно более подробно, составить детальную модель. Однако при этом будет трудно теоретически рассчитать закон управления, который отвечает заданным требованиям к системе. Даже если мы сможем его рассчитать, он может оказаться слишком сложным для реализации или очень дорогим.
- С другой стороны, можно упростить модель объекта, отбросив некоторые «детали», которые кажутся разработчику маловажными. Для упрощенной модели закон управления также получается проще, и с его помощью часто можно добиться желаемого результата. Однако в этом случае нет гарантии, что он будет так же хорошо управлять полной моделью (и реальным объектом).

2.3. Построение моделей

- Обычно используется компромиссный вариант. Начинают с простых моделей, стараясь спроектировать регулятор так, чтобы он «подходил» и для сложной модели. Это свойство называют **робастностью** (*грубостью*) регулятора (или системы), оно означает нечувствительность к ошибкам моделирования.
- Затем проверяют работу построенного закона управления на полной модели или на реальном объекте. Если получен отрицательный результат (простой регулятор «не работает»), усложняют модель, вводя в нее дополнительные подробности. И все начинается сначала.

2.4. Линейность и нелинейность

- Проще всего решать *линейные* уравнения. С нелинейными уравнениями (квадратными, кубическими и др.) работать намного сложнее, многие типы уравнений математика пока не умеет решать аналитически (точно).
- Среди операторов самые простые – также *линейные*. Они обладают двумя свойствами:
- **умножение на константу**: $U[\alpha \cdot x] = \alpha \cdot U[x]$, где α – любая постоянная (то есть, при увеличении входа в несколько раз выход увеличивается во столько же раз, однородность);
- **принцип суперпозиции**: если на вход подать сумму двух сигналов, выход будет представлять собой сумму реакций того же оператора на отдельные сигналы (аддитивность):

$$U[x_1 + x_2] = U[x_1] + U[x_2].$$

2.4. Линейность и нелинейность

- Модели, которые описываются линейными операторами, называются **линейными**. С ними можно работать с помощью методов *теории линейных систем*, которая наиболее развита и позволяет точно решать большинство известных практических задач.
- Однако, все модели реальных систем – **нелинейные**. Это легко понять хотя бы потому, что всегда есть предельно допустимое значение входного сигнала – при его превышении объект может просто выйти из строя или даже разрушиться (линейность нарушается). Методы исследования нелинейных операторов очень сложны математически, в *теории нелинейных систем* точные решения известны только для достаточно узкого круга задач. Здесь пока больше «белых пятен», чем полученных результатов, хотя это научное направление активно развивается в последние годы.

2.4. Линейность и нелинейность

- Что же делать?
- Чаще всего сначала проводят *линеаризацию* нелинейной модели объекта (привода), то есть строят приближенную линейную модель.
- Затем на основе этой модели проектируют закон управления, применяя точные методы теории линейных систем.
- Наконец, проверяют полученный регулятор с помощью компьютерного моделирования на полной нелинейной модели.

2.4. Линейность и нелинейность

- Нужно отметить, что если объект или привод имеют так называемую «существенную» нелинейность, этот подход может не сработать. Тогда придется использовать методы нелинейной теории, а также компьютерное моделирование. Моделирование стало очень популярным в последнее время, поскольку появились мощные компьютерные программы для проведения вычислительных экспериментов, и можно проверить поведение системы при разнообразных допустимых входных сигналах.
- Таким образом, в классификацию систем управления в разделе 1.3 нужно добавить еще одно деление, может быть, самое существенное – системы бывают **линейные и нелинейные**. В линейных системах все звенья описываются линейными операторами, и это значительно упрощает работу с ними.

