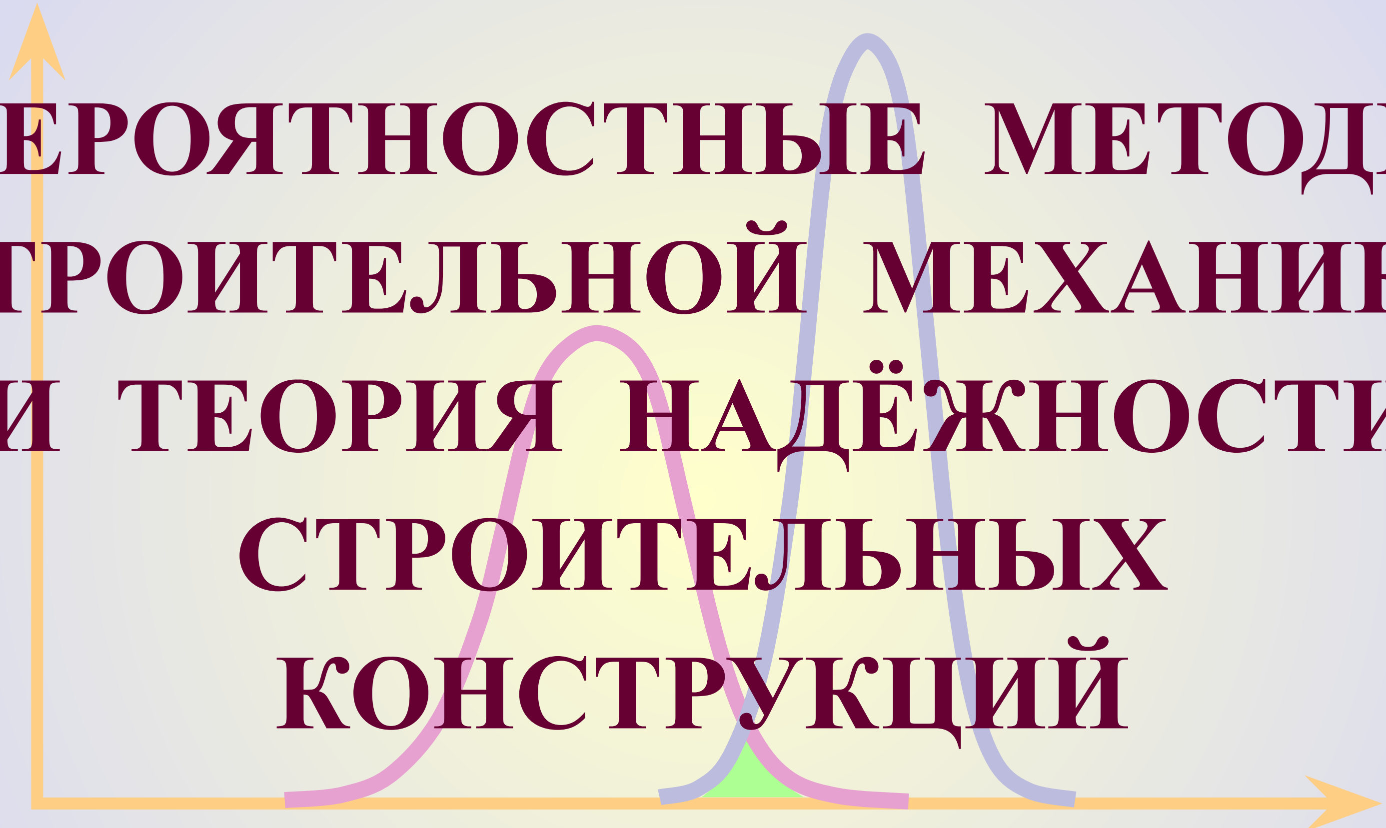
ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ТЕОРИЯ НАДЁЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ



ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЁТА НАДЁЖНОСТИ.
ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НАДЁЖНОСТИ

Общая схема постановки задачи расчёта надёжности сооружения/конструкции

ОБОЗНАЧЕНИЯ: надёжность – P_s (s – successful), N

вероятность отказа – P_f (f – failure), $P_S(0)$

$$P_s = 1 - P_f$$

$$N = 1 - P_S(0)$$

ОБОБЩЁННОЕ УСЛОВИЕ БЕЗОТКАЗНОСТИ (РАБОТОСПОСОБНОСТИ) ПО НЕКОТОРОМУ КРИТЕРИЮ:

$$\tilde{Q} \le \tilde{R}$$

(по ГОСТ 27751 – 2014 – расчётный критерий предельного состояния)

