



*Тема:*

*«Свойства параллельных  
плоскостей»*



*Геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой.*

*В ней всегда присутствуют эти два неразрывно связанных элемента: наглядная картина и точная формулировка, строгий логический вывод.*

*Там, где нет одной из этих сторон, нет и подлинной геометрии.*

*А. Д. Александров*

**Тема урока:**

# **«Свойства параллельных плоскостей»**

**Цели урока:**

- познакомиться со свойствами параллельных плоскостей;
- доказать свойства параллельных плоскостей;
- научиться применять свойства параллельных плоскостей при решении задач.



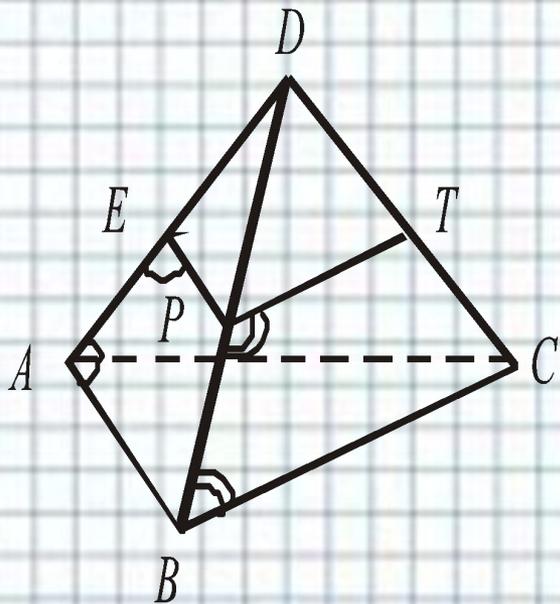
# УСТНАЯ РАБОТА

1. Верно ли, что если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны другой плоскости, то эти плоскости параллельны. **Верно**

2. Верно ли, что если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны. **Нет**

*Привести контрпример – пересекающиеся плоскости, проведенные через параллельные прямые.*

# УСТНАЯ РАБОТА



3. Дано:  $\sphericalangle DAB + \sphericalangle AEP = 180^\circ$ ,  
 $\sphericalangle DBC + \sphericalangle TPB = 180^\circ$ .

Доказать, что  $(ABC) \parallel (EPT)$

4. Каким может быть взаимное расположение прямой  $a$  и плоскости  $\beta$ , если прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$ , параллельной плоскости  $\beta$ ?

# УСТНАЯ РАБОТА

5. Как могут быть расположены плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , если плоскость  $\alpha$  проходит через некоторую прямую  $a$ , параллельную плоскости  $\beta$ ?

6. Как могут быть расположены плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , если любая прямая, лежащая в плоскости  $\alpha$ , параллельна плоскости  $\beta$ ?

