ВУНЦ ВВС «ВВА» (филиал, г. Краснодар)

Кафедра физики и электротехники

Учебная дисциплина

Электротехника и электроника

Тема 2/1

Цепи синусоидального тока

Лекция № 3

Учебные вопросы:

1. Электрические цепи при гармоническом воздействии. Гармонические колебания. Основные понятия и определения. Действующее и среднее значения гармонической функции

2. Способы представления гармонических колебаний

3. Гармонические колебания в пассивных элементах электрической цепи. Методы анализа линейных электрических цепей с двуполюсными элементами

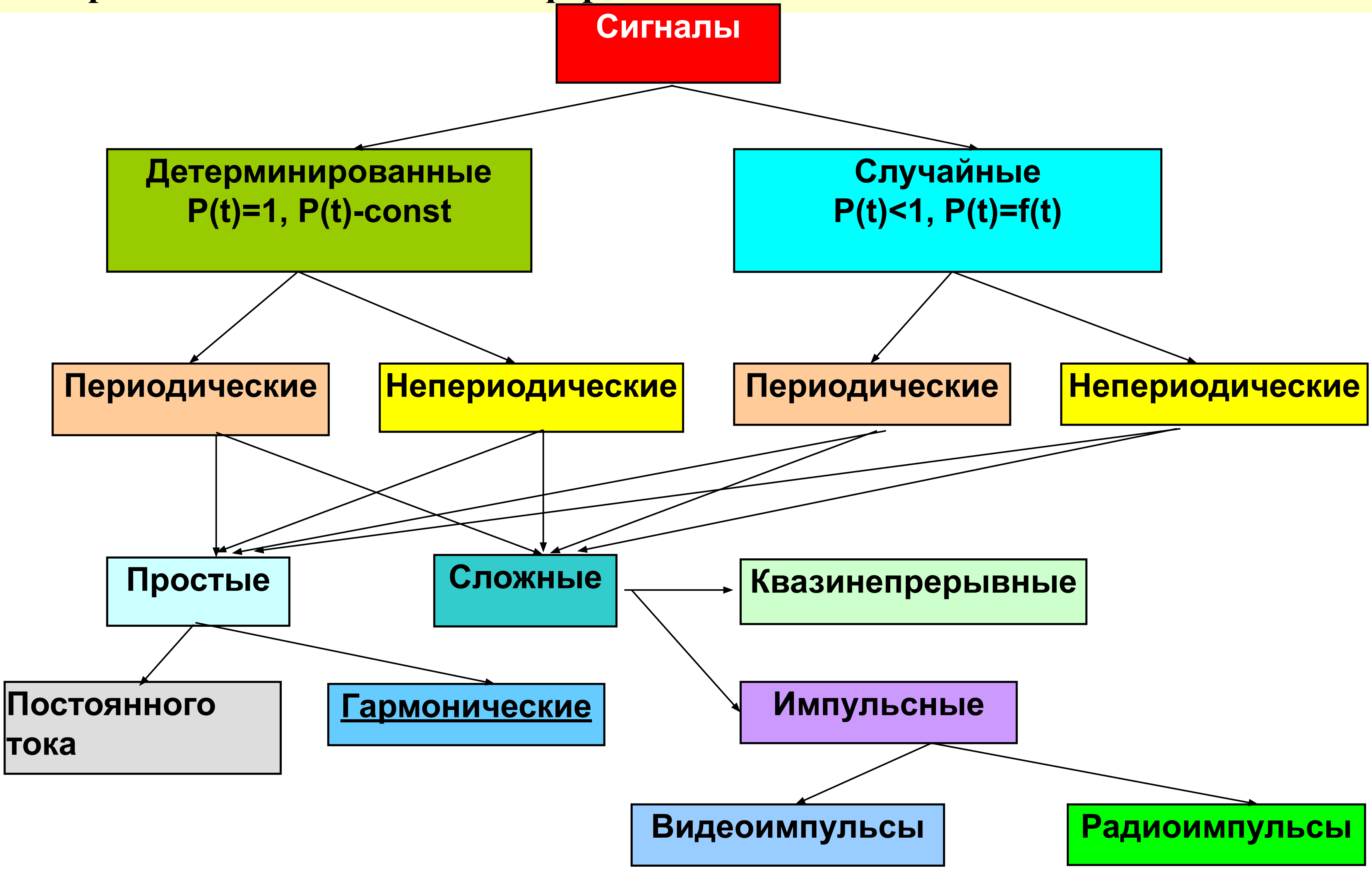
4*. **Мощность электрической цепи переменного тока**

Литература:

Бухонский М.И., Найдёнов С.В., Тельнов Г.В. Электротехника и электроника. Аналоговая схемотехника. Часть 1: Учебное пособие.– Краснодар: Филиал ВУНЦ ВВС «ВВА имени проф. Н.Е.Жуковского и Ю.А.Гагарина» (г. Краснодар), 2011.– с. 53-71.

1. Электрические цепи при гармоническом воздействии. Гармонические колебания. Основные понятия и определения. Действующее и среднее значения гармонической функции