По А.Р. Ржаницыну

Обобщённая нагрузка (нагрузочный фактор/эффект, load effect) (по ГОСТ – результат (эффект) воздействия)

- параметр нагрузки
- усилие
- напряжение
- перемещение
- частота колебаний
- другое

Обобщённая прочность (сопротивление, resistance)

- предельная нагрузка (несущая способность)
- предельное усилие
- предел текучести, прочности
- допустимое перемещение
- частота колебаний (собств.)
- другое

$$P_s = P(Q < R)$$

(N)

Q, R – реализации случайных величин $\tilde{Q}$ и $\tilde{R}$

Общая схема постановки задачи расчёта надёжности сооружения/конструкции

ВАРИАНТ ЗАПИСИ УСЛОВИЯ БЕЗОТКАЗНОСТИ (РАБОТОСПОСОБНОСТИ):

$$\boxed{\tilde{S} \geq 0}$$

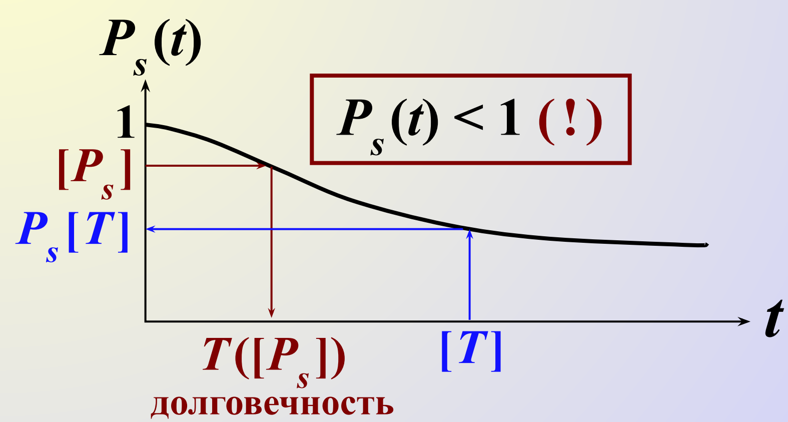
$\tilde{S} = \tilde{R} - \tilde{Q}$ – резерв (обобщённой) прочности (функция работоспособности) *– по А.Р. Ржаницыну*

Надёжность $\boxed{P_s = 1 - P_f}$ где $P_f = P(S < 0)$;

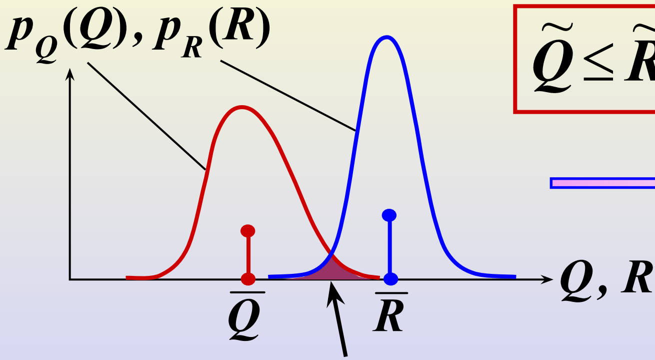
S – реализация случайной величины $\tilde{S}$

В общем случае $\tilde{Q}$ и $\tilde{R}$ зависят от времени t:

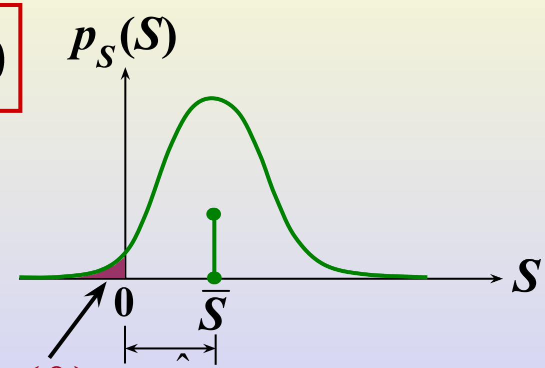
$$\left.\begin{aligned} \tilde{Q} &= \tilde{Q}(t) \\ \tilde{R} &= \tilde{R}(t) \end{aligned}\right\} P_s = P_s(t)$$



