

Первообразная и интеграл

Алгебра и начала анализа . 11 класс (ЕМН)



Первообразная

Основное свойство
первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления
первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной
трапеции

Формула Ньютона-
Лейбница

Вы познакомитесь в этой теме с самыми началами интегрального исчисления, служащего продолжением уже известного вам

дифференциального исчисления.

Первые работы по открытию интегрального исчисления

принадлежат еще

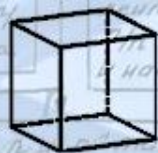
Архимеду – первому математику древности.

В средние века этой проблемой занимался итальянский ученый

Кавальери.

Но подлинное открытие интегрального исчисления принадлежит двум великим ученым XVII века – **Ньютону** и

Лейбницу.



УРОК 1

Первообразная

Основное свойство
первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления
первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной
трапеции

Формула Ньютона-
Лейбница

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x)$$

Другими словами:

нахождение первообразной – это обратное действие нахождения производной



Примеры

1. $f(x) = 2x; \quad F(x) = x^2$
 $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

2. $f(x) = -\sin x; \quad F(x) = \cos x$
 $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x)$

3. $f(x) = 6x^2 + 4; \quad F(x) = 2x^3 + 4x$
 $F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 6x^2 + 4 = f(x)$

4. $f(x) = 1/\cos^2 x; \quad F(x) = \operatorname{tg} x$
 $F'(x) = (\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x = f(x)$

№ 20.1-20.4 а,б
20.7 а,б

Первообразная

Основное свойство
первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления
первообразных

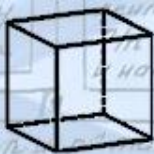
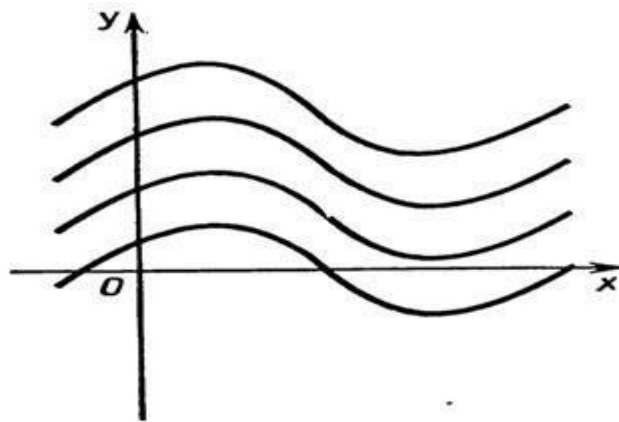
Интеграл

Площадь криволинейной
трапеции

Формула Ньютона-
Лейбница

Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Геометрическая интерпретация
Графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси y .



Первообразная

Основное свойство
первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления
первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной
трапеции

Формула Ньютона-
Лейбница

№	Функция	Первообразная
1	$f(x) = k$	$F(x) = kx$
2	$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x $
4	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
5	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
6	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
7	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
8	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x$
9	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x$
10	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
11	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x$



Первообразная

Основное свойство
первообразной

Таблица первообразных

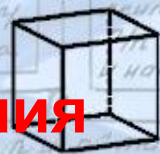
Правила вычисления
первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной
трапеции

Формула Ньютона-
Лейбница

Правила вычисления первообразных



Правило 1. Если F есть первообразная для f , а G — первообразная для g , $F+G$ есть первообразная для $f+g$.

Правило 2. Если F есть первообразная для f , а k — постоянная, то функция kF — первообразная для kf .

Правило 3. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные, причем k не равно 0, то $1/k \cdot F(kx+b)$ есть первообразная для $f(kx+b)$.



УРОК 2

№ 20.10 -20.17 а,
б

УРОК 3

№ 20.20 -20.21 а,б

№ 20.25 -20.26 а,б

УРОК 3

№ 20.28

№ 20.30

№ 20.32

№ 20.33

№ 20.35-20.39

Первообразная

Основное свойство
первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления
первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной
трапеции

Формула Ньютона-
Лейбница

*Вычисление первообразной
заключается в нахождении
неопределенного интеграла,
а сам процесс называется
интегрированием*

Определение: Множество всех
первообразных функции $f(x)$
называется неопределенным
интегралом от функции $f(x)$ на
этом промежутке и
обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$



Первообразная

Основное свойство
первообразной

Таблица первообразных

Правила вычисления
первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной
трапеции

Формула Ньютона-
Лейбница

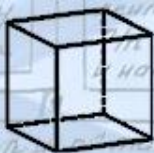
Вычислим площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей. Проведем через полученные точки прямые, параллельные оси OY . Заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей. Площадь всей трапеции приближенно равна сумме площадей столбиков.