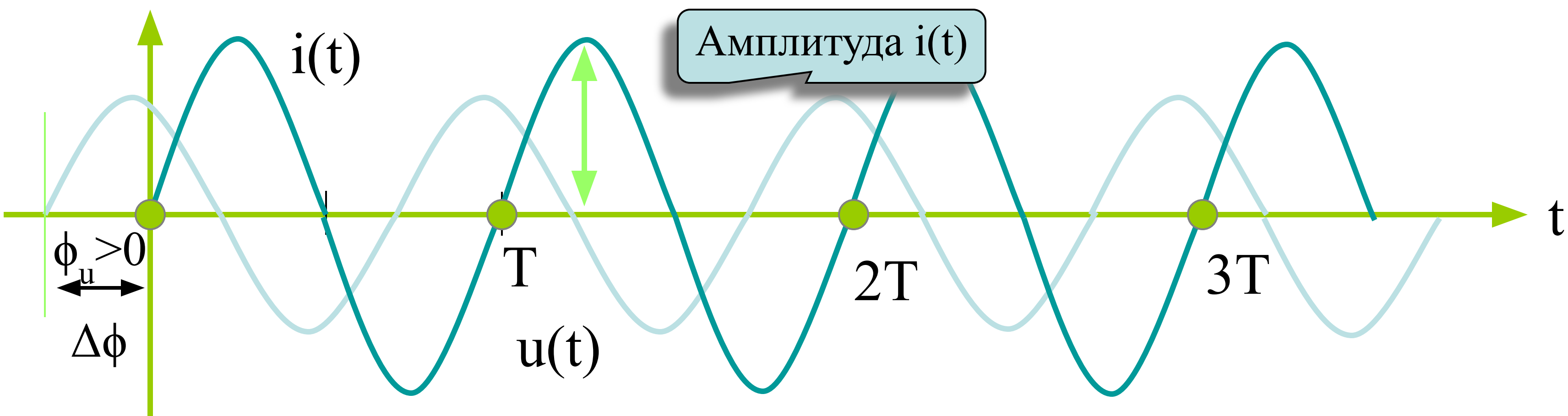
Сигналы - физические процессы, параметры которых содержат информацию: используются постоянные токи (напряжения), их колебания или импульсы, которые рассматриваются как носители информации



Гармонические колебания широко используются в электротехнике и электронике для передачи электрической энергии и сигналов, а также могут применяться в качестве простейшего испытательного сигнала.

Гармоническим колебанием называют колебания, изменяющиеся по закону синуса или косинуса. Далее рассматривается только синусоидальный закон

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i) \quad \Leftrightarrow \quad u(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$



Параметры гармонических колебаний

I_m, U_m – амплитуда тока или напряжения $(I_m, U_m) = \text{const}$

$(\omega t + \phi_I), (\omega t + \phi_u)$ – полная фаза (фазовый угол), фаза, рад

$$f = \frac{1}{T}, Гц$$

$$\omega = \frac{d(\omega \cdot t + \varphi_u)}{dt}$$

Угловая частота, рад/с. $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T} \Leftrightarrow \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

При совместном рассмотрении двух гармонических колебаний одинаковой частоты разность их фаз, равную разности их начальных фаз обычно называют сдвигом фаз и обозначают Δϕ или ϕ.

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

$$\Delta\varphi = \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$\Delta\varphi = \varphi = 0$ — Колебания синфазные (совпадают по фазе)

$\Delta\varphi = \varphi = \pm\pi$ — Колебания противофазные

$\Delta\varphi = \varphi = \pm{}^{\pi}/_{2}$ — Колебания находятся в квадратуре

$$\Delta\varphi = \varphi > 0, \rightarrow \text{т.е.} \rightarrow \varphi_u > \varphi_i$$

Напряжение опережает ток по фазе

Напряжение отстает от тока по фазе

$$\Delta\varphi = \varphi < 0, \rightarrow \text{т.е.} \rightarrow \varphi_u < \varphi_i$$

Для питания различных электроэнергетических установок в России принята промышленная частота f = 50 Гц. В качестве источников гармонических колебаний промышленной частоты используются электромашинные генераторы

$$f = p_p \cdot n / 60$$

где p_p число пар полюсов ротора, n – (об.мин) – скорость вращения ротора.

В практической электротехнике для оценки прежде всего энергетических возможностей переменного тока вводятся понятия **действующего** (среднеквадратического) и **среднего значения** переменного тока за период.

Определение 1. ***Действующим (его также называют эффективным или среднеквадратическим) значением периодического тока i(t) называют такой постоянный ток I, который в одном и том же сопротивлении R за время одного периода T тока i(t) выделяет равное с переменным током количества тепла***

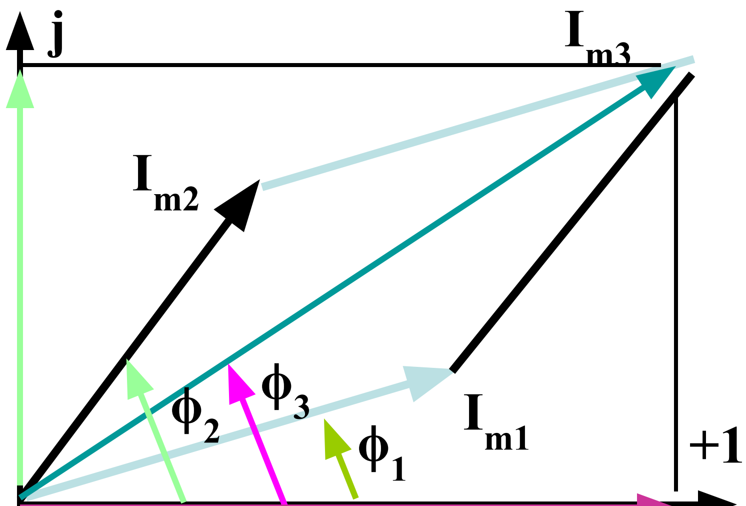
$$\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}} \quad \boxed{I = 0{,}707 I_m} \quad \boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}} \quad \boxed{U = 0{,}707 U_m} \quad \boxed{E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}}$$

Определение 2. Средним значением I_{CP} периодического тока *i(t)* называют среднее значение тока за положительный полупериод, совпадающее со средним значением по модулю.

$$\boxed{I_{CP} = 0{,}637 \cdot I_m} \quad \boxed{U_{CP} = 0{,}637 \cdot U_m} \quad \boxed{E_{CP} = 0{,}637 \cdot E_m}$$

2. Способы представления гармонических колебаний.

Гармонические колебания можно представить различными способами: функциями времени (*временное представление*), вращающимися векторами (*векторное представление*), комплексными числами, амплитудными и фазовыми спектрами (*спектральное представление*).

