ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Определение первообразной

В курсе алгебры и начал анализа 10-го класса мы, руководствуясь различными формулами и правилами, находили производную заданной функции и убедились в том, что производная имеет многочисленные применения: производная — это скорость движения, скорость протекания любого процесса (или, обобщая, скорость изменения функции), производная — это угловой коэффициент касательной к графику функции; с помощью производной можно исследовать функцию на монотонность и экстремумы; производная помогает решать задачи на оптимизацию.

Но в реальной жизни приходится решать и обратные задачи: например, наряду с задачей об отыскании скорости по известному закону движения встречается и задача о восстановлении закона движения по известной скорости. Рассмотрим одну из таких задач.

Как по скорости движения тела найти закон его движения?

Пример 1. По прямой движется материальная точка, скорость ее движения в момент времени t задается формулой $v = gt$. Найти закон движения.

Решение. Пусть $s = s(t)$ — искомый закон движения. Известно, что $s'(t) = v(t)$. Значит, для решения задачи нужно подобрать функцию $s = s(t)$, производная которой равна gt. Нетрудно догадаться, что $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. В самом деле,

$$s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}(t^2)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Ответ: $s = \frac{gt^2}{2}$.

В математике взаимно обратным операциям присваивают разные названия, придумывают специальные обозначения: например, возведение в квадрат (x^2) и извлечение квадратного корня $\left(\sqrt{x}\right)$, синус ($\sin x$) и арксинус ($\arcsin x$) и т. д. Процесс отыскания производной по заданной функции называют *дифференцированием*, а обратную операцию, т. е. процесс отыскания функции по заданной производной, — *интегрированием*.

Сам термин «производная» можно обосновать «по-житейски»: функция $y = f(x)$ «производит на свет» новую функцию $y' = f'(x)$. Функция $y = f(x)$ выступает как бы в качестве «родителя», но математики, естественно, не называют ее «родителем» или «производителем», они говорят, что это, по отношению к функции $y' = f'(x)$, *первичный образ*, или *первообразная*.

ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

Функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a;\, b)$, если на нем производная функции $F(x)$ равна $f(x)$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Операцию, обратную дифференцированию называют интегрированием.

Примеры

1. $f(x) = 2x$; $F(x) = x^2$
   $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

2. $f(x) = -\sin x$; $F(x) = \cos x$
   $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x)$

3. $f(x) = 6x^2 + 4$; $F(x) = 2x^3 + 4x$
   $F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 6x^2 + 4 = f(x)$

4. $f(x) = 1/\cos^2 x$; $F(x) = \mathrm{tg}\, x$
   $F'(x) = (\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x = f(x)$

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале (a; b) функции f(x) называют любую ее первообразную функцию.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

Где С – произвольная постоянная (const).

Примеры

$$1.\ \int A\,dx = Ax + C; \quad (Ax + C)' = A$$

$$2.\ \int e^x dx = e^x + C; \quad (e^x + C)' = e^x$$

$$3.\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C; \quad (-\cos x + C)' = \sin x$$

$$4.\ \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C; \quad \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 = x^3$$

$$5.\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C; \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Три правила нахождения первообразных

1° Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.

2° Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k – постоянная, то функция $kF(x)$ есть первообразная для $kf(x)$.

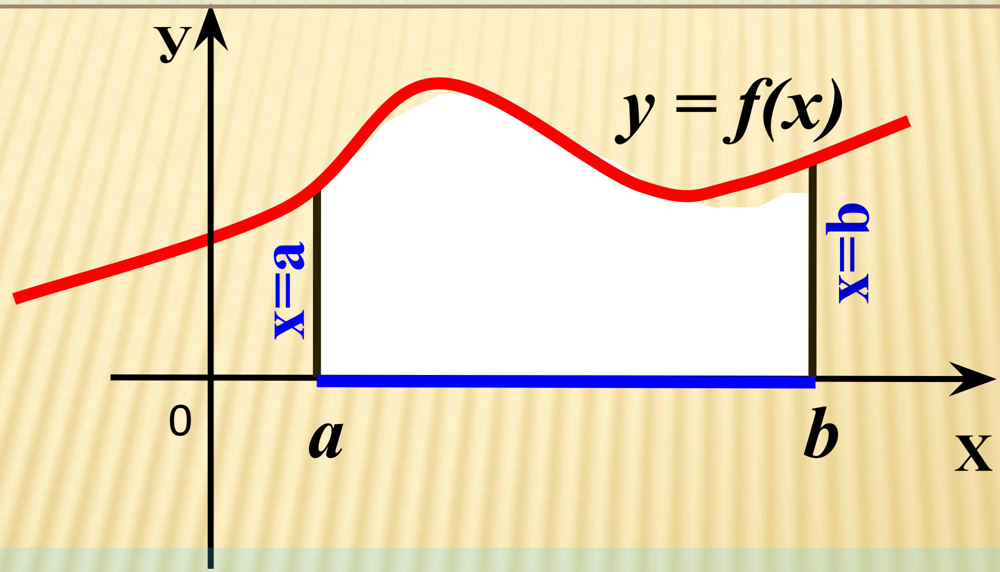
3° Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то функция $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

F(x)	f(x)	F(x)	f(x)
$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	x^n	a^x+C	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}+C$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x+C$	$\cos x$	e^x+C	e^x
$-\cos x+C$	$\sin x$	C	Cx
$tgx+C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x+C$	$\frac{1}{x\ln a}$
$-ctgx+C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\arcsin x+C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