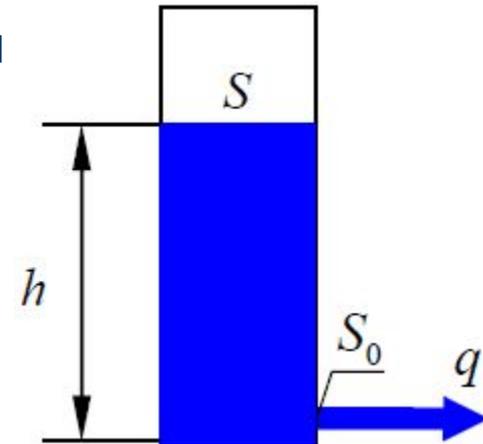
2.5. Линеаризация уравнений

- Вы уже знаете, что в теории управления лучше всего разработаны методы исследования линейных систем. Однако строго линейных систем в окружающем нас мире не существует.
- Поэтому для того, чтобы эти методы можно было применить на практике, нужно выполнить *линеаризацию* – построить приближенную линейную модель на основе более реалистичной нелинейной модели объекта.

2.5. Линеаризация уравнений

- 2.5.1. Алгебраические уравнения
- Представим себе бак с водой. В нижней части бака просверлено отверстие, через которое вытекает вода. Площадь сечения бака обозначим через S , а площадь сечения отверстия – через S_0 . Построим модель, которая связывает уровень воды в баке h (в метрах) и расход вытекающей воды q (в м³/с). Эту связь можно найти с помощью закона Бернулли, который в данном случае принимает вид

$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2}$$



2.5. Линеаризация уравнений

$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2}$$

Здесь ρ – плотность жидкости (в кг/м^3), $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения, v – скорость вытекания жидкости (в м/с). Отсюда получаем $v = \sqrt{2gh}$. Учитывая, что расход воды вычисляется как $q = S \cdot v$, находим

$$q = \alpha \sqrt{h}, \quad (2)$$

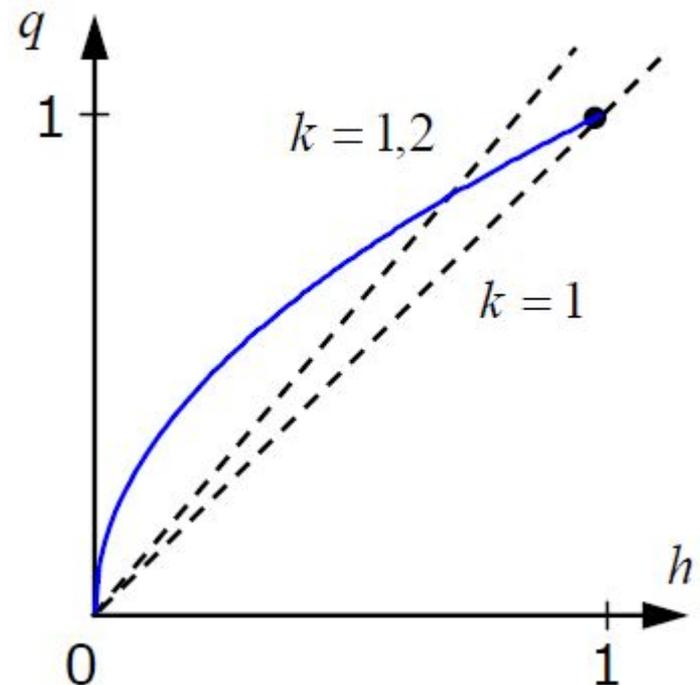
- где $\alpha = S_0 \sqrt{2g}$ – постоянная величина. Это *статическая* модель, потому что она не содержит производных, характеризующих изменение сигналов во времени.
- Статическая модель описывает *установившееся* состояние (*статический режим*), когда в баке поддерживается постоянный уровень воды и поток вытекающей воды тоже постоянный.

2.5. Линеаризация уравнений

- Очевидно, что модель (2) – нелинейная, поскольку содержит \sqrt{h} . Линеаризовать ее – значит приближенно заменить уравнение (2) линейным уравнением $q = k \cdot h$, где k – некоторый коэффициент. Как его выбрать? На этот вопрос нет однозначного ответа.
- Предположим, что уровень воды изменяется в интервале от 0 до 1 м. Тогда один из вариантов – вычислить коэффициент как угол наклона отрезка, соединяющего точки кривой $q = \alpha \sqrt{h}$ на концах этого интервала. Для определенности далее везде принимаем $\alpha = 1$, тогда получаем $k = 1$.