$$S_n = f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}$$

$$S \approx S_n$$

по определению $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, его называют определенным интегралом от функции $y=f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначают так:

$$\int_a^b f(x) dx$$



Первообразная

Основное свойство
первообразной

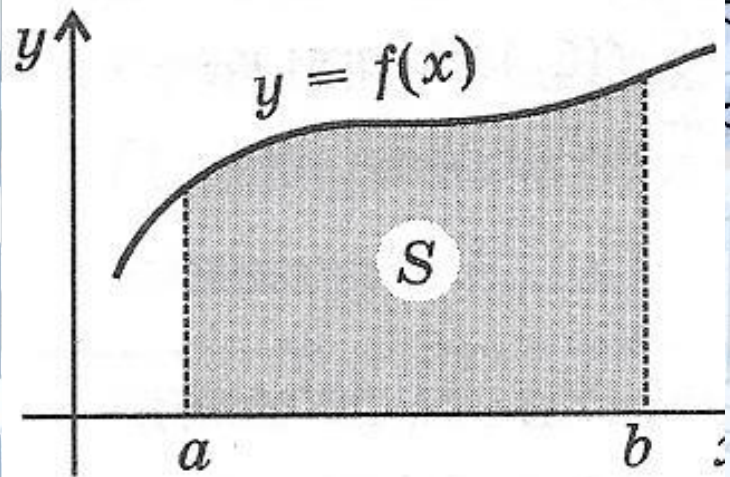
Таблица первообразных

Правила вычисления
первообразных

Интеграл

Площадь криволинейной
трапеции

Формула Ньютона-
Лейбница



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке $[a; b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x=a$ и $x=b$:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона - Лейбница



Вычисление определенного интеграла

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = (x^3 - x^2 + x) \Big|_1^2 =$$

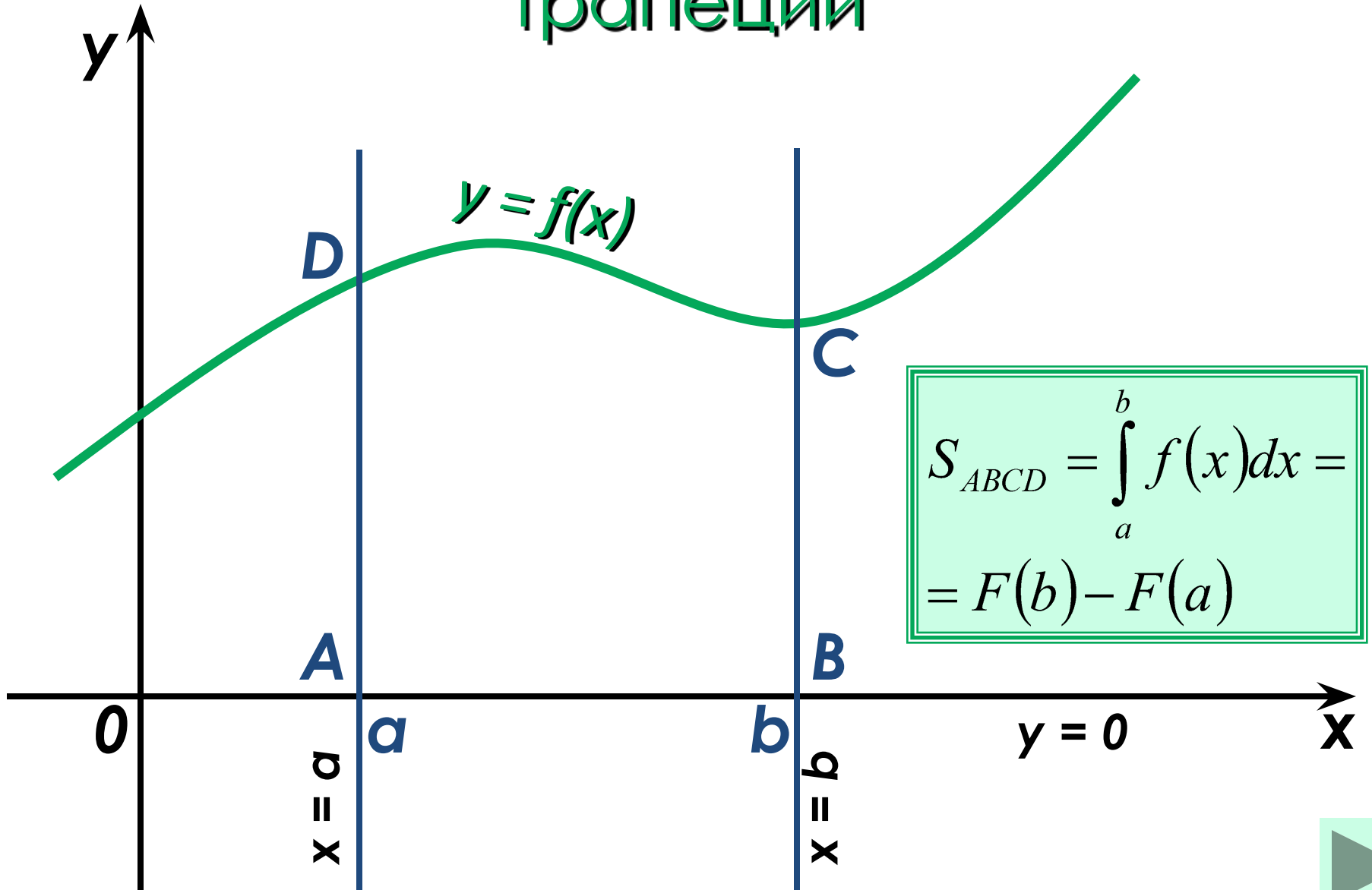
$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 6 - 1 = 5$$