Обобщённое условие безотказности по некоторому критерию работоспособности



$$\boxed{\tilde{Q} \le \tilde{R}} \Rightarrow \boxed{\tilde{S} = \tilde{R} - \tilde{Q} \ge 0}$$



$$P_f = P(R<Q) \Leftrightarrow P_f = P(S<0) = P_S(0)$$

$$\boxed{\beta = \frac{\bar{S}}{\hat{S}}}$$ – характеристика безопасности (индекс надёжности, reliability index)

$$\boxed{P_f = \int_{-\infty}^{0} p_S(S)\, dS}$$

$$\tilde{S} = S(\tilde{Q}, \tilde{R})$$

$$\tilde{Q} = Q\left(\left\{\tilde{X}_Q\right\}\right)$$

$$\left\{\tilde{X}_Q\right\} = \left\{\tilde{x}_{Q1}\ \tilde{x}_{Q2} \ldots \tilde{x}_{Qi} \ldots \tilde{x}_{Qn_Q}\right\}$$

$$\tilde{R} = R\left(\left\{\tilde{X}_R\right\}\right)$$

$$\left\{\tilde{X}_R\right\} = \left\{\tilde{x}_{R1}\ \tilde{x}_{R2} \ldots \tilde{x}_{Ri} \ldots \tilde{x}_{Rn_R}\right\}$$

Пример: $\tilde{Q} = \left|\tilde{M}\right|_{\max} = \tilde{q}\,\tilde{l}^{\,2}/8$ (нагрузочный эффект)

$$\left\{\tilde{X}_Q\right\} = \left\{\tilde{q}\ \tilde{l}\right\}$$

$\tilde{R} = \tilde{M}_0 = \tilde{\sigma}_u \tilde{W}$ (сопротивление)

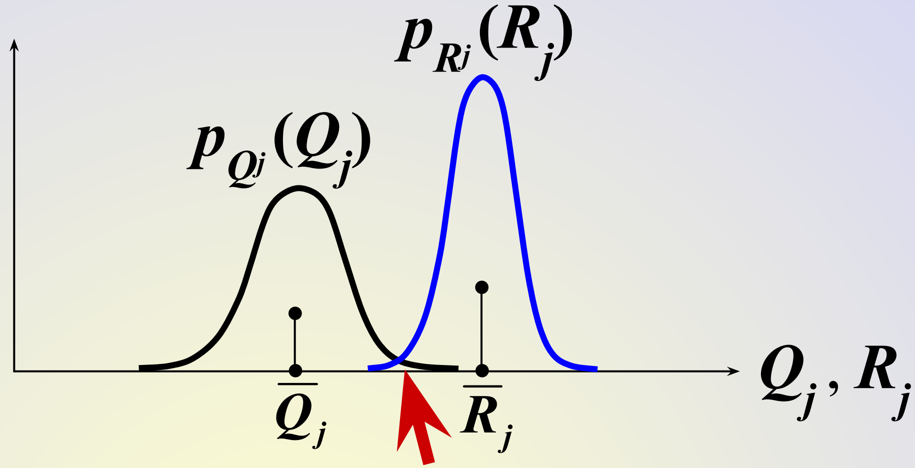
$$\left\{\tilde{X}_R\right\} = \left\{\tilde{\sigma}_u\ \tilde{W}\right\}$$

$$\tilde{W} = \frac{\tilde{b}\,\tilde{h}^2}{6}$$

$$\boxed{\tilde{u} = u\left(\left\{\tilde{X}\right\}\right)}$$

При нескольких условиях безотказности: $\boxed{\tilde{u} = \left\{\tilde{u}_1\ \tilde{u}_2 \ldots \tilde{u}_k \ldots \tilde{u}_m\right\}}$

Для *j*-го условия безотказности по некоторому критерию работоспособности:



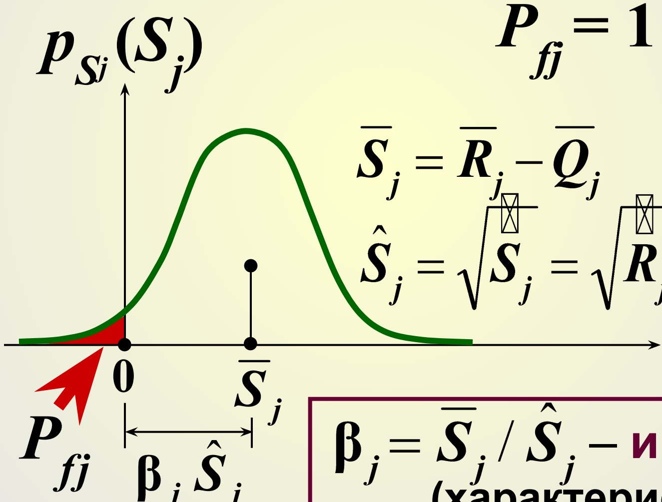
$$\boxed{\widetilde{S}_j = \widetilde{R}_j - \widetilde{Q}_j \geq 0}$$

Резерв обобщённой прочности (функция работоспособности)

$$P_{fj} = \int_{-\infty}^{0} p_{Sj}(S_j)\, dS_j$$

$$P_{fj} = 1 - P_{sj} = P(Q_j > R_j) -$$

вероятность отказа по *j*-му условию безотказности



$$\overline{S}_j = \overline{R}_j - \overline{Q}_j$$

$$\hat{S}_j = \sqrt{\boxtimes S_j} = \sqrt{\boxtimes R_j + \boxtimes Q_j - 2\widehat{R_j Q_j}}$$

$$\boxed{\beta_j = \overline{S}_j / \hat{S}_j}$$ **– индекс надёжности (характеристика безопасности)**

reliability index

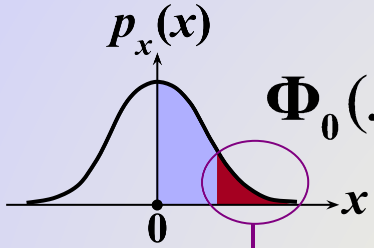
Для нормального распределения

$$p_{Sj}(S_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \boxtimes S_j}}\, e^{-\frac{(S_j - \overline{S}_j)^2}{2\boxtimes S_j}}$$

$$\beta_j = \frac{\overline{S}_j}{\hat{S}_j} = \frac{1}{A_{Sj}} = \frac{1 - \xi_j}{\sqrt{A_{Rj}^2 + (\xi_j A_{Qj})^2}}; \quad \xi_j = \frac{\overline{Q}_j}{\overline{R}_j}$$

вычисление P_{fj} возможно с помощью интеграла вероятностей (функции Лапласа)

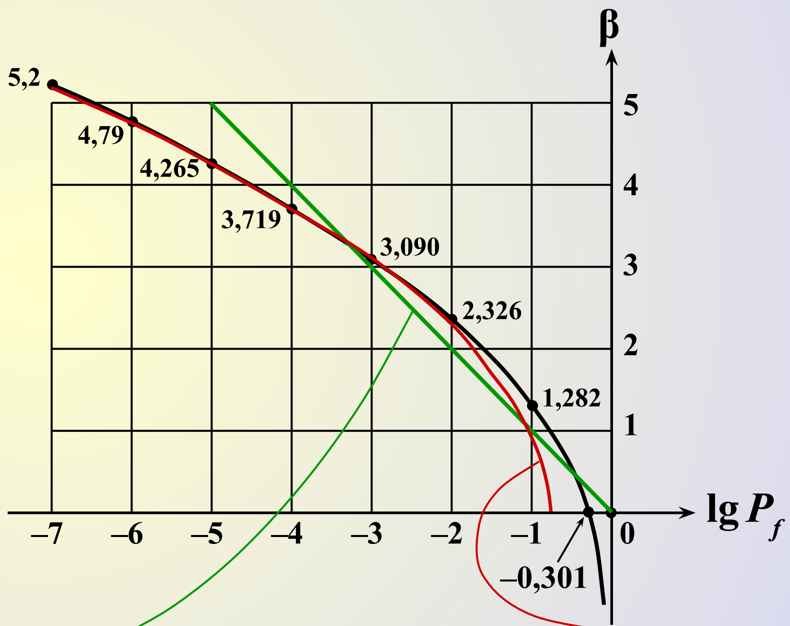
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА ВЕРОЯТНОСТЕЙ (ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА) ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА ПО ИНДЕКСУ НАДЁЖНОСТИ