2.5. Линеаризация уравнений

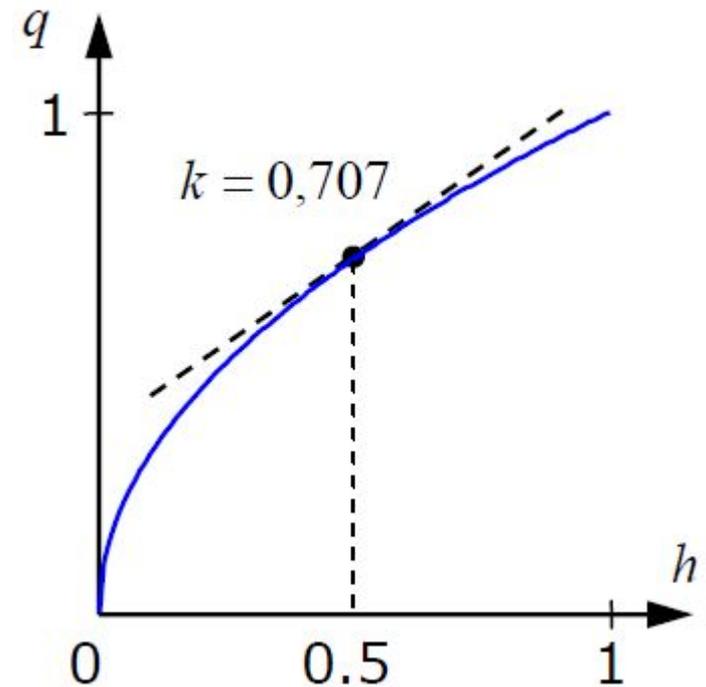
- Конечно, эта модель очень грубая и дает большую ошибку, особенно для уровней в диапазоне от 0,1 до 0,6. Чтобы уменьшить ошибку, можно попробовать несколько изменить k (например, увеличив его до 1,2), однако точность приближения по-прежнему будет невысока, хотя и чуть-чуть лучше, чем в первом случае.



2.5. Линеаризация уравнений

- Теперь предположим, что обычно уровень мало изменяется вблизи среднего значения $h = 0,5\text{м}$. В этом случае можно применить другой подход. Заметим, что в этой области кривая $q = \alpha\sqrt{h}$ почти совпадает с касательной в точке $(0,5; \sqrt{2}/2)$, угол наклона которой равен производной

$$k = \left. \frac{dq}{dh} \right|_{h=0,5} = \left. \frac{1}{2\sqrt{h}} \right|_{h=0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 .$$



2.5. Линеаризация уравнений

- Касательная – это прямая с наклоном k , проходящая через точку $(0,5; \sqrt{2}/2)$, ее уравнение имеет вид $q = kh + b$. Свободный член b определим из равенства

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = kh + b = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,5 + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,354,$$

- так что получаем модель

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} h + \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (3)$$

- Это линейное уравнение, однако модель (3) – *нелинейная*, поскольку для нее не выполняется, например, свойство умножения на константу. Это легко проверить, сравнив $U[2 \cdot h]$ и $2 \cdot U[h]$:

2.5. Линеаризация уравнений

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2}h + \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (3)$$

- Это линейное уравнение, однако модель (3) – *нелинейная*, поскольку для нее не выполняется, например, свойство умножения на константу. Это легко проверить, сравнив $U[2 \cdot h]$ и $2 \cdot U[h]$:

$$U[2 \cdot h] = \sqrt{2}h + \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad 2 \cdot U[h] = \sqrt{2}h + \frac{\sqrt{2}}{2} \neq U[2 \cdot h].$$

- Принцип суперпозиции также не выполняется.