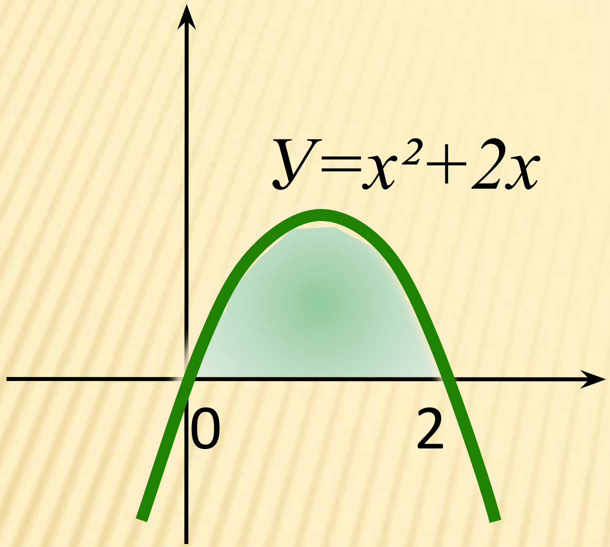
Криволинейная трапеция

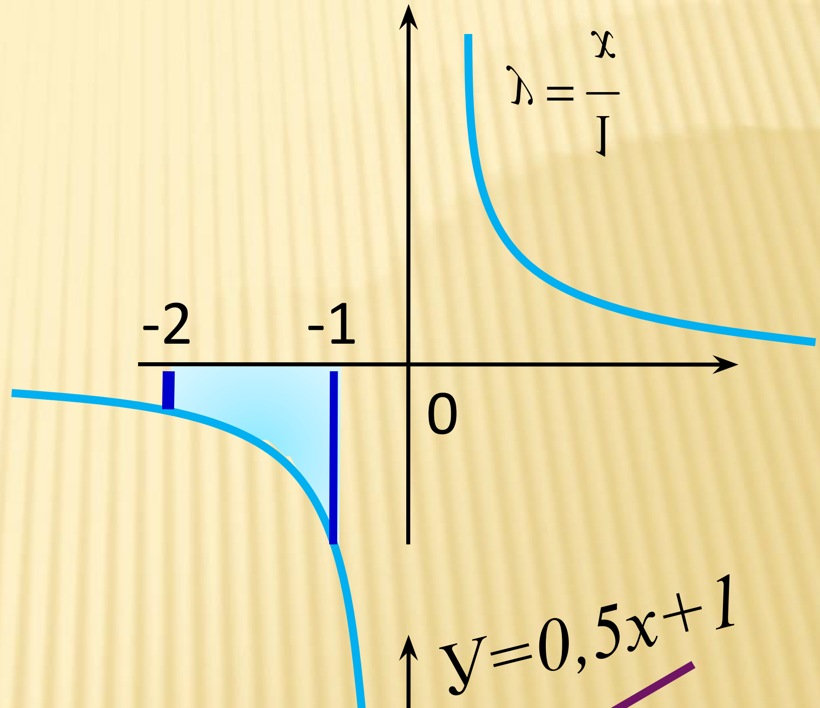
Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке [a;b] знака функции f(x), прямыми x=a, x=b и отрезком [a;b].

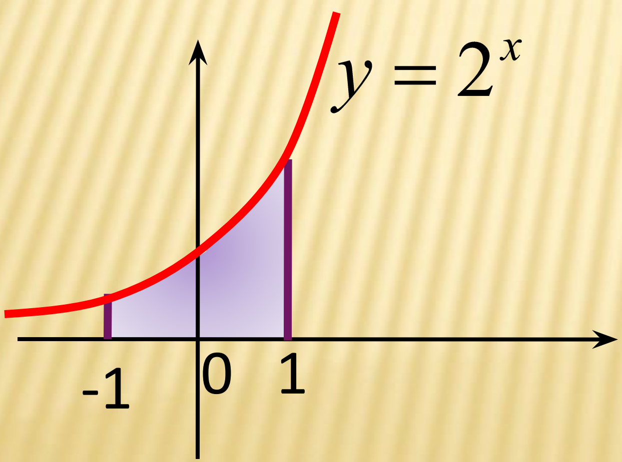


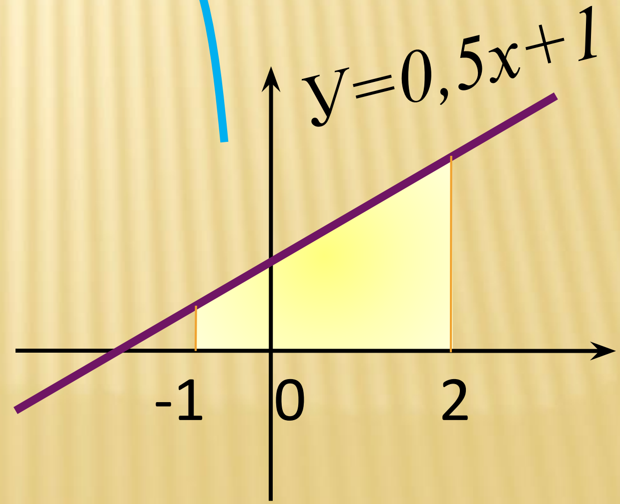
Отрезок **[a;b]** называют ***основанием*** этой криволинейной трапеции