$$\int_3^{10} (\sqrt{x+6}) dx = \frac{2(x+6)\sqrt{x+6}}{3} \Big|_3^{10} =$$

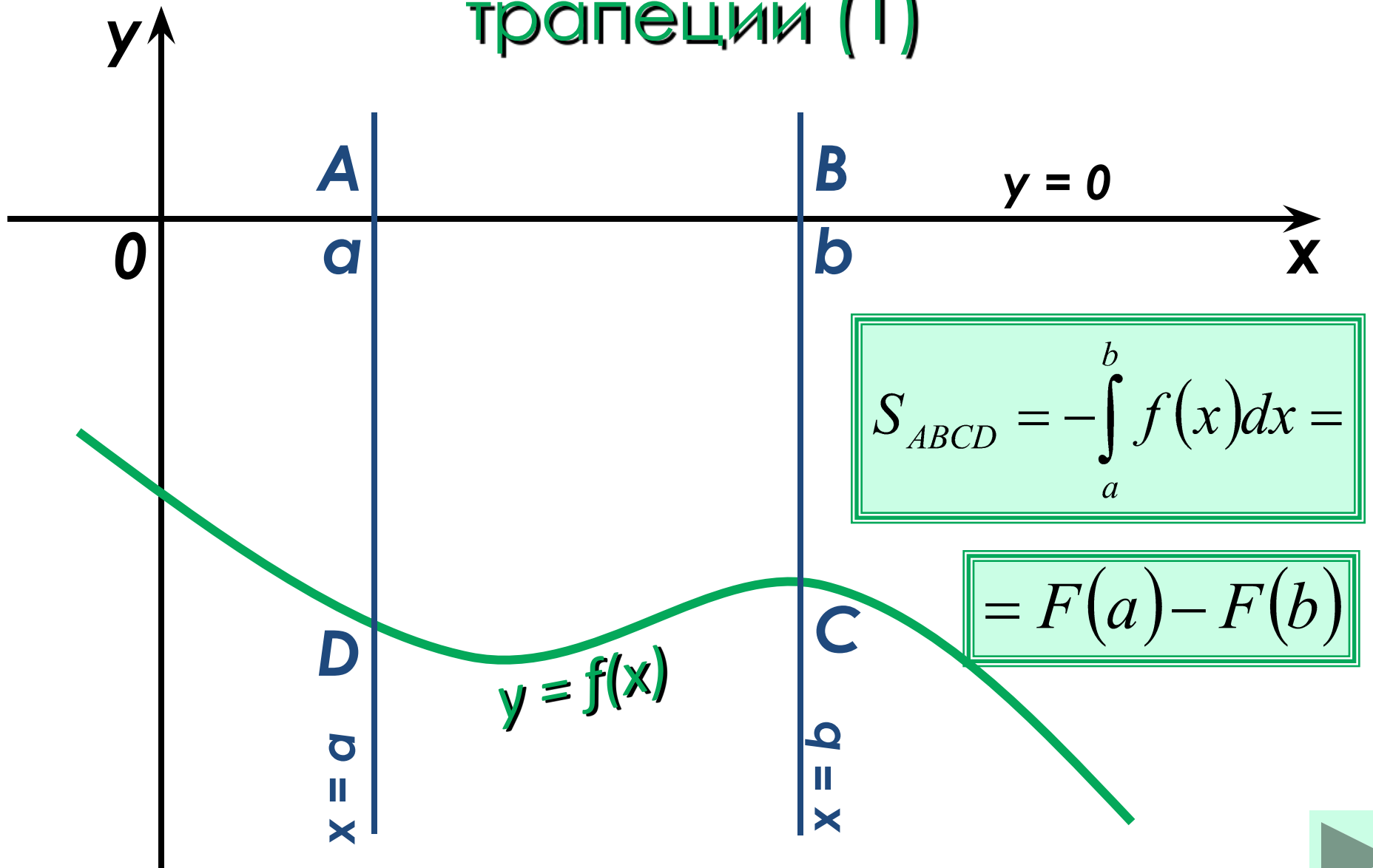
$$= \frac{2(10+6)\sqrt{10+6}}{3} - \frac{2(3+6)\sqrt{3+6}}{3} = \frac{80}{3} - 18 = 7\frac{2}{3}$$