2.5. Линеаризация уравнений

- Для того, чтобы получить из (3) линейную модель, нужно записать **уравнения в отклонениях от рабочей точки** $((h_0; q_0))$ в которой мы определяли наклон касательной. Из (3) следует, что

$$q_0 + \Delta q = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (h_0 + \Delta h) + \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (4)$$

- Поскольку график зависимости (3) проходит через точку $((h_0; q_0))$, можно применить равенство

$$q_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} h_0 + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

- Тогда из (4) находим

$$\Delta q = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \Delta h. \quad (5)$$

2.5. Линеаризация уравнений

$$\Delta q = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \Delta h. \quad (5)$$

- Полученное таким образом уравнение – это *линейная* модель объекта, записанная в отклонениях входа и выхода от *номинальной (рабочей) точки* $((h_0; q_0))$. Приближенная модель (5) точнее всего соответствует объекту волизи этой точки, а при больших отклонениях от нее ошибка может значительно возрасть.
- На этом простом примере мы познакомились с основными принципами линеаризации нелинейных алгебраических уравнений. Далее те же самые идеи используются для более сложной модели, которая описывает *динамику* системы (изменение во времени).

2.5. Линеаризация уравнений

- 2.5.2. Дифференциальные уравнения
- Реальные объекты не могут мгновенно изменять свое состояние, поэтому вместо статических моделей типа (2) для их исследования используют *динамические* модели, которые описываются дифференциальными уравнениями, содержащими производные (скорости изменения сигналов).
- Как мы видели в разделе 2.3, такие модели могут быть получены из физических законов. Во многих случаях более или менее точные модели представляют собой *нелинейные* дифференциальные уравнения, поэтому для того, чтобы применить теорию линейных систем, требуется *линеаризация*.
- При этом применяется почти та же методика, что и для алгебраических уравнений.

2.5. Линеаризация уравнений

- Идея линеаризации заключается в том, что в системах регулирования (поддержания заданных значений величин) сигналы мало отклоняются от *рабочей точки* – некоторого положения равновесия, в котором все сигналы имеют «правильные» значения и их производные равны нулю.
- Поэтому для решения задач управления часто достаточно использовать линейную модель в отклонениях от этой рабочей точки.
- Модель, только что построенная для бака с водой, не совсем правильная, потому что не учитывает, что уровень в баке изменяется – уменьшается по мере вытекания воды. Кроме того, предположим, что для поддержания уровня используется насос, который подкачивает воду в бак, его расход обозначим через Q . Для такого объекта входом является расход Q , а выходом – изменение уровня h .

2.5. Линеаризация уравнений

- Предположим, что в течение маленького интервала Δt расходы Q и q можно считать постоянным. За это время объем воды, добавленной в бак насосом, равен $Q \cdot \Delta t$, а объем «ушедшей» воды – $q \cdot \Delta t$. Учитывая, что площадь сечения бака равна S , получаем изменение уровня:

$$\Delta h = \frac{(Q - q)}{S} \cdot \Delta t$$

- Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S} [Q(t) - q(t)].$$

2.5. Линеаризация уравнений

- Эта модель учитывает, что уровень воды и расходы изменяются во времени. Вспомним, что расход вытекающей жидкости $q(t)$ зависит от уровня воды в баке $h(t)$ и связан с ним нелинейной зависимостью $q(t) = \alpha \cdot \sqrt{h(t)}$. Поэтому уравнение можно записать в виде
$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S}Q(t) - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h(t)}. \quad (6)$$
- Здесь остались только две изменяющиеся величины: расход насоса $Q(t)$ (вход объекта) и уровень воды $h(t)$ (выход). Далее для упрощения записи мы не будем явно указывать зависимость этих сигналов от времени.

2.5. Линеаризация уравнений

- В установившемся (*статическом*) режиме, когда сигналы не изменяются, все производные равны нулю. В нашем случае, приняв $\frac{dh(t)}{dt} = 0$ в (6), получаем

$$0 = Q - \alpha \cdot \sqrt{h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{Q^2}{\alpha^2}. \quad (7)$$

- Эта зависимость между установившимися значениями входа Q и выхода h называется **статической характеристикой**. Она позволяет для любого заданного *постоянного* значения Q на входе получить значение выхода h .