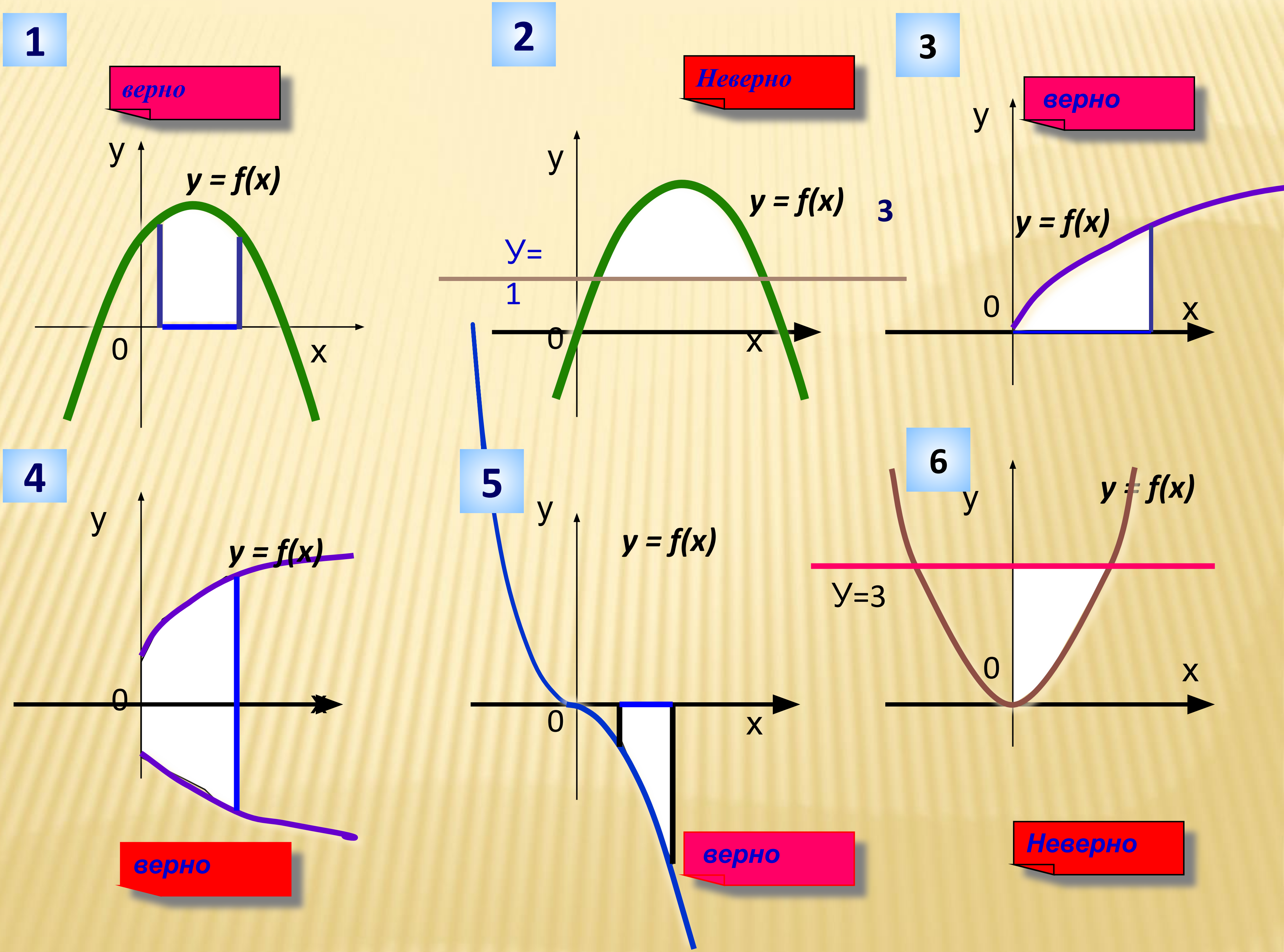
Криволинейная трапеция



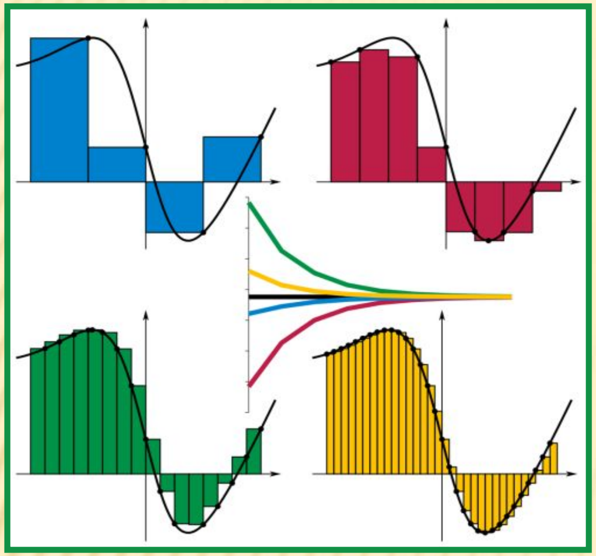


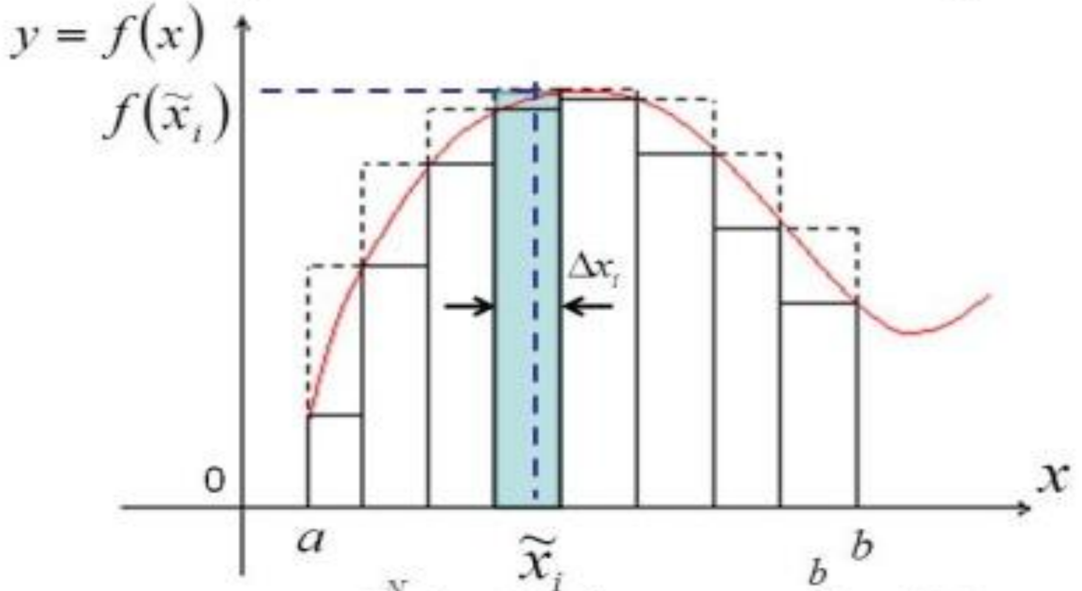





1
верно
y
y = f(x)
0
x
2
Неверно
y
y = f(x)
3
У=
1
0
x
3
верно
y
y = f(x)
0
x
4
y
y = f(x)
0
верно
5
y
y = f(x)
0
x
верно
6
y
y = f(x)
У=3
0
x
Неверно

ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ И ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

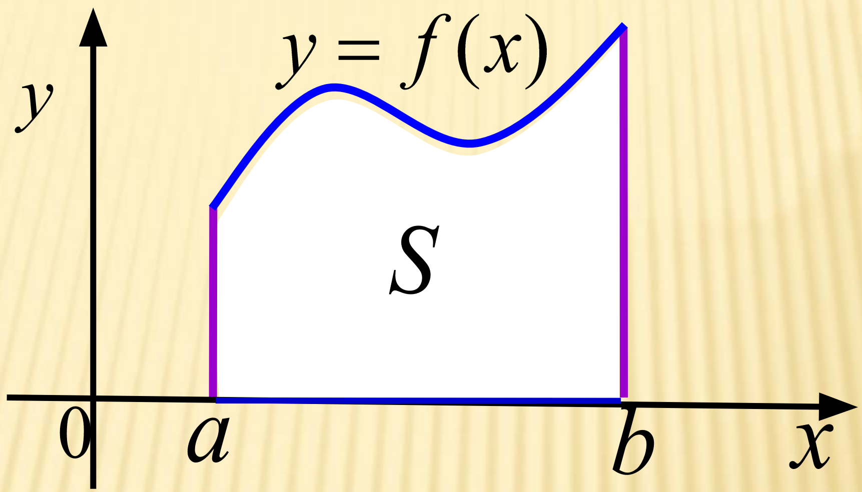




$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\widetilde{x}_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Площадь криволинейной трапеции.