$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

В расчётах надёжности $x \equiv \beta$

Вероятность $P_f = 0{,}5 - \Phi_0(x)$	$x = \beta$
10^{-7}	5,2
10^{-6}	4,79
10^{-5}	4,265
0,0001	3,719
0,0005	3,291
0,001	3,090
0,002	2,878
0,005	2,576
0,01	2,326
0,02	2,054
0,05	1,645
0,1	1,282



$\boxed{P_f \approx 10^{-\beta}}$ при $\beta = 1 \ldots 4$ (из зарубежных источников)

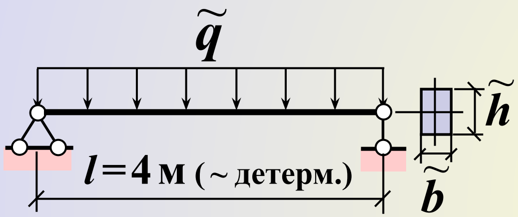
Более точно (ВГС): $\boxed{P_f \approx 10^{-(0{,}23\beta_2 + 0{,}8)}}$ при $\beta = 2 \ldots 7$

Определение вероятности отказа методом статистических испытаний:

по результатам n_0 расчётов системы при различных случайных реализациях входных расчётных параметров выявляется количество испытаний n_{fj}, в которых получено $Q_j > R_j$ ($S_j < 0$) ,

тогда $\boxed{P_{fj} = n_{fj} / n_0}$. Ориентировочно $n_0 \sim (10^2 \ldots 10^3)/P_{fj}$.

П р и м е р

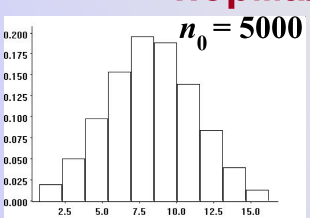


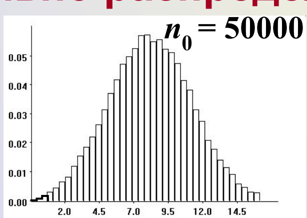
Требуется определить вероятность отказа деревянной балки по условию прочности $\tilde{\sigma}_0 = \left|\tilde{\sigma}\right|_{\max} \le \tilde{\sigma}_u$ при $\tilde{q} = \tilde{q}_c + \tilde{q}_s$ ($\tilde{q}_c$ – постоянная нагрузка, $\tilde{q}_s$ – снеговая). $\tilde{\sigma}_0 = \tilde{q}\, l^2 / (8\tilde{W})$

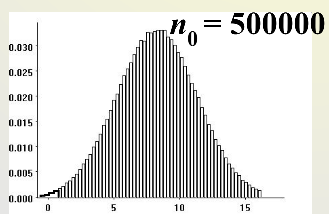
$\bar{q}_c = 6$ кН/м; $\hat{q}_c = 0{,}48$ кН/м; $\bar{q}_s = 5$ кН/м; $\hat{q}_s = 1{,}6$ кН/м ($A_{qc} = 0{,}08$; $A_{qc} = 0{,}32$) ;
$\bar{b} = 0{,}15$ м; $\hat{b} = 0{,}0006$ м; $\bar{h} = 0{,}3$ м; $\hat{h} = 0{,}0015$ м; ($A_b = 0{,}004$; $A_h = 0{,}005$) ;
$\bar{\sigma}_u = 18$ МПа; $A_{\sigma u} = 0{,}15$).

$\boxed{\tilde{S} = \tilde{\sigma}_u - \tilde{\sigma}_0}$

Вариант 1 – все расчётные параметры **нормально распределённые**







$n_c \times n_s$	$\bar{S}$, МПа	$\hat{S}$, МПа	P_f
400 × 5	8,218	3,028	0,002
1000 × 5	8,229	3,095	0,004
2000 × 5	8,256	3,040	0,003
$10^4 \times 5$	8,233	3,082	0,00376
$2 \times 10^4 \times 5$	8,215	3,065	0,00374
$10^5 \times 5$	8,224	3,079	0,003782
$2 \times 10^5 \times 5$	8,219	3,081	0,003766