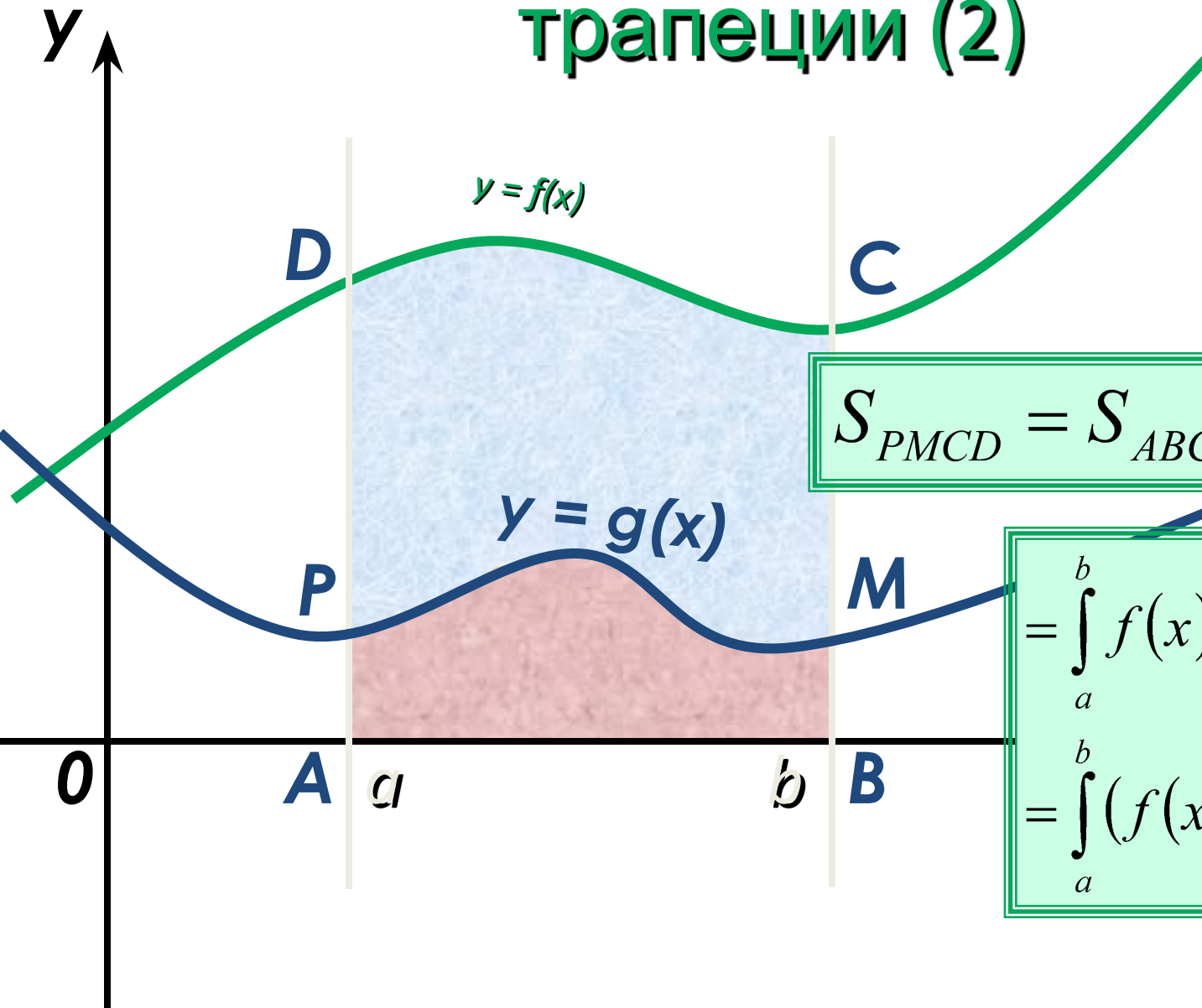
Площадь криволинейной трапеции



Площадь криволинейной трапеции (1)