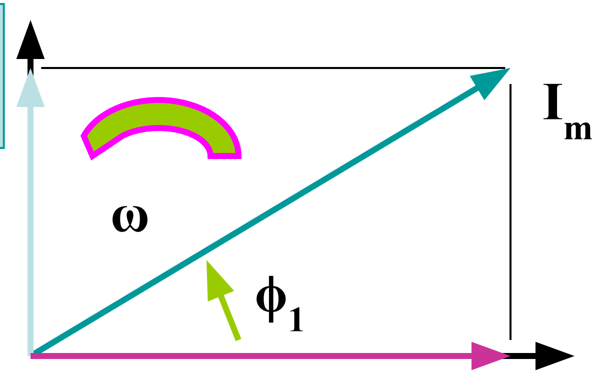


$$I_{m3} = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2I_{m1}I_{m2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

$$\varphi_3 = arctg\,\frac{I_{m1}\sin\varphi_1 + I_{m2}\sin\varphi_2}{I_{m1}\cos\varphi_1 + I_{m2}\cos\varphi}$$

Наиболее распространенными являются представление гармонических колебаний с помощью **комплексных чисел**

$$\mathrm{Im}\left\{\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}\right\}$$



$$i(t) = I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) + jI_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$$

Комплексная амплитуда тока

$$\mathrm{Re}\left\{\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

Действительная часть

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

$$\dot{U} = x + jy = r[\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)]$$

$$x = r\cos(\varphi)$$

$$y = r\sin(\varphi)$$

Показательная (экспоненциальная) форма записи комплексных чисел

$$\dot{U} = a + jb = r \cdot e^{j\varphi} = r \cdot \exp(j\varphi)$$

$$r = \sqrt{a^2 + jb^2} \geq 0$$

$$\varphi = arctg\frac{b}{a}$$

$$\dot{u}(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi) + jU_m\sin(\omega t + \varphi) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = U_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}$$

Комплексное действующее значение

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi} = U \cdot e^{j\varphi}$$

Комплексная форма записи *законов Ома и Кирхгофа*

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\dot{Z}}; \dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_{mk} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{Z}_k \cdot \dot{I}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k$$

Пример: Комплексная амплитуда напряжения

$$\dot{U}_m = -100 + j100$$

В,

частота f = 1кГц. Записать выражение для мгновенного напряжения.

Решение. Угловая частота

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^3 = 6280$$

рад/с,

амплитуда

$$U_m = \sqrt{(-100)^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}$$

В;

tgφ = 100/(-100) = - 1; т. к. действительная часть комплексной амплитуды отрицательная, а мнимая часть положительная, то вектор во второй четверти и, следовательно, φ =3π/4.

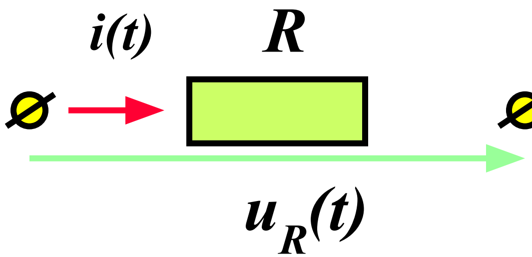
Таким образом, мгновенное значение напряжения

$$u(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(6280t + 3\pi / 4)$$

В.

3. Гармонические колебания в пассивных элементах электрической цепи.

3.1 Резистивный элемент и его характеристики



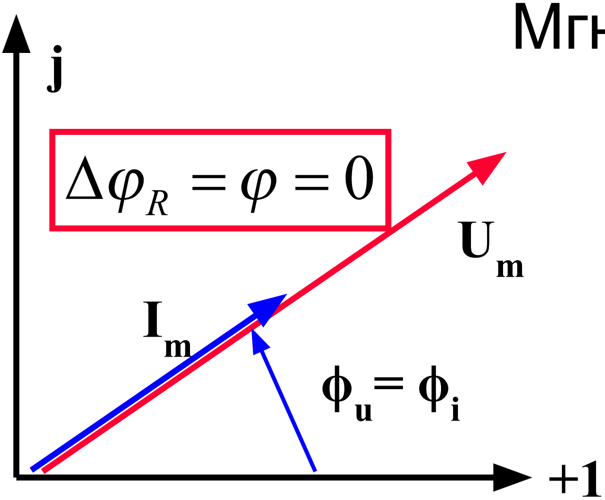
Пусть через резистор протекает ток *i(t)*:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \dot{I}_m e^{j\omega t}$$

$$u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\dot{u}(t) = R\dot{I}_m e^{j\omega t} = \dot{U}_{mR} e^{j\omega t} = U_{mR} e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = U_{mR} e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}$$