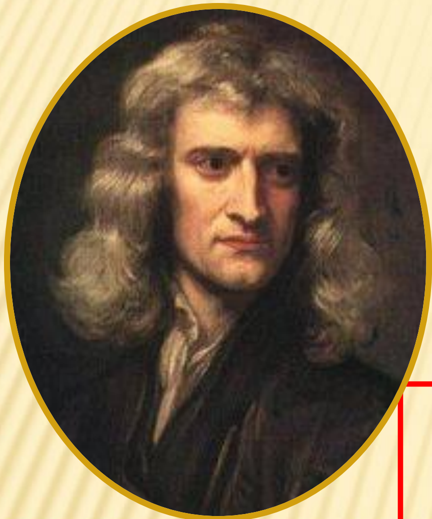
$$\boxed{S = F(b) - F(a)}$$

где ***F(x)*** – любая первообразная функции ***f(x)***.

Формула Ньютона-Лейбница

$$S = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



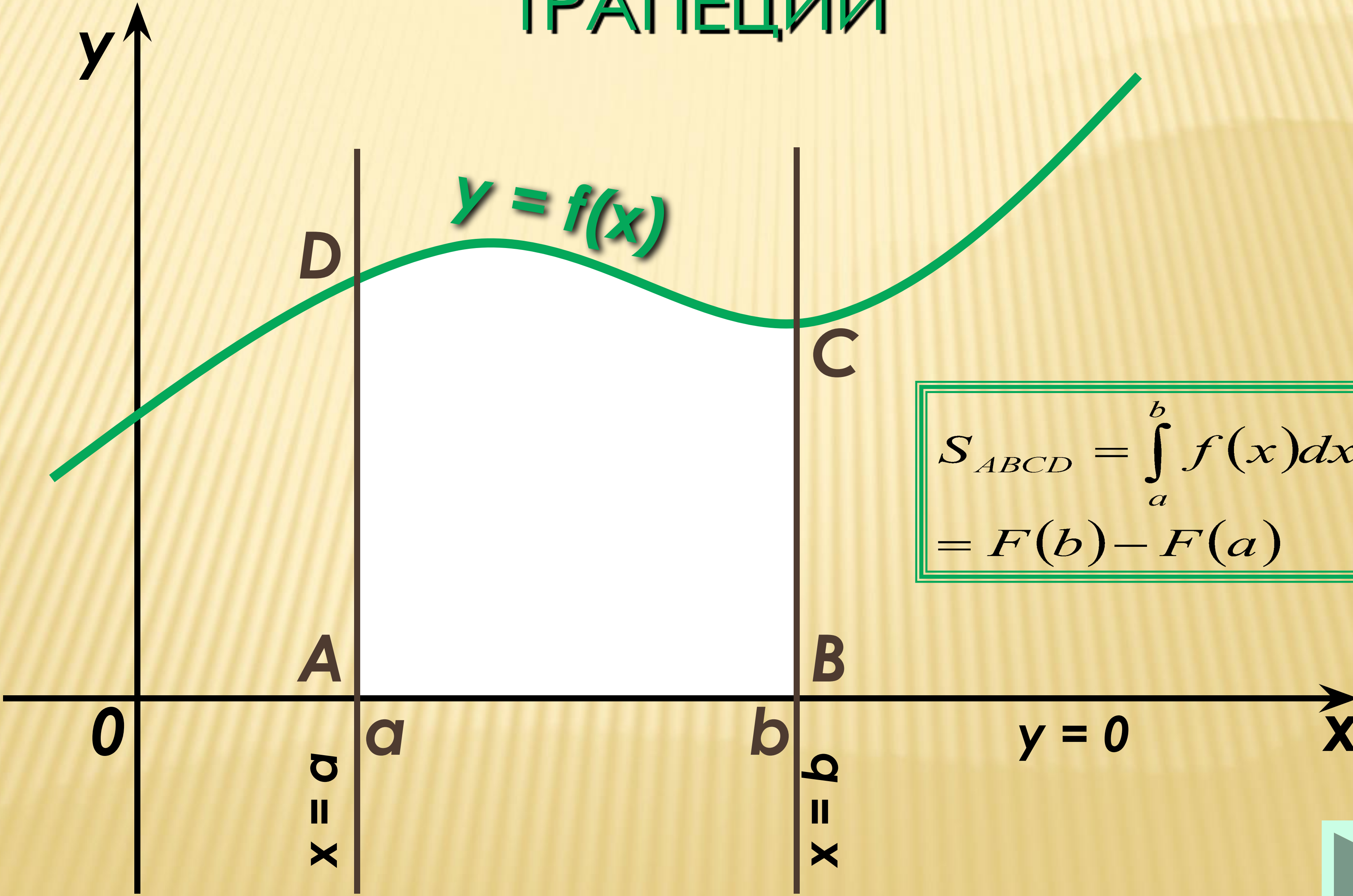
1643—1727