Площадь криволинейной трапеции (2)

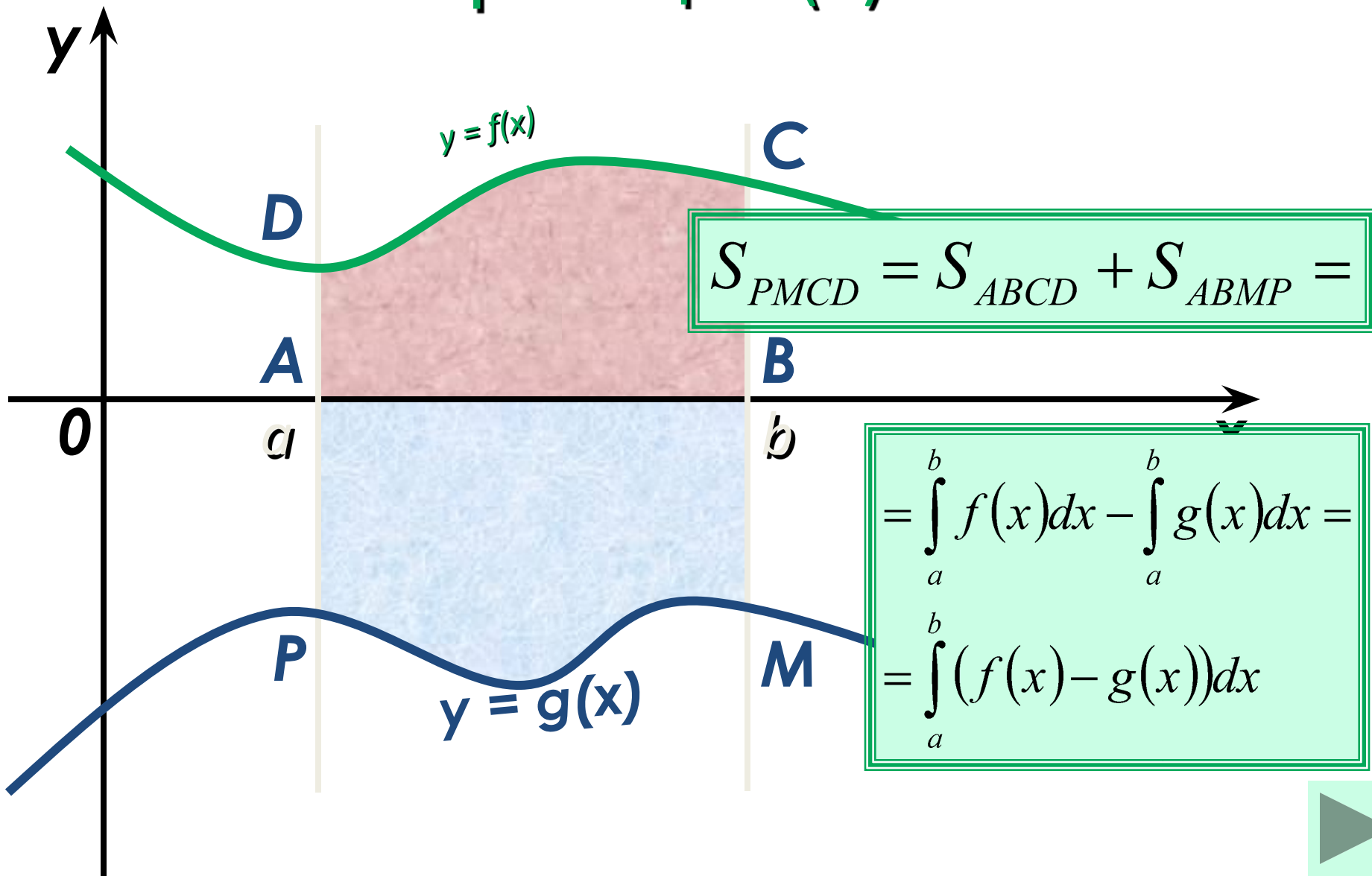


$$S_{PMCD} = S_{ABCD} - S_{ABMP} =$$

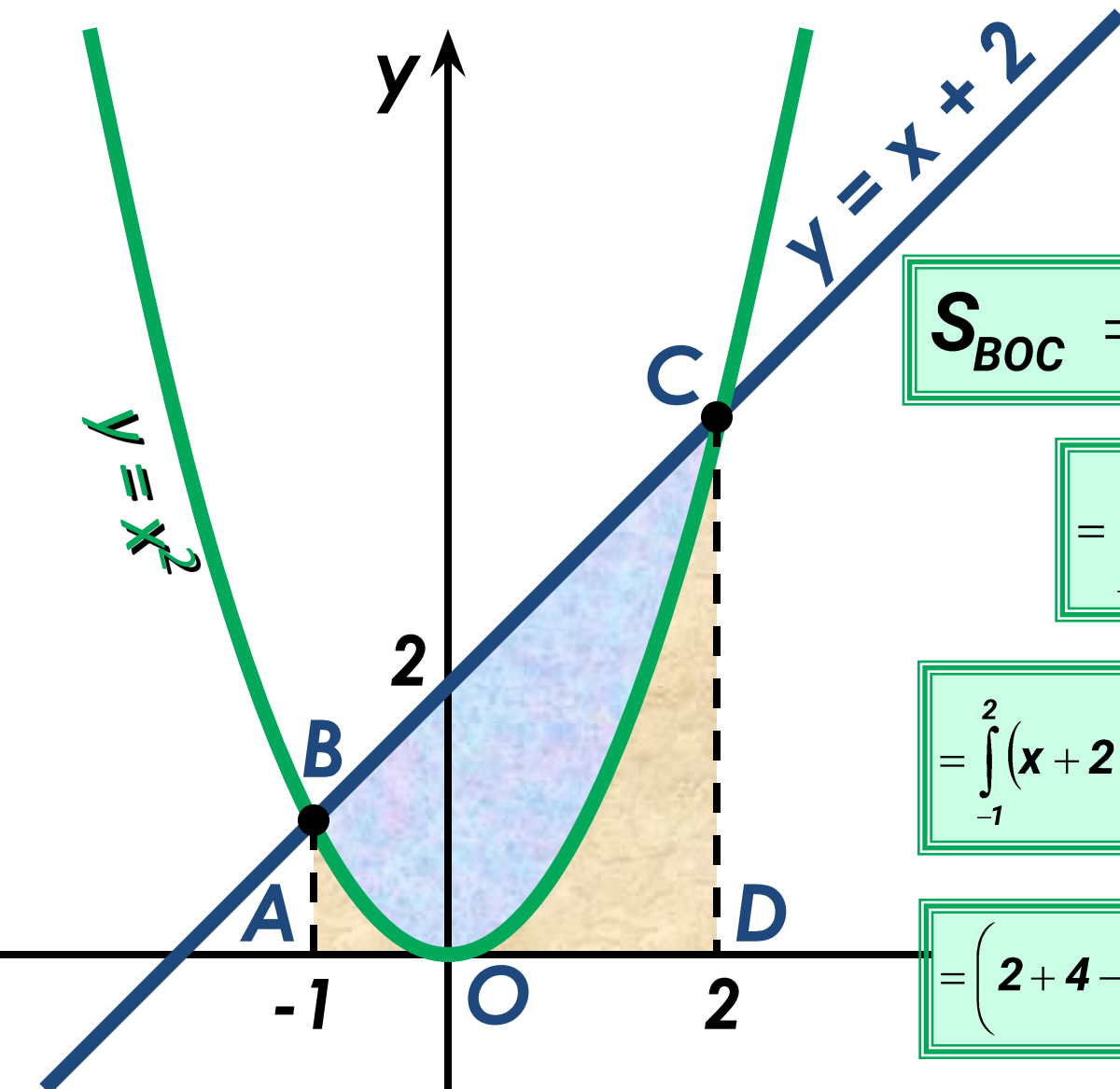
$$= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx =$$
$$= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



Площадь криволинейной трапеции (3)