комплексная форма записи



$$\boxed{\Delta\varphi_R = \varphi = 0}$$

Колебания синфазные

$$\boxed{U_{mR} = R \cdot I_m} \qquad \boxed{U_R = R \cdot I}$$

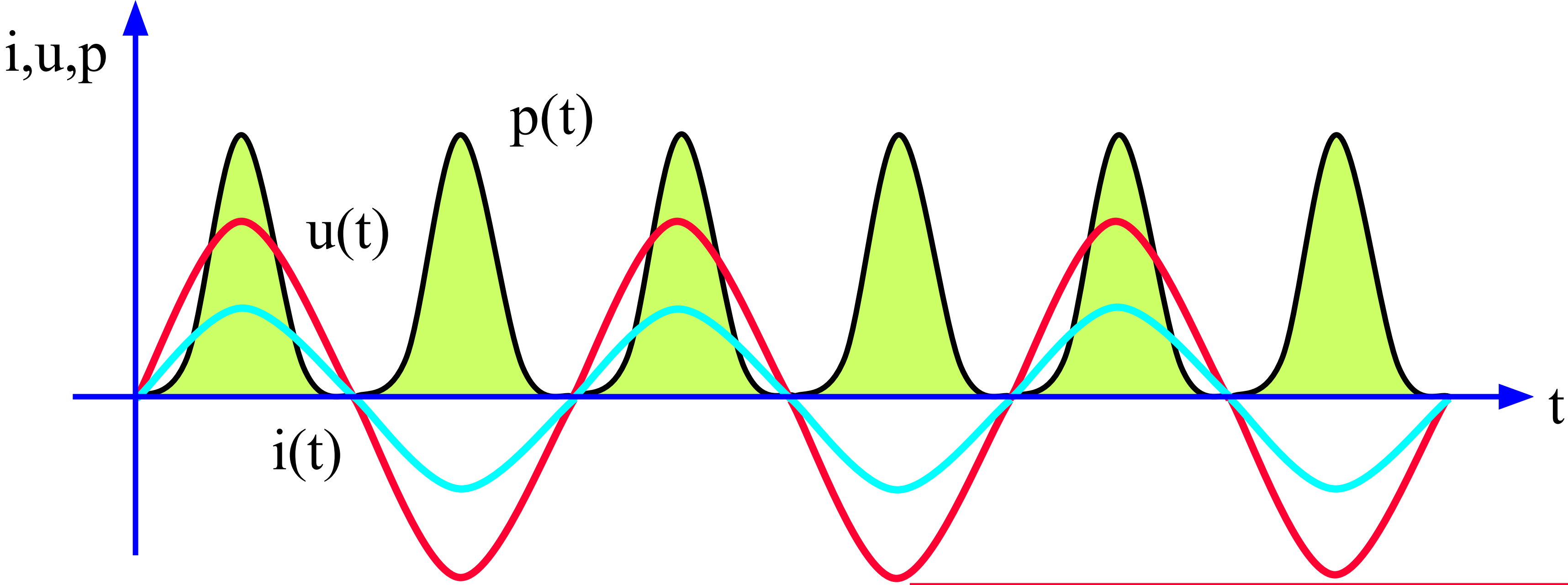
Мгновенная мощность колебания в резисторе

$$p(t) = u \cdot i = RI_m \sin(\omega t + \varphi_i) \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_i) =$$

$$= RI_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} I_m \sin^2(\omega t + \varphi_i) =$$

$$= \frac{2U_{mR} I_m}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \sin^2(\omega t + \varphi_i) = 2U_R I \ \sin^2(\omega t + \varphi_i) =$$

$$= U_R \cdot I\left[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_i)\right] \geq 0$$



Средняя мощность колебаний

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R \geq 0$$

Резистор – активное сопротивление

$$p_R(t) = U \cdot I \cdot (1 - \cos 2\omega t)$$

$$P = U \cdot I$$

$$Q = 0$$

$$S = P$$

$$R = \frac{P}{I^2}$$

$$Z_R = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m \cdot e^{j\varphi_u}}{\dfrac{U_m \cdot e^{j\varphi_u}}{R}} = R$$

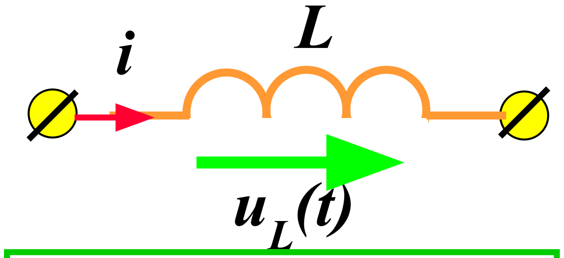
$$\Delta\varphi_R = \varphi = 0$$

$$Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{R} = G$$

$$\mathrm{Re}[Y] = R$$

$$\mathrm{Im}[Y] = 0$$

3.2 Индуктивный элемент и его характеристики



$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d(I_m \sin(\omega t + \varphi_i))}{dt} = \omega \cdot L \cdot I_m \cos(\omega t + \varphi_i) =$$

$$= U_{mL}\cos(\omega t + \varphi_i) = U_{mL}\sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) = U_{mL}\sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}; \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

$$U_{mL} = \omega \cdot L \cdot I_m$$

$$X_L(\omega) = \omega \cdot L$$

$$\dot{Z}_L = \frac{\dot{U}_{mL}}{\dot{I}_m} = \frac{\omega \cdot L \cdot I_m \cdot e^{j(\varphi_i + 90^\circ)}}{I_m \cdot e^{j\varphi_i}} = \omega \cdot L \cdot e^{j90^\circ} = j\omega \cdot L$$

Комплексное сопротивление *L* -элемента

$$Z_L(j\omega) = j \cdot \omega \cdot L = j \cdot X_L$$

$$\mathrm{Re}[Z_L] = 0$$

$$\mathrm{Im}[Z_L] = \omega \cdot L = X_L$$

Комплексная проводимость *L* -элемента

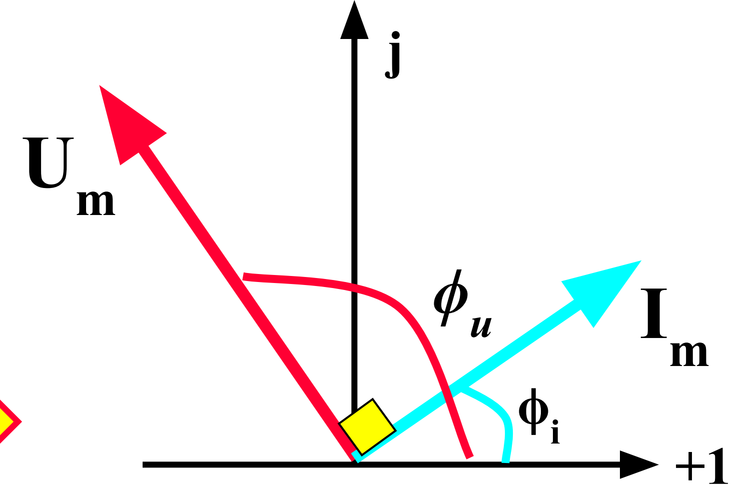
$$\dot{Y}_L = \frac{1}{\dot{Z}_L} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} = -j\frac{1}{\omega \cdot L}$$

$$\mathrm{Re}[Y_L] = 0$$

$$\mathrm{Im}[Y_L] = -\frac{1}{\omega \cdot L} = b_L$$

Напряжение на индуктивности имеет форму гармонического колебания и опережает по фазе колебания тока на угол + π/2.