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

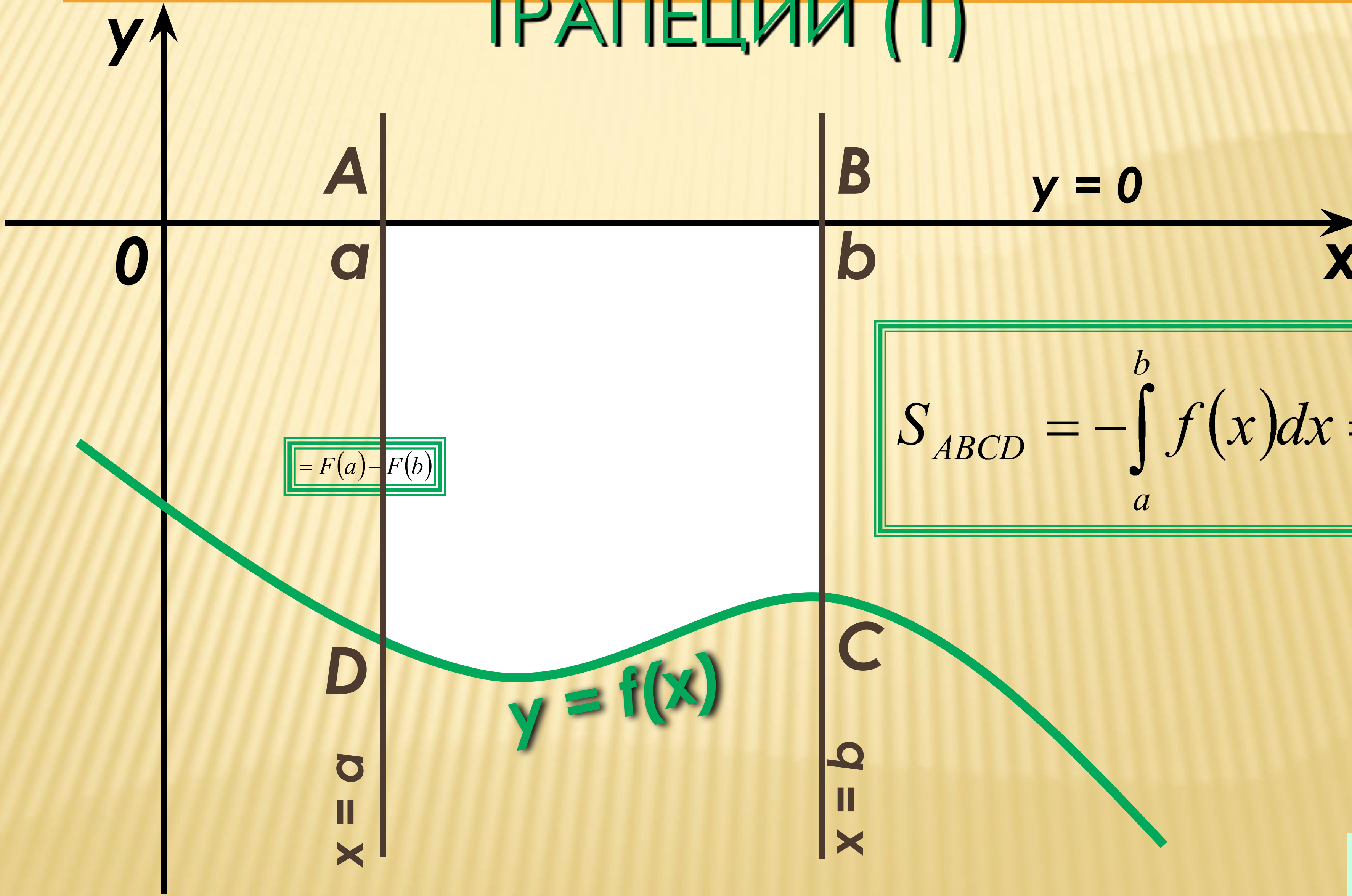
1646—1716

ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ



$$S_{ABCD}=\int_a^b f(x)dx=$$
$$=F(b)-F(a)$$

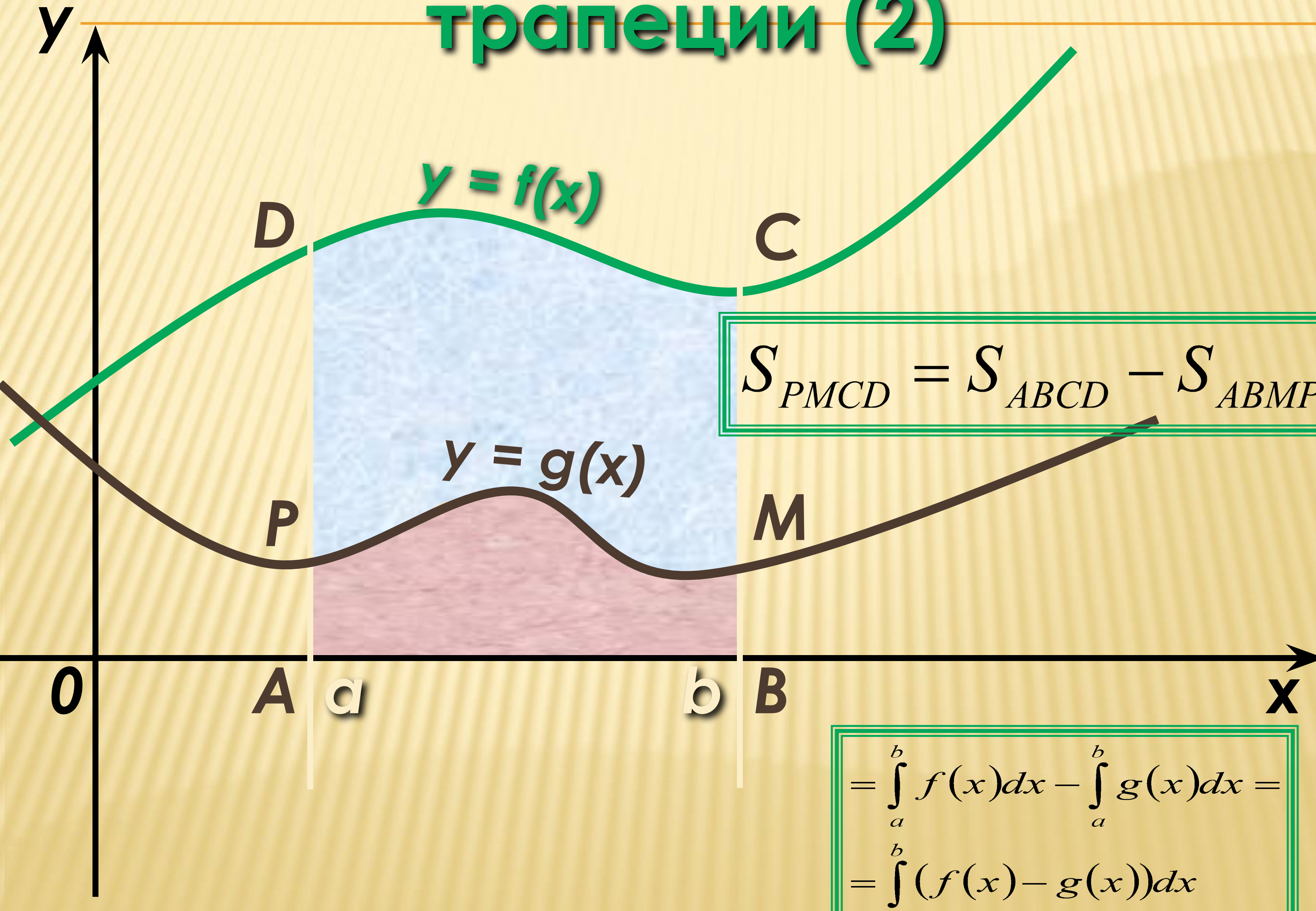
ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ (1)