Пример 1: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



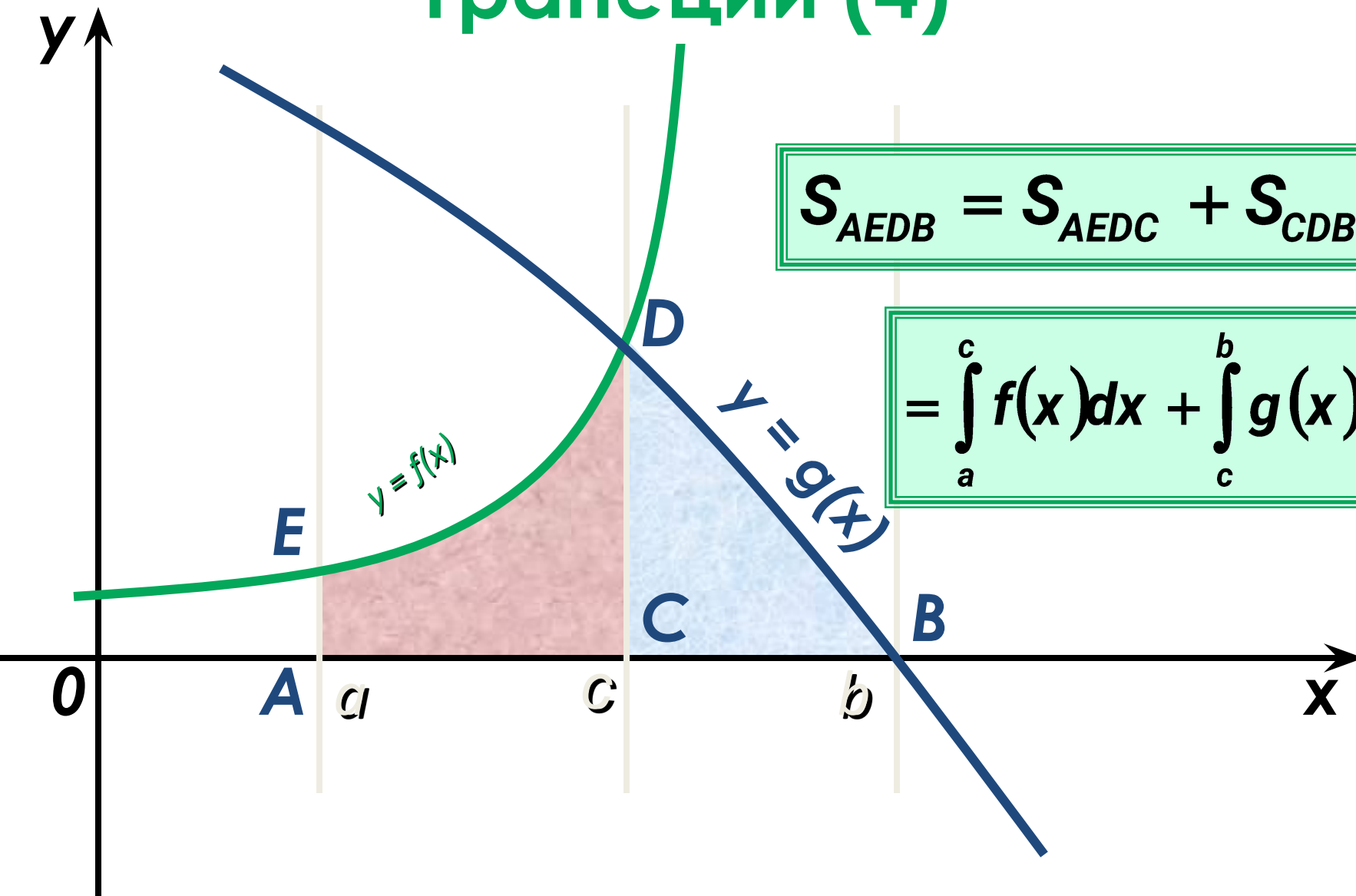
$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} =$$

$$= \int_{-1}^2 (x + 2) dx - \int_{-1}^2 (x^2) dx =$$

$$= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 =$$

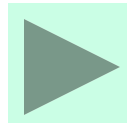
$$= \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 5 - \frac{1}{2} = 4,5$$

Площадь криволинейной трапеции (4)