Колебания тока и напряжения находятся в квадратуре



Мгновенная мощность изменяется во времени

$$p_L = u_L \cdot i = U_m \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) I_m \sin(\omega t + \varphi_i) =$$

$$= \frac{1}{2} I_m U_m \left[\cos(\omega t + \varphi_i - \omega t - \varphi_i - \frac{\pi}{2}) \right] + \frac{1}{2} I_m U_m \left[-\cos(\omega t + \varphi_i + \omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) \right] =$$

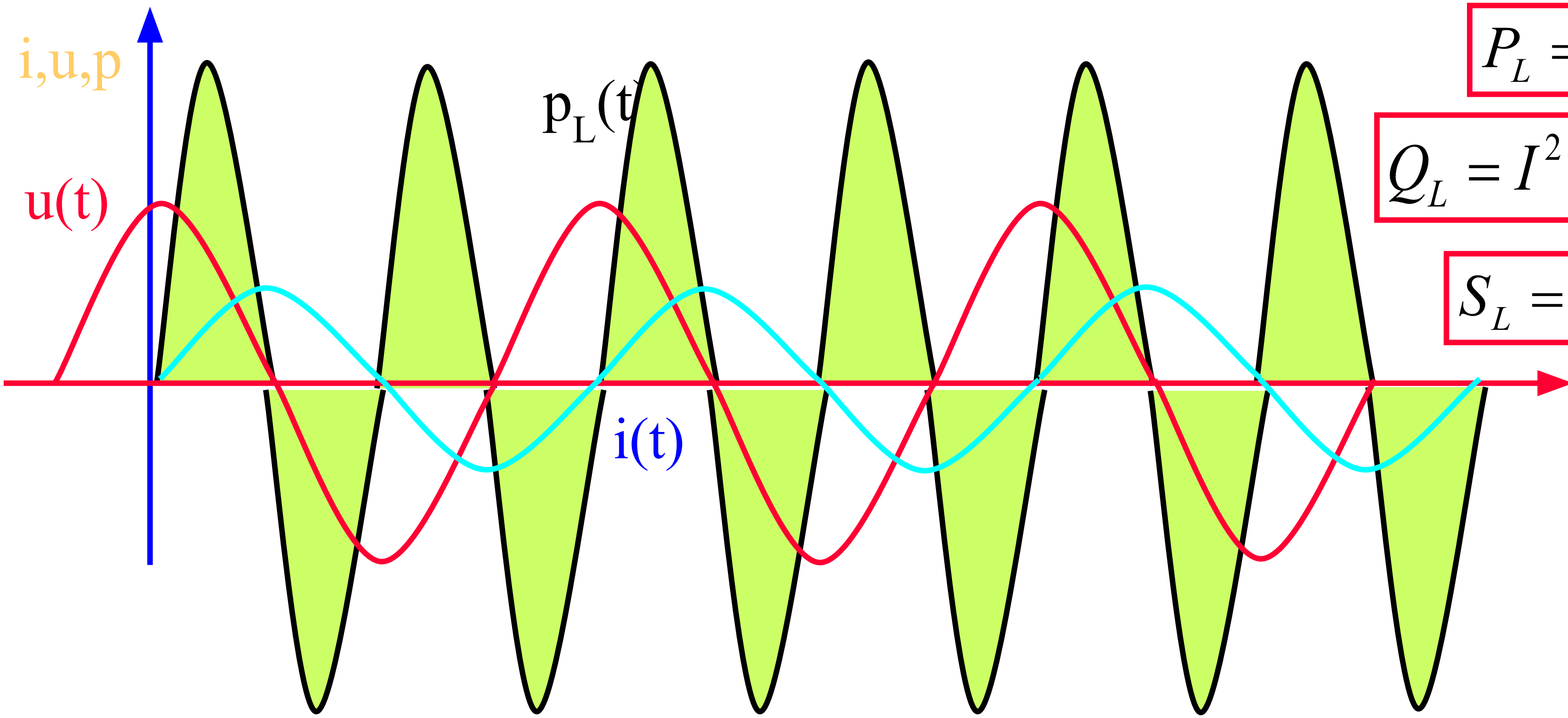
$$= \frac{1}{2} I_m U_m \left[-\cos(2\omega t + 2\varphi_i + \frac{\pi}{2}) \right] = \frac{1}{2} I_m U_m \left[\sin(2\omega t + 2\varphi_i) \right] = \underline{\underline{IU \sin 2(\omega t + \varphi_i)}}$$

по синусоидальному закону с частотой в два раза большей частоты тока

Мгновенная мощность <u>положительна</u> при нарастании по абсолютному значению тока в индуктивном элементе → 0<t<T/4 (накопление энергии в магнитном поле катушки индуктивности).

Энергия поступающая в индуктивный элемент за четверть периода (p>0)

$$W_L = \int_0^{T/4} p_L(t)dt = \int_0^{T/4} u_L \cdot idt = \int_0^{T/4} L\frac{di}{dt}idt = \int_0^{T/4} L \cdot i \cdot di = \frac{LI_m^2}{2}$$



$$P_L = 0$$

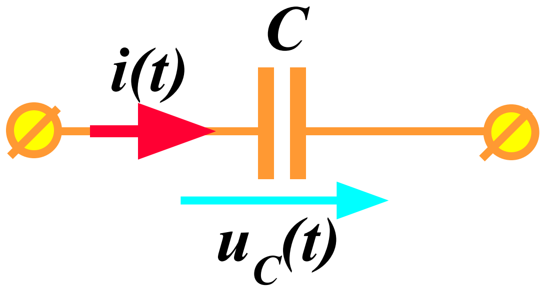
$$Q_L = I^2 \cdot X_L$$

$$S_L = Q_L$$

Средняя за период мощность в индуктивном элементе

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p_L(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\left[I_m U_m \sin(2\omega t + 2\varphi_i)\right]dt = 0$$

3.3 Емкостной элемент и его характеристики



$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int i dt = \frac{1}{C}\int I_m \sin(\omega t + \varphi_i) dt =$$