2.5. Линеаризация уравнений

- Теперь предположим, что задана некоторая рабочая точка, то есть, значения входа $Q = Q_0$ и выхода $h = h_0$ удовлетворяют уравнению (7), и система все время работает около этого положения равновесия. Вблизи этой точки

$$Q = Q_0 + \Delta Q \quad \text{и} \quad h = h_0 + \Delta h,$$

- где ΔQ и Δh – малые отклонения входа и выхода от рабочей точки.
- Далее для линеаризации используется разложение функций в ряд Тейлора. Для некоторой функции $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) этот ряд имеет вид:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + F(x, y),$$

2.5. Линеаризация уравнений

где $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ – частные производные функции $f(x, y)$ по x и по y в точке (x_0, y_0) ,

- $F(x, y)$ зависит от высших производных в той же точке (второй, третьей и т.д.). При малых значениях Δx и Δy можно считать, что «хвост» этого ряда $F(x, y)$ очень мал, примерно равен нулю, поэтому

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y. \quad (8)$$

2.5. Линеаризация уравнений

- Применим формулу (8) для линеаризации правой части уравнения (6), где в роли x выступает расход Q , а в роли y – уровень h . Выполняя дифференцирование, находим

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left[\frac{1}{S} Q - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h} \right] = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{1}{S} Q - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h} \right] = -\frac{\alpha}{2S\sqrt{h}}.$$

- Тогда с помощью формулы (8) получаем

$$\frac{1}{S} Q - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h} \approx \frac{1}{S} Q_0 - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h_0} + \frac{1}{S} \cdot \Delta Q - \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}} \cdot \Delta h.$$

Подставим $Q = Q_0 + \Delta Q$ и $h = h_0 + \Delta h$ в уравнение (6)

и учтем, что $\frac{d(h_0 + \Delta h)}{dt} = \frac{d\Delta h}{dt}$. Тогда

$$\frac{d\Delta h}{dt} \approx \frac{1}{S} Q_0 - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h_0} + \frac{1}{S} \cdot \Delta Q - \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}} \cdot \Delta h.$$

2.5. Линеаризация уравнений

Вспоминая, что Q_0 и h_0 соответствуют статическому режиму,

$$\text{то есть } \frac{1}{S} Q_0 - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h_0} = 0,$$

- получаем **линеаризованное уравнение** в отклонениях от рабочей точки:

$$\frac{d\Delta h}{dt} + k_h \cdot \Delta h \approx k_Q \cdot \Delta Q, \quad (9)$$

где $k_h = \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}}$ и $k_Q = \frac{1}{S}$. Заметим, что коэффициент k_h зависит от h_0

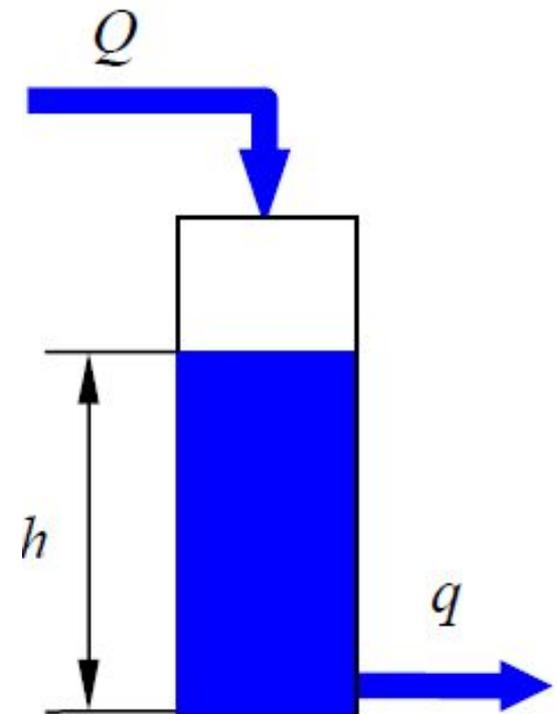
, то есть от выбора рабочей точки. В этом проявляется нелинейность объекта.

2.6. Управление

- Посмотрим на примере, как можно управлять объектом и что из этого получается. Немного изменим предыдущую задачу, разрешив потоку вытекающей жидкости q изменяться независимо (в теории управления это называется *нагрузкой* на объект).
- Для того, чтобы обеспечить водой всех жителей деревни, построили водонапорную башню, в которую насосом закачивается вода из реки. Каждый житель может в любой момент включить воду на своем участке, например, для полива. Нужно построить систему, которая автоматически поддерживает заданный уровень h_0 воды в цистерне (в *метрах*).