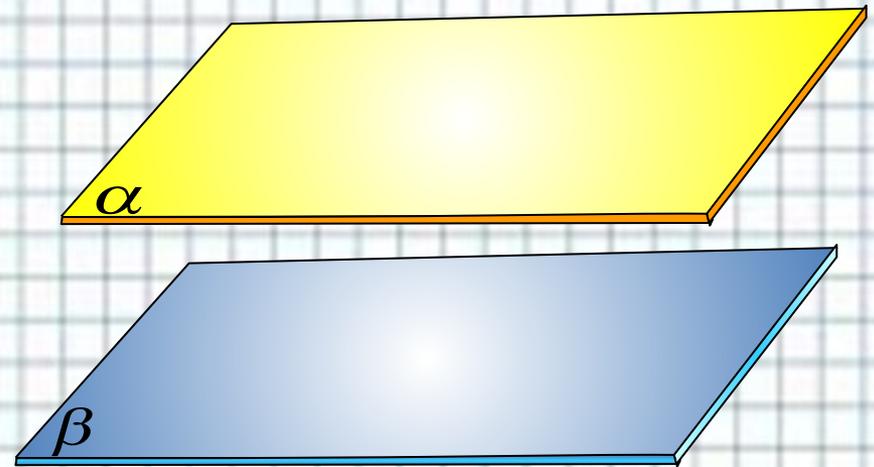
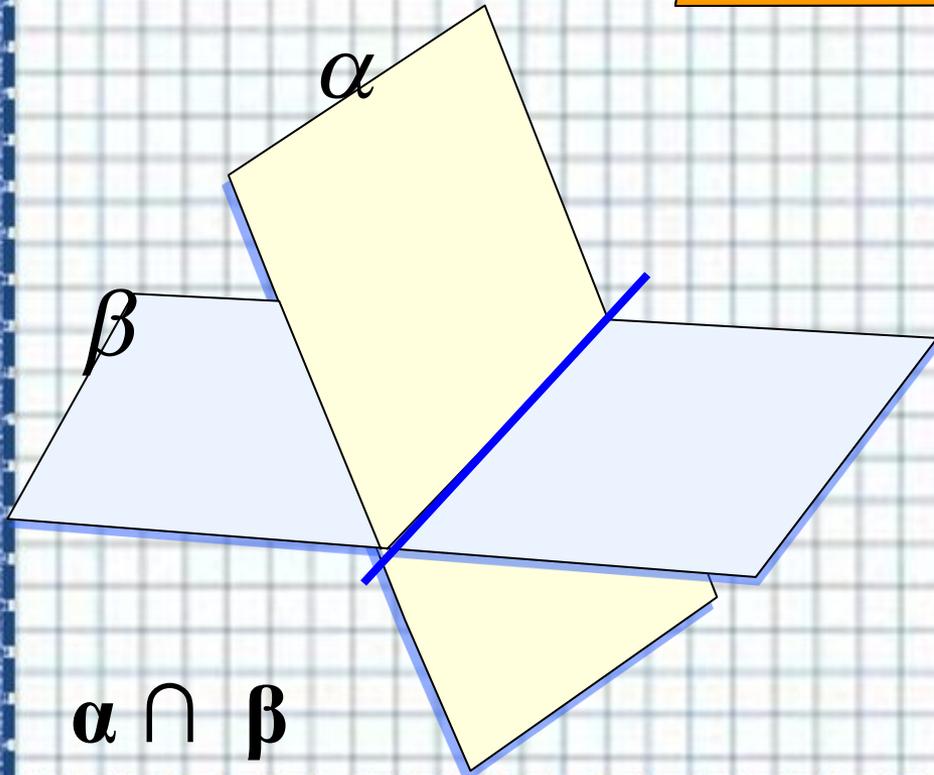
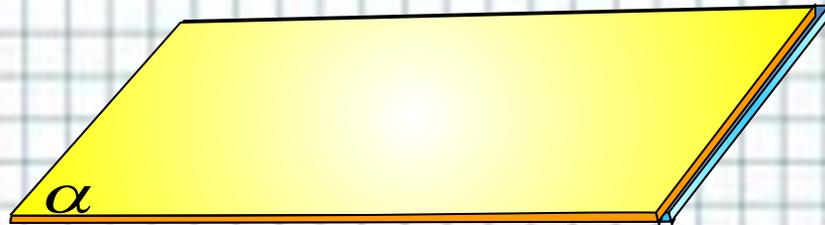
7. Сформулируйте определение параллельных плоскостей.

8. Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей.

9. Каково взаимное расположение плоскостей в пространстве?

# РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

*$\alpha$  и  $\beta$  совпадают*



$\alpha \parallel \beta$

# ВЕРНО ЛИ УТВЕРЖДЕНИЕ?

1. Если плоскости не пересекаются, то они параллельны. **ДА**
2. Плоскости параллельны, если прямая лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости? **НЕ Т**
3. Если две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны? **НЕ Т**
4. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости. **ДА**
5. Прямые, по которым две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, параллельны. **ДА**
6. Если прямая пересекает одну из двух плоскостей, то она пересекает и другую. **НЕ Т**
7. Две плоскости, параллельные третьей, параллельны. **ДА**
8. Отрезки прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны. **НЕ Т**

# 1. СВОЙСТВО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

*Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.*

Дано:

$$\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a$$

$$\beta \cap \gamma = b$$

Доказать:  $a \parallel b$

Доказательство:

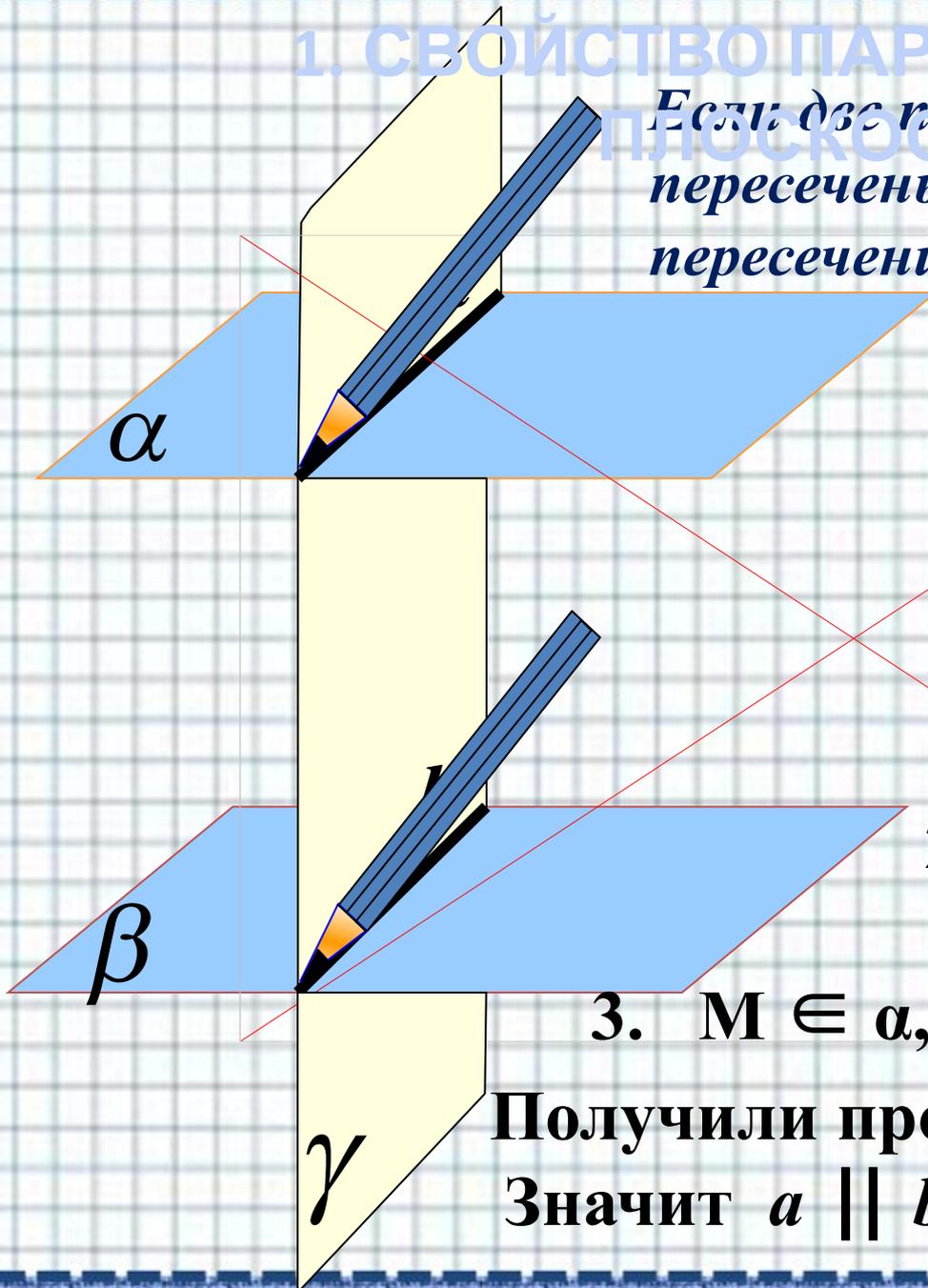
1.  $a \subset \gamma, b \subset \gamma$
2. Пусть  $a \parallel b$ ,

тогда  $a \cap b = M$

3.  $M \in \alpha, M \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = c (A_2)$

Получили противоречие с условием.

Значит  $a \parallel b$  ч.т.д.