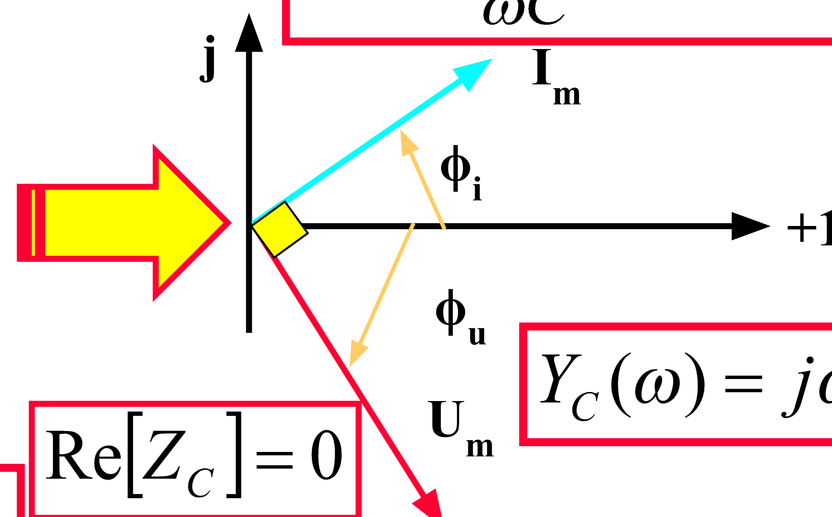
$$= \frac{-I_m}{\omega C}\cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{-I_m}{\omega C}\sin(-\omega t - \varphi_i + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= U_{mC}\sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) = U_{mC}\sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\varphi_u = \varphi_i - \frac{\pi}{2}; \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$

$$U_{mC} = \frac{I_m}{\omega C} = X_C(\omega)\cdot I_m$$

Напряжение на емкостном элементе имеет форму гармонического колебания и отстает по фазе от колебания тока на угол *π/2*.



$$Y_C(\omega) = j\omega C$$

$$\mathrm{Re}[Z_C] = 0$$

$$Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C$$

$$\mathrm{Im}[Z_C] = 1/\omega\cdot C = X_C$$

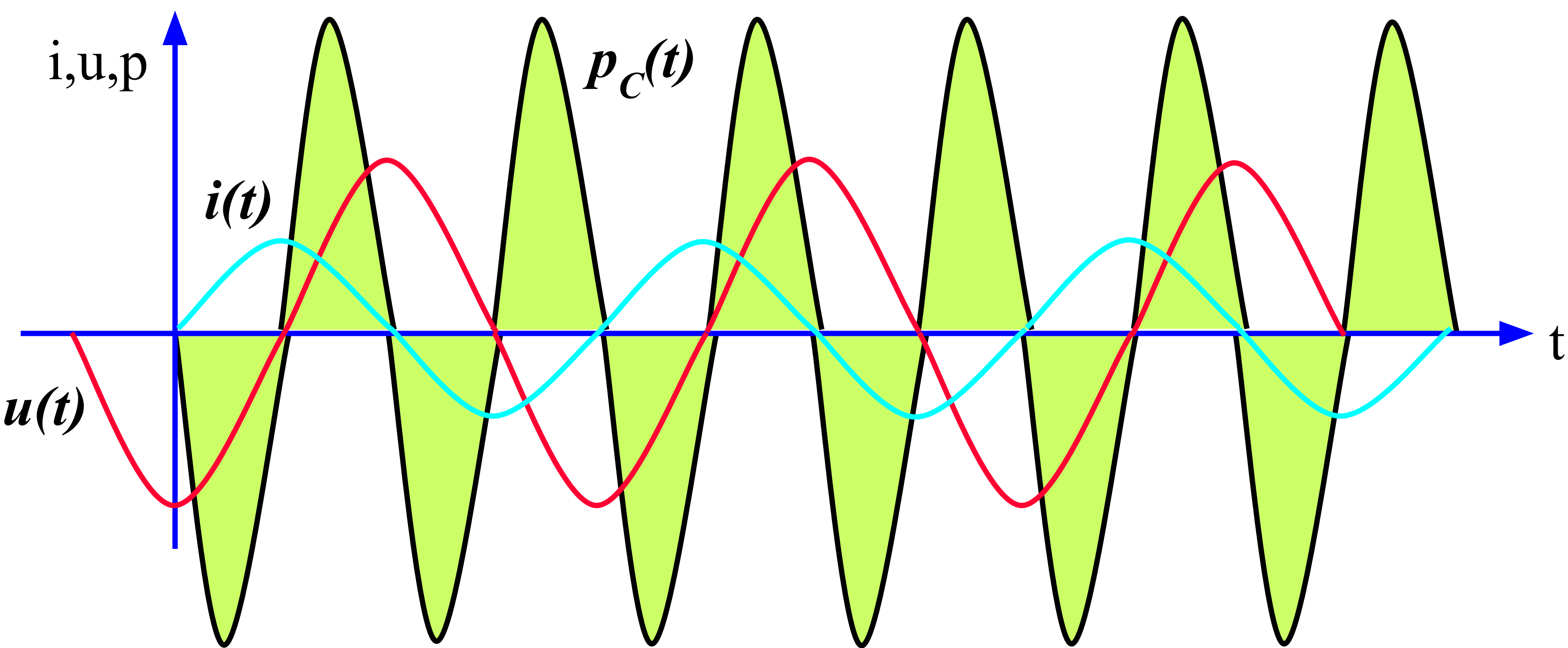
Мгновенная мощность изменяется во времени

$$p_C = u_C \cdot i = U_m \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) I_m \sin(\omega t + \varphi_i) =$$

$$= \frac{1}{2} I_m U_m \left[\cos(2\omega t + 2\varphi_i - \frac{\pi}{2}) \right] = -\frac{1}{2} I_m U_m \left[\sin(2\omega t + 2\varphi_i) \right] = \underline{-IU \sin 2(\omega t + \varphi_i)}$$

по синусоидальному закону с частотой в два раза большей частоты тока.