2.6. Управление

- Будем считать, что жителей довольно много, поэтому у кого-то всегда включена вода и насос постоянно работает на закачку воды в цистерну. Для управления уровнем воды h мы можем изменять его поток Q (в m^3/c). Таким образом, уровень h – это регулируемая величина, а поток Q – сигнал управления. Для обратной связи используем датчик, измеряющий уровень воды h в цистерне.



2.6. Управление

- Построим математическую модель объекта, то есть цистерны. Поток на выходе q (в m^3/c) показывает, сколько воды вытекает из цистерны за 1 с – это *нагрузка*.
- Изменение уровня Δh зависит от разности потоков $Q - q$ и площади сечения цистерны S .
- Если разность потоков постоянна в течение интервала времени Δt , то
$$\Delta h(t) = \frac{Q(t) - q(t)}{S} \cdot \Delta t.$$
- В общем случае нужно использовать интеграл:

$$\Delta h(t) = \frac{1}{S} \int_0^t (Q(t) - q(t)) dt.$$

2.6. Управление

- Пусть в момент времени $t = 0$ уровень воды равен заданному значению, а входной и выходной потоки равны ($Q(0) = q(0) = q_0$), так что уровень не меняется.
- Этот режим мы примем за **номинальный** (рабочую точку). Для того, чтобы получить уравнение в отклонениях, представим потоки в виде

$$Q(t) = q_0 + \Delta Q(t), \quad q(t) = q_0 + \Delta q(t),$$

- где $\Delta Q(t)$ и $\Delta q(t)$ – малые отклонения потоков от номинального режима. Тогда, опуская знак приращения Δ , можно записать *модель объекта управления* в форме

$$h(t) = \frac{1}{S} \int_0^t (Q(t) - q(t)) dt.$$

2.6. Управление

- Здесь $h(t)$, $Q(t)$ и $q(t)$ обозначают отклонения этих величин от номинальных значений. Заметим, что эта модель может быть записана как дифференциальное уравнение (если найти производные обеих частей равенства):

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S} [Q(t) - q(t)].$$

- Для упрощения далее примем $S = 1 \text{ м}^2$.
- В качестве обратной связи мы будем использовать сигнал с датчика уровня. Ошибка управления вычисляется как разница между заданным и измеренным уровнями воды:

$$e(t) = h_0(t) - h(t).$$

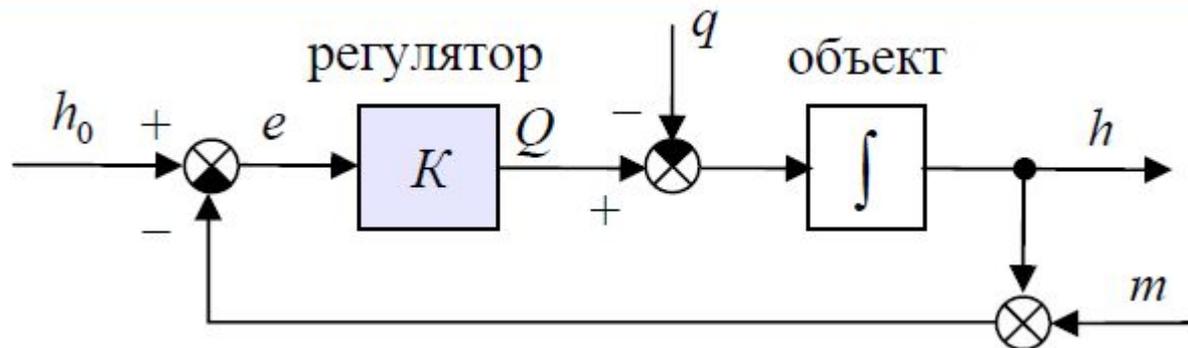
2.6. Управление

- Применим самый простой регулятор – усилитель с коэффициентом K (или пропорциональный регулятор, П-регулятор), который управляет потоком по закону