## 2. СВОЙСТВО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

*Отрезки параллельных прямых,  
заключенные между параллельными  
плоскостями, равны.*

Дано:

$$\alpha \parallel \beta, AB \parallel CD$$

$$AB \cap \alpha = A, AB \cap \beta = B,$$

$$CD \cap \alpha = C, CD \cap \beta = D$$

Доказать:  $AB = CD$

Доказательство:

1. Через  $AB \parallel CD$  проведем  $\gamma$

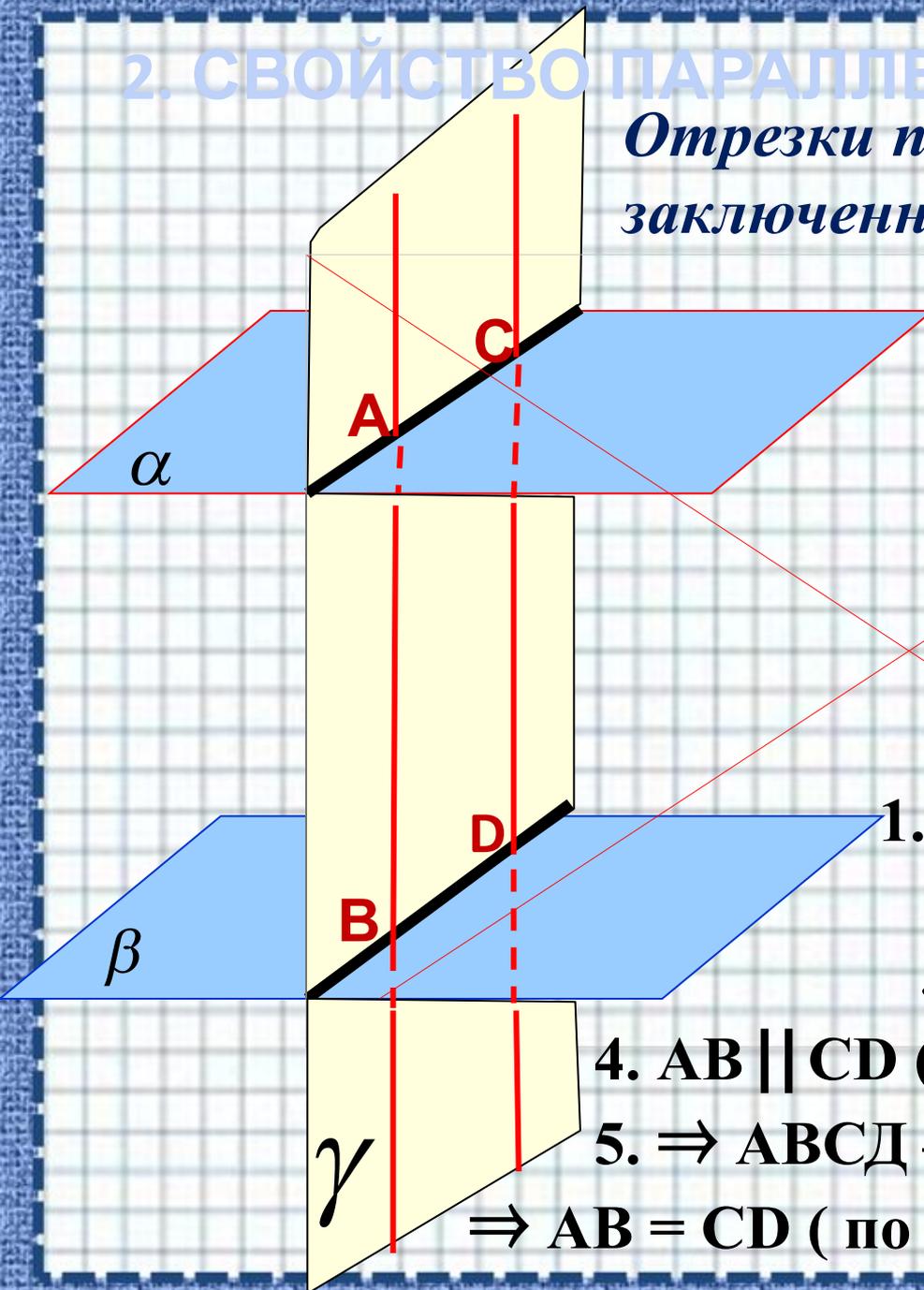
$$2. \alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b$$

$$3. \Rightarrow AC \parallel BD,$$

4.  $AB \parallel CD$  (как отрезки паралл. прямых)

5.  $\Rightarrow ABCD$  – параллелограмм (по опр.)