Мгновенная мощность <u>положительна</u> при нарастании по абсолютному значению напряжения на емкостном элементе → T/4<t<T/2 (накопление энергии в электрическом поле конденсатора).



Энергия поступающая в емкостной элемент за четверть периода ($p_C > 0$)

$$W_C = \int_{T/4}^{T/2} p_L(t)dt = \int_{T/4}^{T/2} u_C \cdot i dt = \int_{T/4}^{T/2} CU_m \frac{du}{dt} dt = \int_0^{U_m} C \cdot U_m \cdot du = \frac{CU_m^2}{2}$$

Средняя за период мощность в емкостном элементе

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p_C(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T -\frac{1}{2}\left[I_m U_m \sin(2\omega t + 2\varphi_i)\right]dt = 0$$

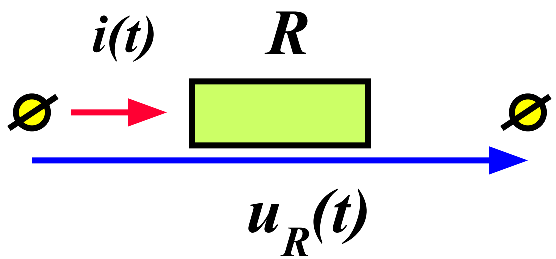
В чисто емкостной цепи, как и в чисто индуктивной цепи потери энергии отсутствуют. Вначале происходит заряд конденсатора, энергия при этом накапливается в электрическом поле конденсатора. Затем происходит разряд конденсатора, энергия, запасенная в электрическом поле, поступает к источнику.

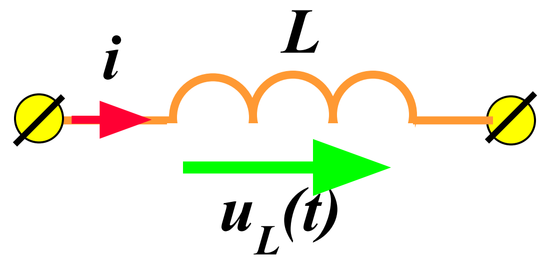
$$\boxed{P_C = 0}$$

$$\boxed{Q_C = -U \cdot I = -I^2 \cdot X_L}$$

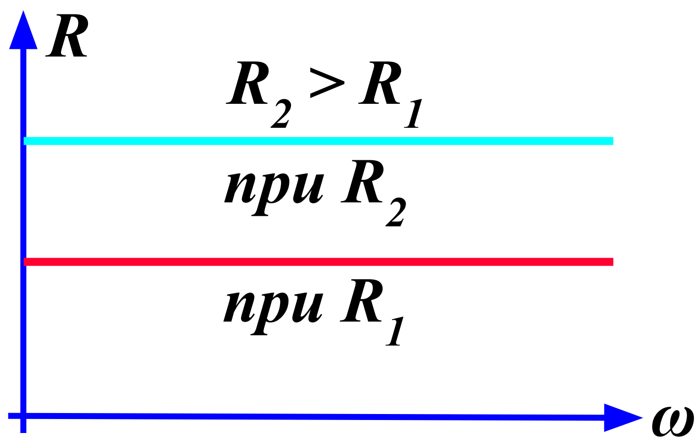
$$\boxed{S_L = |Q_L|}$$

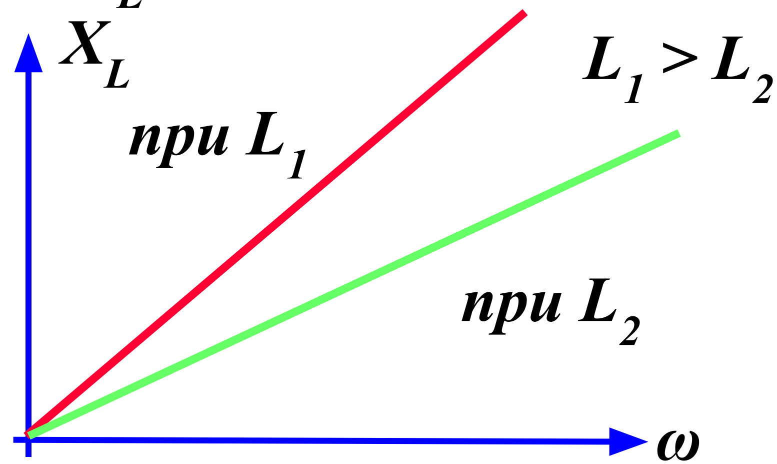
Зависимость сопротивлений пассивных элементов электрической цепи от частоты переменного тока