$$S_{ABCD} = -\int_a^b f(x)dx =$$

$$= F(a) - F(b)$$

Площадь криволинейной трапеции (2)

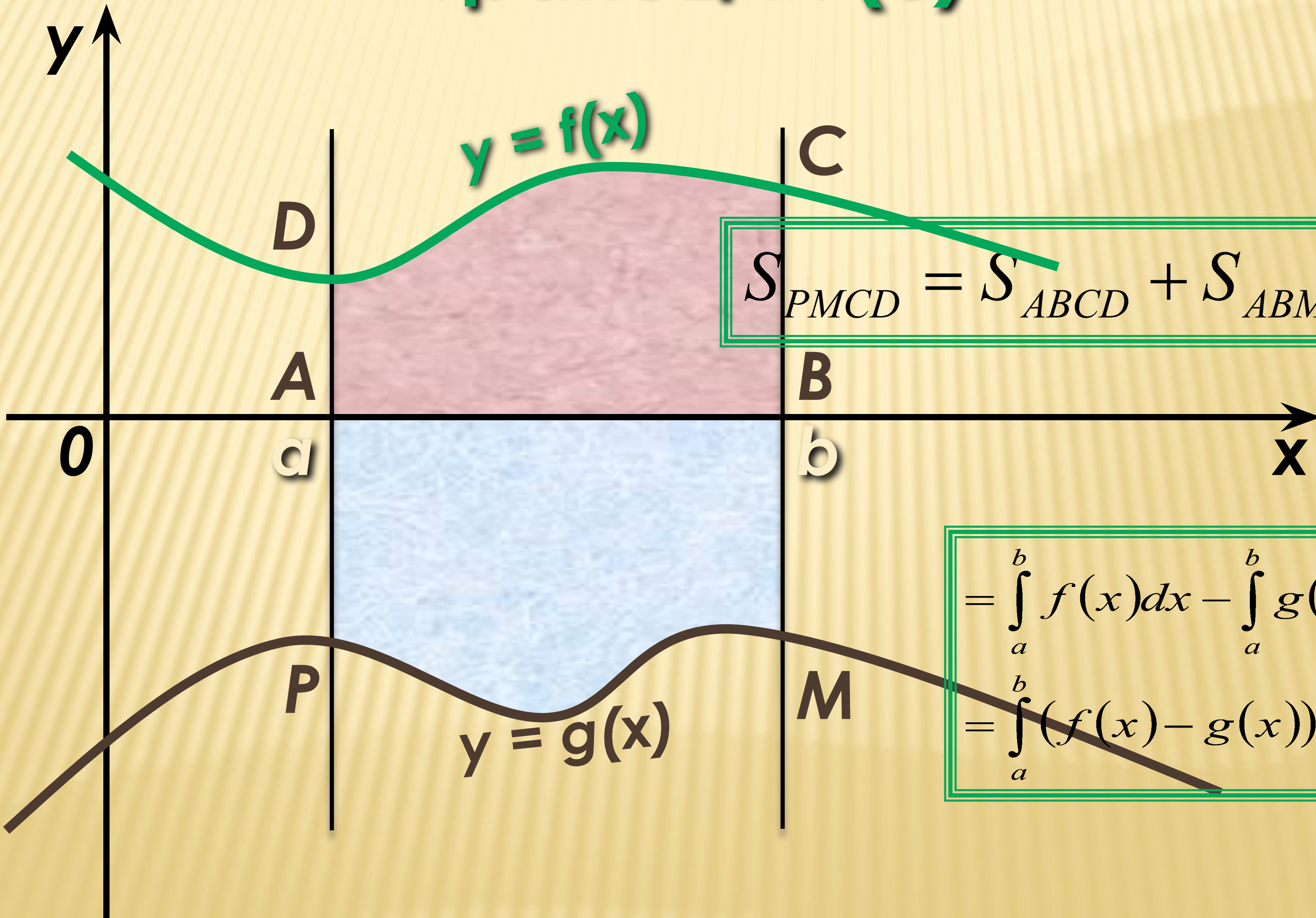


$$S_{PMCD} = S_{ABCD} - S_{ABMP} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