$$q(t) = \bar{K} \cdot e(t) = K \cdot [h_0(t) - h(t)].$$

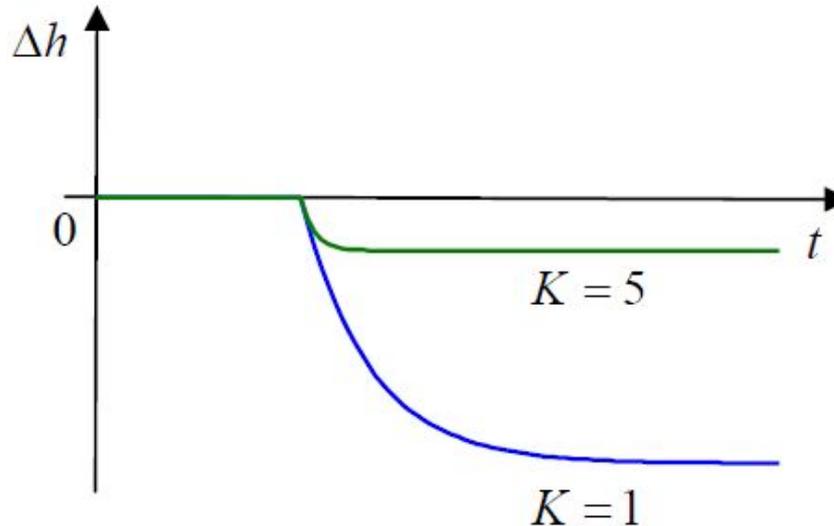
2.6. Управление

- Структурная схема системы управления показана на рисунке далее. Знак интеграла обозначает звено, модель которого – оператор интегрирования. С помощью кружка с секторами обозначается сложение сигналов. Если какой-то сектор закрашен черным цветом, входящий в него сигнал вычитается (учитывается в сумме со знаком «минус»). Кроме сигналов, о которых уже шла речь, на рисунке показан также шум измерения $m(t)$, искажающий показания датчика.



2.6. Управление

- Проверим работу этого регулятора при различных значениях коэффициента K . Сначала будем считать, что шума измерений нет, то есть уровень измеряется точно. Предположим, что расход воды на выходе q увеличивается скачком (все начали поливать огороды). Синяя линия на рисунке (см. ниже) показывает изменение уровня при $K = 1$, а зеленая – при $K = 5$.

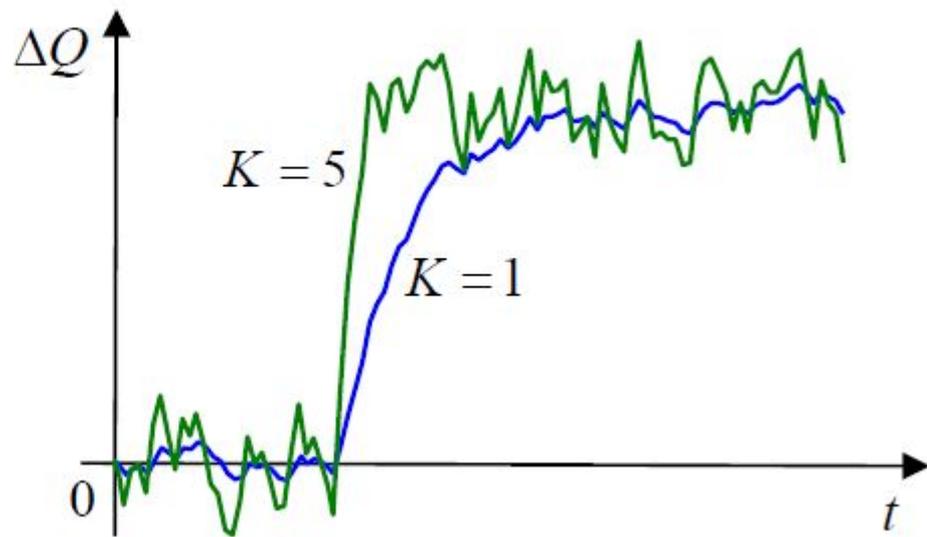
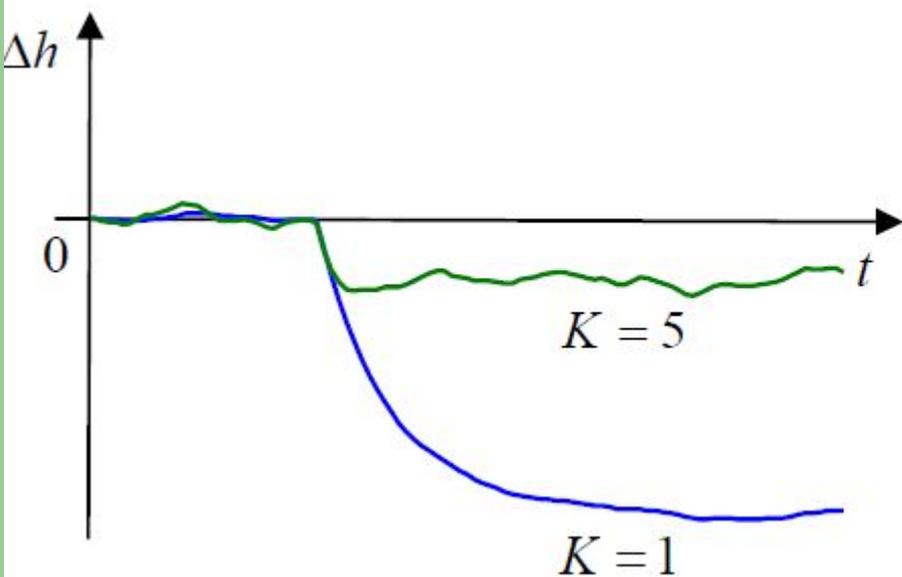