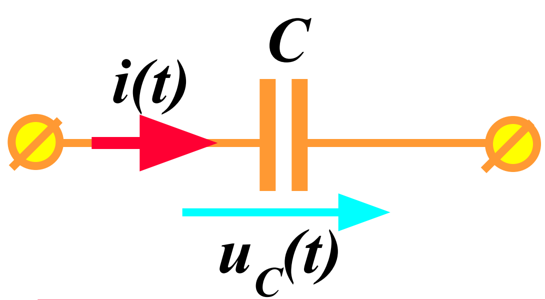




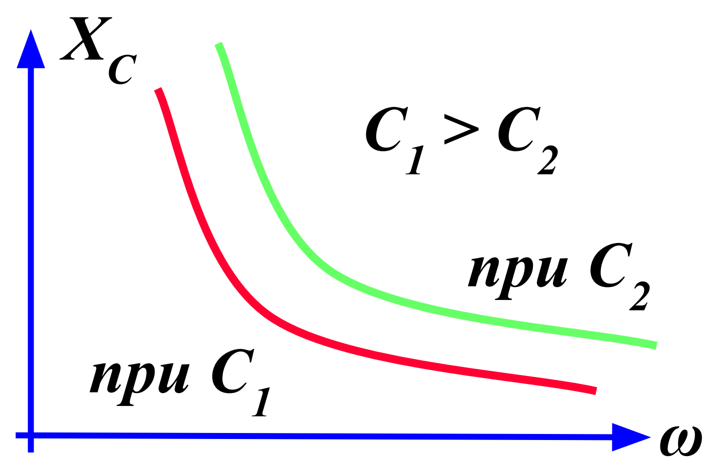
$$X_L = \omega \cdot L = X_L(\omega)$$



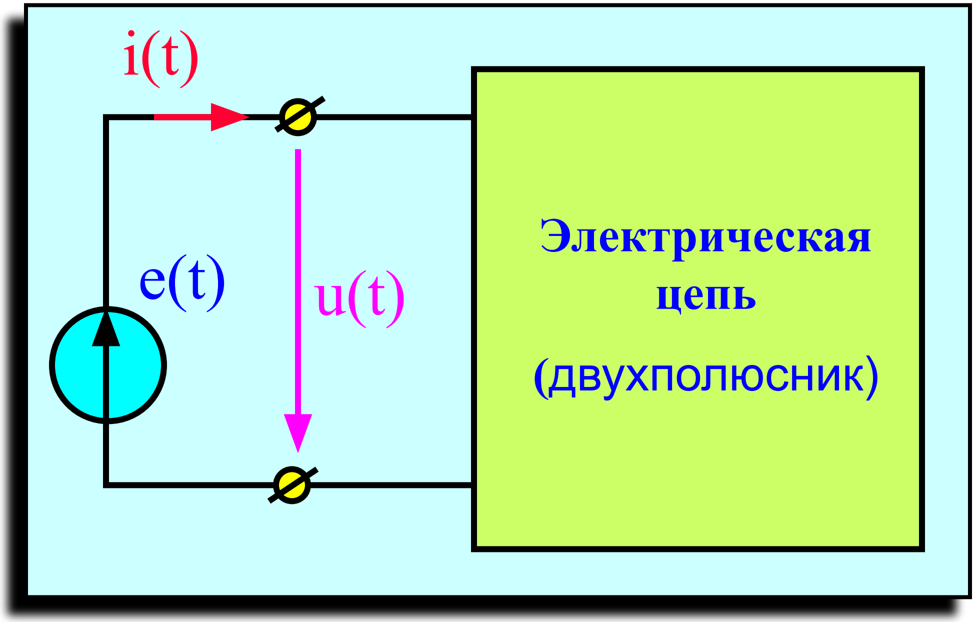




$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = X_C(\omega)$$



4. Мощность электрической цепи переменного тока



$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

$$P = P_{CP} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t) = U \cdot I \cdot \cos\varphi =$$
$$= U^2 \cdot G = I^2 \cdot R \geq 0 \rightarrow [Bm]$$

Активная мощность

$$S = U \cdot I = E \cdot I = I^2 \cdot Z = U \cdot I^* \rightarrow$$

$$\dot{S} = S \cdot e^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} \cdot e^{j\varphi} \rightarrow [B \cdot A]$$

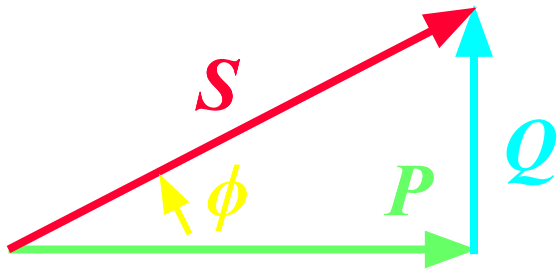
[Полная мощность]=[Активная мощность]+[Реактивная мощность]

Полная мощность <u>определяет эксплуатационные возможности</u> многих электротехнических устройств (*генераторов, трансформаторов, электрических машин*) для которых она указывается в качестве номинальной: $S_{НОМ}=U_{НОМ}I_{НОМ}$

Реактивная мощность может быть как положительной, так и отрицательной

Если электрическая цепь имеет <u>индуктивный характер</u>, Δφ > 0 и $P_Q > 0$, если – <u>емкостной характер</u>, то Δφ < 0 и $P_Q < 0$.

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} = \frac{P}{U\cdot I}}$$



$$\boxed{S = P + jQ}$$

$$\boxed{P = U\cdot I\cdot\cos\varphi}$$

$$\boxed{Q = U\cdot I\cdot\sin\varphi}$$

<u>Коэффициент мощности</u>

Чем больше ***cosϕ*** , тем больше степень использования полной мощности, тем <u>меньшим током</u> при заданном напряжении можно доставить к потребителю активную мощность

$$\boxed{I = \frac{P}{U\cdot\cos\varphi}}$$

От значения I → сечения подводящих энергию проводов, кабелей, линий передач. Потери энергии в подводящих проводах пропорциональны I^2

$$\boxed{P_{ПОТ} = I^2\cdot R_{ПОТ}} \Rightarrow \boxed{\Downarrow(ток)\rightarrow(\uparrow\uparrow\cos\varphi)}$$

Для увеличения ***cosϕ*** необходимо уменьшать реактивную мощность. **При Q = 0 имеем cosф = 1.** Так как **Q_L > 0 , а Q_C < 0**, то <u>для компенсации реактивной мощности параллельно нагрузке</u>, имеющей как правило, индуктивный характер, <u>подключают компенсирующую емкость</u>, значение которой выбирают из условия: ***$Q = Q_L + Q_C = 0$, т.е. $Q_L = - Q_C$***

Общие выводы

1. В режиме холостого хода, т.е. при $R_Н = \infty$ (разомкнутая электрическая цепь)

$$\eta_{XX} = \frac{R_H}{R_И + R_H} = 1$$

2. В режиме короткого замыкания, т.е. при $R_Н = 0$ (короткозамкнутая электрическая цепь)

$$\eta_{КЗ} = \frac{R_H}{R_И + R_H} = 0$$

3. В согласованном режиме работы $R_И = R_Н$

$$\eta_{CP} = 0{,}5$$

❖ В случае, когда необходимо обеспечить максимальную мощность независимо от экономических затрат (значения КПД) источники работают в согласованном режиме (устройства автоматики – *мощности управляющих сигналов малы*)

❖ Для силовых установок ($R_Н >> R_И$) → режим близкий к режиму холостого хода важен КПД