$\Rightarrow AB = CD$  ( по свойству параллелограмма)



# Решение задач

№

55

№

56

№

58

№

59

№

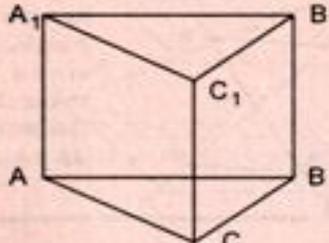
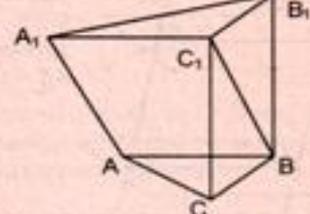
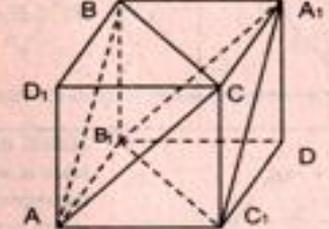
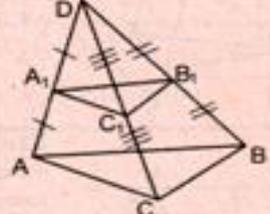
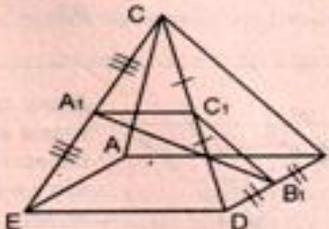
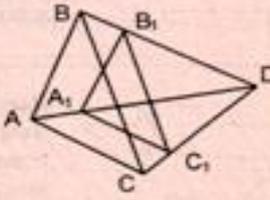
60



# РАБОТА В ГРУППАХ

Таблица 10.5. Признак параллельности плоскостей.

Доказать параллельность плоскостей  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ :

|  |  |
|--|--|
| <p>1</p>  <p>Дано: <math>AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1</math>, <math>AA_1 = BB_1 = CC_1</math></p> | <p>2</p>  <p>Дано: <math>AA_1C_1B</math> и <math>CC_1B_1B</math> – параллелограммы</p>  |
| <p>3</p>  <p>Дано: <math>AB_1DC_1D_1BA_1C</math> – куб</p>  | <p>4</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – пространственный четырехугольник</p>   |
| <p>5</p>  <p>Дано: точка <math>C</math> лежит вне плоскости параллелограмма <math>ABCD</math></p>      | <p>6</p>  <p>Дано: <math>ABCD</math> – пространственный четырехугольник.<br/> <math>DA_1</math>; <math>A_1A = DB_1</math>; <math>B_1B = DC_1</math>; <math>C_1C</math></p> |

I группа – задача 1

II группа – задача 2

III группа – задача 3



# РАБОТА В ГРУППАХ

I группа – задача 1

II группа – задача 2

III группа – задача 3

Таблица 10.6. Свойства параллельных плоскостей.

Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны.

|  |   |          |  |
|--|---|----------|--|
|  | <p>Дано:<br/><math>a \parallel b</math>.<br/>Доказать:<br/><math>AB = A_1B_1</math></p>   | <p>2</p> | <p>Дано:<br/>прямые <math>a</math> и <math>b</math> пересекаются в точке <math>O</math>.<br/>Доказать:<br/><math>AB \parallel A_1B_1</math></p>  |
|  | <p>Дано:<br/><math>a \parallel b \parallel c</math>.<br/>Доказать:<br/><math>\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1</math></p>                                 | <p>4</p> | <p>Дано:<br/><math>AB \parallel A_1B_1</math>,<br/><math>AC \parallel A_1C_1</math>.<br/>Доказать:<br/><math>BC \parallel B_1C_1</math></p>  |
|  | <p>5</p> <p>Дано: <math>a</math> и <math>b</math> – скрещивающиеся прямые.<br/>Доказать: прямые <math>AB</math> и <math>A_1B_1</math> – скрещивающиеся.</p> |          | <p>6</p> <p>Дано: прямые <math>a</math> и <math>b</math> пересекаются в точке <math>M</math>. <math>AA_1 = 3</math>, <math>MB_1 = 12</math>.<br/>Найти: <math>A_1B_1</math>, <math>MB</math> и <math>BB_1</math></p> |
|  | <p>7</p> <p>Дано: прямые <math>a</math> и <math>b</math> пересекаются в точке <math>O</math>.<br/>Найти: <math>AB</math> и <math>OB_1</math></p>            |          | <p>8</p> <p>Дано: прямые <math>a</math> и <math>b</math> пересекаются в точке <math>M</math>.<br/>Доказать: <math>\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1</math></p>  |



СПАСИБО за  
УРОК!