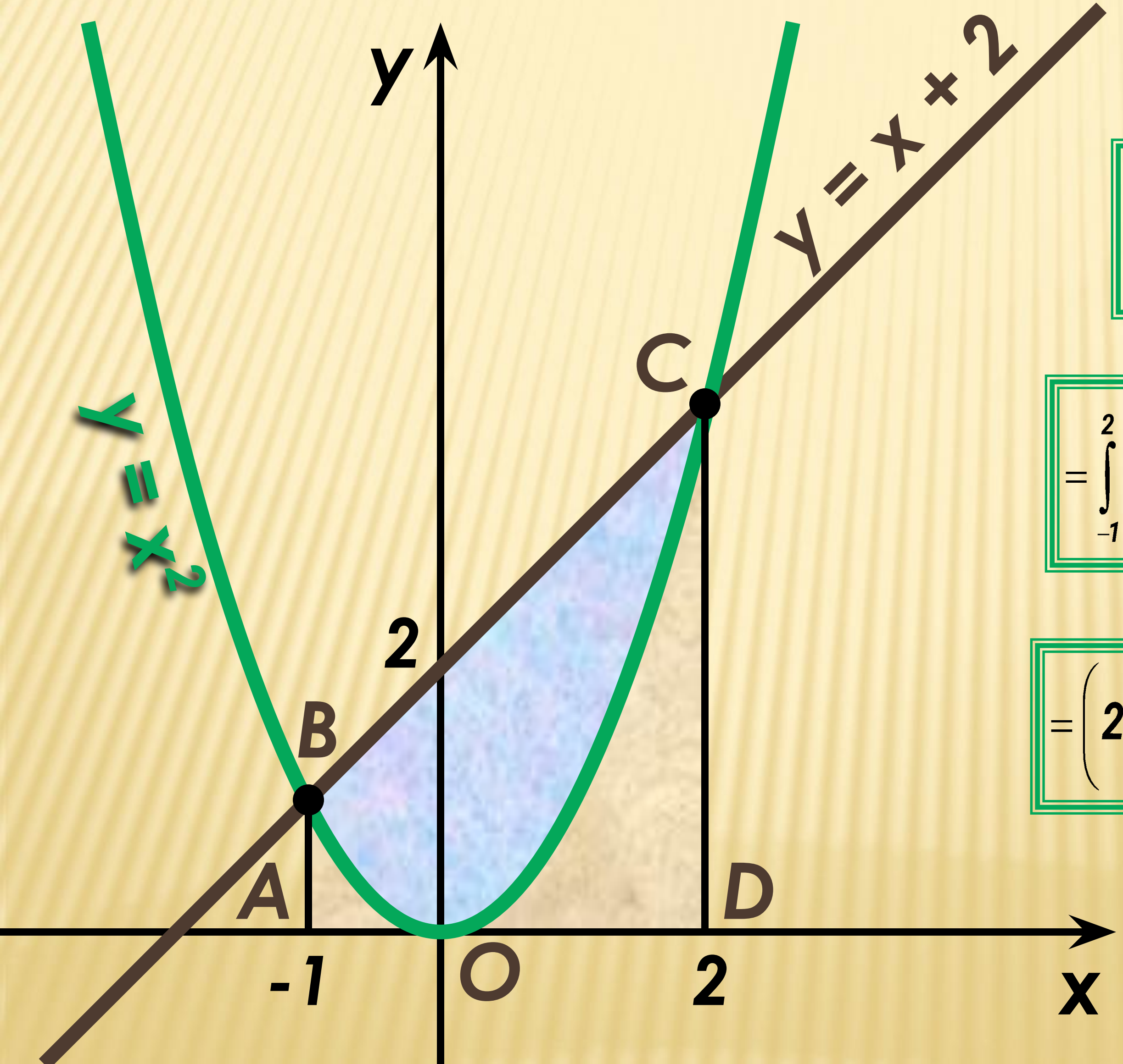
Площадь криволинейной трапеции (3)



$$S_{PMCD} = S_{ABCD} + S_{ABMP} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

ПРИМЕР 1: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.

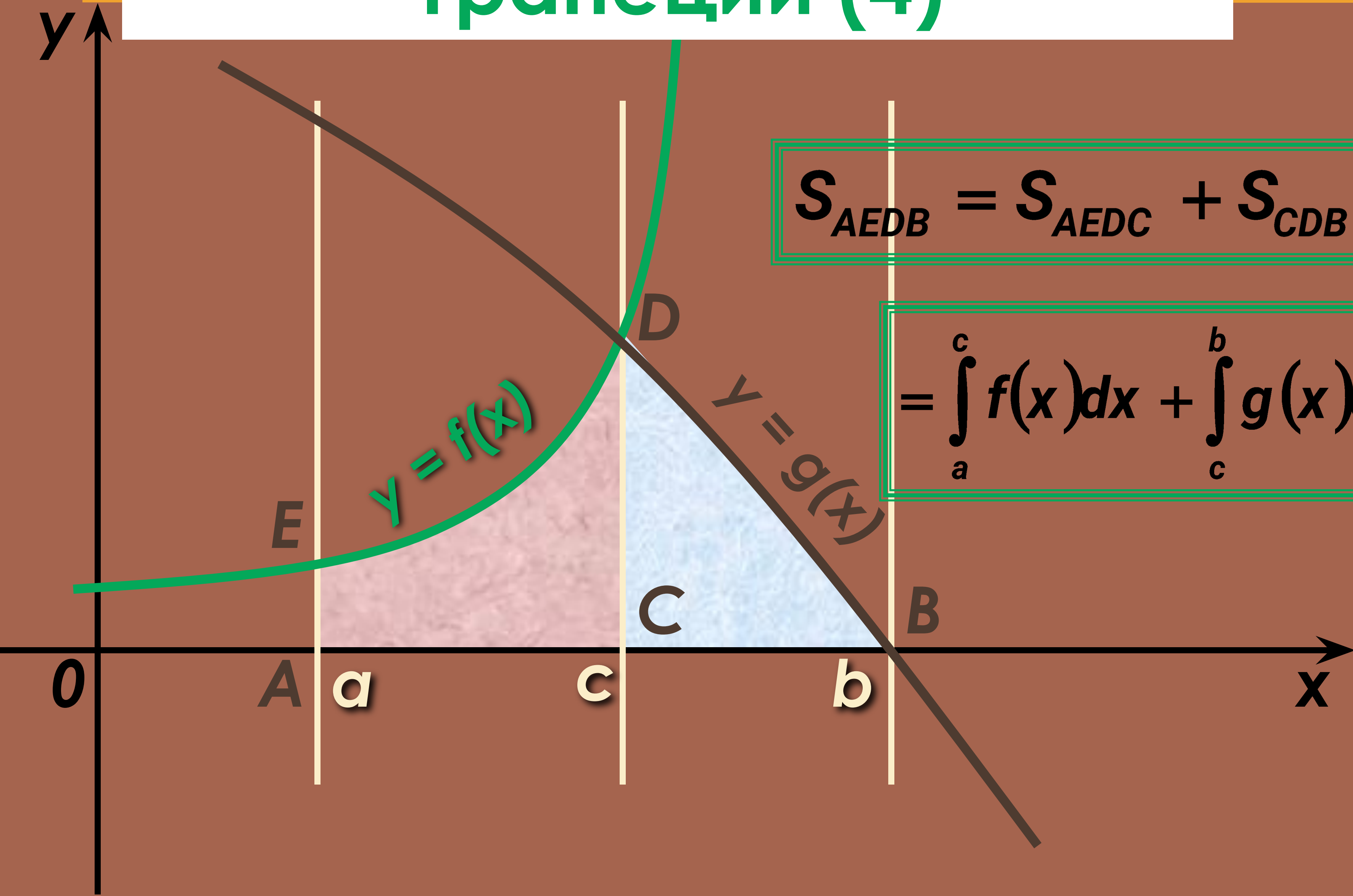


$$S = \int_{-1}^{2} (x+2)\,dx - \int_{-1}^{2} (x^2)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 5 - \frac{1}{2} = 4{,}5$$