2.6. Управление

- По этим данным можно сделать некоторые выводы:
- • при изменении нагрузки (потребления воды, потока q) регулятор-усилитель не может поддерживать заданный уровень (графики не приходят к значению $\Delta h = 0$);
- • чем больше K , тем меньше ошибка регулирования Δh в установившемся режиме; можно ожидать, что при $K \rightarrow \infty$ ошибка должна уменьшиться до нуля;
- • чем больше K , тем быстрее заканчивается переход на новый режим. Кажется, что для улучшения управления нужно увеличивать K , однако это только первое впечатление.

2.6. Управление

- Теперь посмотрим, что будет, если есть шум измерений (случайная ошибка датчика).



2.6. Управление

- По графикам видно, что при неточных измерениях уровень колеблется около некоторого среднего значения (того, что было получено без шума), причем при бóльшем K колебания увеличиваются. Этот эффект особенно хорошо виден на графике изменения расхода насоса Δq (рисунок справа).
- При увеличении K повышение точности (уменьшение установившейся ошибки) достигается за счет повышенной активности насоса, который все время «дергается». При этом механические части изнашиваются, и существенно уменьшается его срок службы. Поэтому коэффициент K нельзя сильно увеличивать.

2.6. Управление

- Один из главных выводов этого примера: управление чаще всего связано с *компромиссом*.
- Здесь, с одной стороны, нужно увеличивать K , чтобы повысить точность, а с другой – нужно уменьшать K , чтобы уменьшить влияние шума измерения.
- При выборе управления мы шли самым простым путем, остановившись на регуляторе усилителя (П-регуляторе).

2.6. Управление

- Возникают вопросы следующего характера:
- • любым ли объектом можно управлять с помощью регулятора-усилителя?
- • как правильно выбрать коэффициент K (на каком значении остановиться)?
- • можно ли добиться улучшения управления с помощью более сложного регулятора?
- • какой регулятор нужно применить, чтобы улучшить управление?
- • как обеспечить нулевую установившуюся ошибку (постоянный уровень при любом расходе q) и можно ли это сделать вообще?
- • как подавить шумы измерений, чтобы они не приводили к «дерганию» насоса?

2.6. Управление

- В следующих разделах мы рассмотрим основы теории автоматического управления, которая отвечает на такие вопросы и предлагает надежные методы проектирования регуляторов, решающих задачу управления в соответствии с заданными требованиями.