$$S_{AEDB} = S_{AEDC} + S_{CDB} =$$

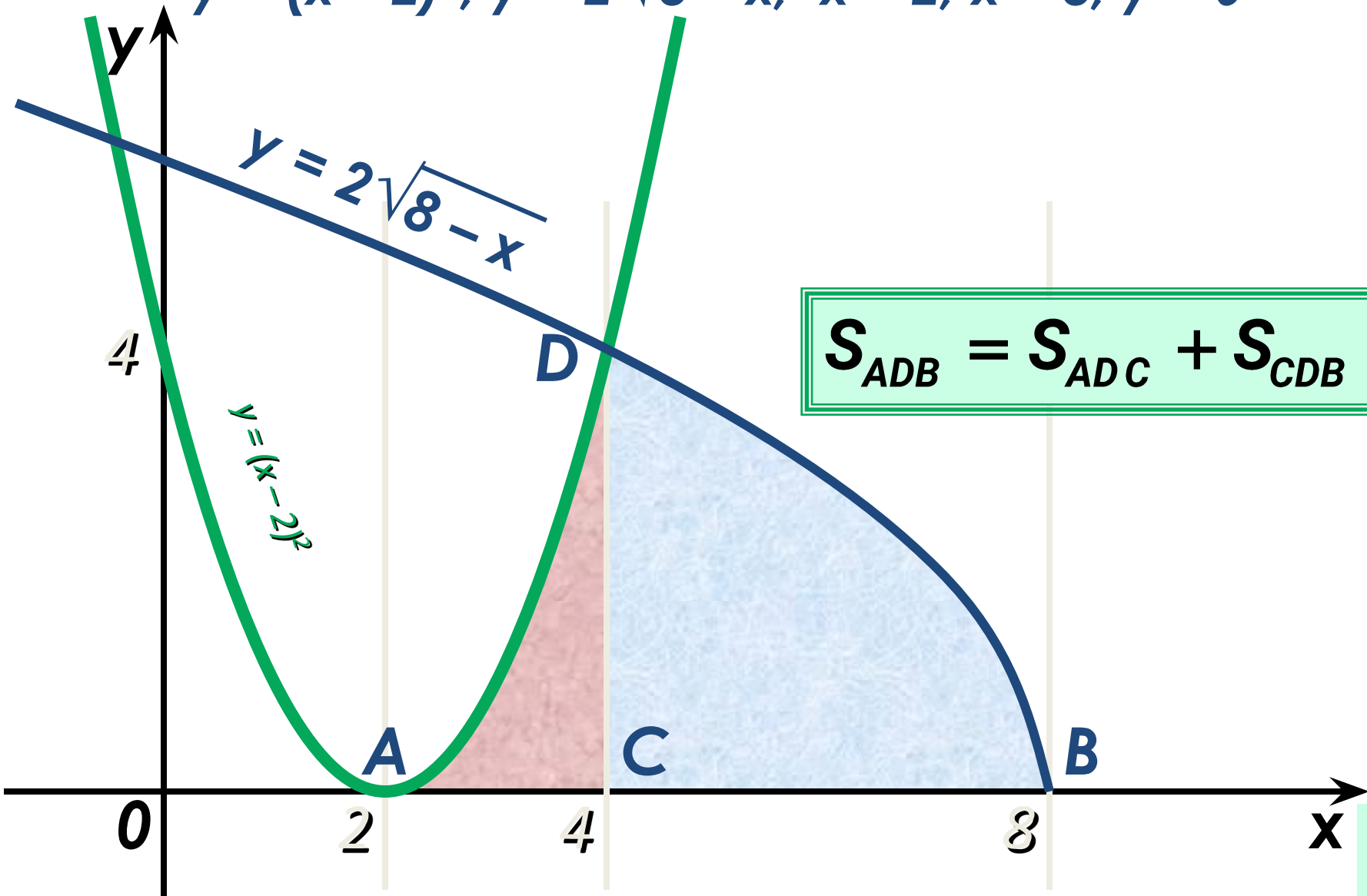
$$= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$



Пример 2:

вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями

$$y = (x - 2)^2, y = 2\sqrt{8 - x}, x = 2, x = 8, y = 0$$



$$S_{ADB} = S_{ADC} + S_{CDB} =$$

Пример 2:

**ВЫЧИСЛИТЬ ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ,
ОГРАНИЧЕННОЙ ЛИНИЯМИ**

$$y = (x - 2)^2, y = 2\sqrt{8 - x}, x = 2, x = 8, y = 0$$

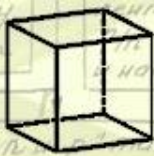
$$= \int_2^4 (x - 2)^2 dx + \int_4^8 2\sqrt{8 - x} dx = \frac{(x - 2)^3}{3} \Big|_2^4 - \frac{4(8 - x)\sqrt{8 - x}}{3} \Big|_4^8 =$$

$$= \left(\frac{(4 - 2)^3}{3} - \frac{(2 - 2)^3}{3} \right) - \left(\frac{4(8 - 8)\sqrt{8 - 8}}{3} - \frac{4(8 - 4)\sqrt{8 - 4}}{3} \right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$



Информационные источники



1. Автор шаблона презентации Пак Марина Алексеевна (ученица 11 «В» МБОУ СОШ №57 г. Владивосток)

<http://pedsovet.su/load/412-1-0-38075?ILlank>

2. Автор технологического приема Г.О.Аствацатуров

<http://didaktor.ru/interaktivnaya-infografika-v-powerpoint-eto-vozmozhno/#more-5892>

3. МК. Создание инфографики в PowerPoint

<http://easyen.ru/load/232-1-0-62065>

4. Геометрический смысл первообразной <https://pptcloud.ru/raznoe/pervoobraznaya-i-integral>

5. Акатова Г.С. Первообразная. Неопределённый и определённый интеграл. (Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона –Лейбница. Таблица первообразных)

<http://www.myshared.ru/slide/1015071/>

6. Крымова А.В. Первообразная и интеграл.

<https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2013/01/10/prezentatsiya-k-uroku-po-matematike-pervoobraznaya-i-integral>

7. Кочеткова М.М. Первообразная

<https://infourok.ru/prakticheskie-raboti-po-matematike-dlya-studentov-kursa-985733.html>