Площадь криволинейной трапеции (4)



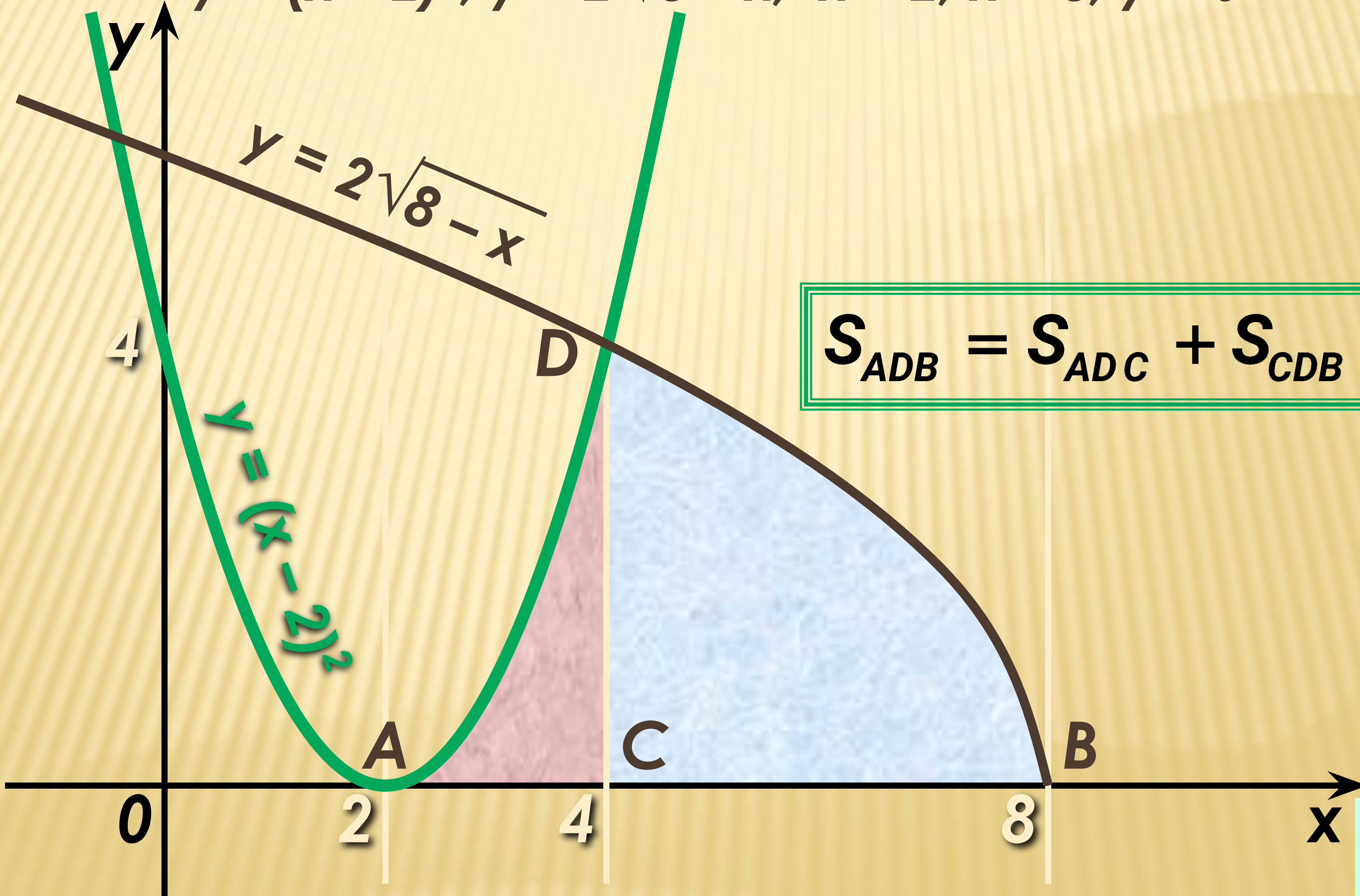
$$S_{AEDB} = S_{AEDC} + S_{CDB} =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

Пример 2:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = (x-2)^2,\ y = 2\sqrt{8-x},\ \ x = 2,\ x = 8,\ y = 0$$



$$S_{ADB} = S_{ADC} + S_{CDB} =$$

Пример 2:

вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = (x-2)^2,\ y = 2\sqrt{8-x},\ x = 2,\ x = 8,\ y = 0$

$$= \int_2^4 (x-2)^2\,dx + \int_4^8 2\sqrt{8-x}\,dx = \left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_2^4 - \left.\frac{4(8-x)\sqrt{8-x}}{3}\right|_4^8 =$$

$$= \left(\frac{(4-2)^3}{3} - \frac{(2-2)^3}{3}\right) - \left(\frac{4(8-8)\sqrt{8-8}}{3} - \frac{4(8-4)\sqrt{8-4}}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,

и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

Вычисление определенного интеграла

$$\int_1^2 \left(3x^2 - 2x + 1\right)dx = \left(x^3 - x^2 + x\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(2^3 - 2^2 + 2\right) - \left(1^3 - 1^2 + 1\right) = 6 - 1 = 5$$

$$\int_3^{10} \left(\sqrt{x+6}\right)dx = \frac{2(x+6)\sqrt{x+6}}{3}\Bigg|_3^{10} =$$

$$= \frac{2(10+6)\sqrt{10+6}}{3} - \frac{2(3+6)\sqrt{3+6}}{3} = \frac{80}{3} - 18 = 7\frac{2}{3}$$