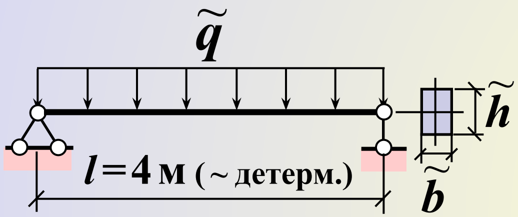
Для сравнения – по методу статистической линеаризации:

$\boxed{\bar{S} = 8{,}222 \text{ МПа}}$ $\boxed{\hat{S} = 3{,}083 \text{ МПа}}$ $\boxed{P_f = 0{,}00367}$

Определение вероятности отказа методом статистических испытаний:

по результатам n_0 расчётов системы при различных случайных реализациях входных расчётных параметров выявляется количество испытаний n_{fj}, в которых получено $Q_j > R_j$ ($S_j < 0$),

тогда $\boxed{P_{fj} = n_{fj}/n_0}$. Ориентировочно $n_0 \sim (10^2 \ldots 10^3)/P_{fj}$.



П р и м е р

Требуется **определить вероятность отказа деревянной балки по условию прочности $\tilde{\sigma}_0 = \left|\tilde{\sigma}\right|_{\max} \le \tilde{\sigma}_u$ при $\tilde{q} = \tilde{q}_c + \tilde{q}_s$ ($\tilde{q}_c$ – постоянная нагрузка, $\tilde{q}_s$ – снеговая).** $\tilde{\sigma}_0 = \tilde{q}\, l^2/(8\tilde{W})$

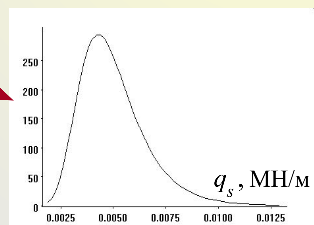
$\bar{q}_c = 6$ кН/м; $\hat{q}_c = 0{,}48$ кН/м; $\bar{q}_s = 5$ кН/м; $\hat{q}_s = 1{,}6$ кН/м ($A_{qc} = 0{,}08$; $A_{qc} = 0{,}32$);

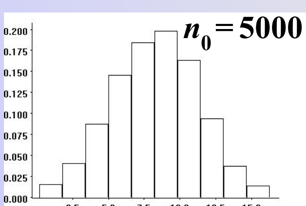
$\bar{b} = 0{,}15$ м; $\hat{b} = 0{,}0006$ м; $\bar{h} = 0{,}3$ м; $\hat{h} = 0{,}0015$ м; ($A_b = 0{,}004$; $A_h = 0{,}005$);

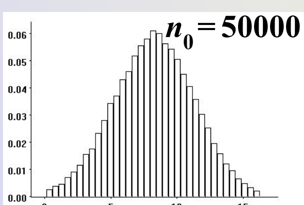
$\bar{\sigma}_u = 18$ МПа; $A_{\sigma u} = 0{,}15$).

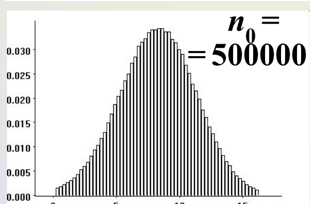
$\boxed{\tilde{S} = \tilde{\sigma}_u - \tilde{\sigma}_0}$

Вариант 2 **– для снеговой нагрузки – *распределение Гумбеля*, остальные параметры нормально распределённые**









$n_0 \times n_s$	$\bar{S}$, МПа	$\hat{S}$, МПа	P_f
400×5	8,201	3,124	0,003
1000×5	8,257	3,130	0,0052
2000×5	8,223	3,087	0,0058
10^4×5	8,222	3,099	0,0057
2×10^4×5	8,196	3,112	0,00576
10^5×5	8,199	3,109	0,00601
2×10^5×5	8,213	3,111	0,00599

Надёжность по комплексу критериев безотказности (при нескольких альтернативных критериях)

$$P_s = P_{s\ \text{прочн}} \cdot P_{s\ \text{устойч}} \cdot P_{s\ \text{жёстк}} \cdot P_{s\ \text{друг}}$$

При m условиях расчётных предельных состояний по всем используемым критериям безотказности

$$P_s = \prod_{j=1}^{m} P_{sj} = \prod_{j=1}^{m} \left[1 - P_{fj} \right]$$

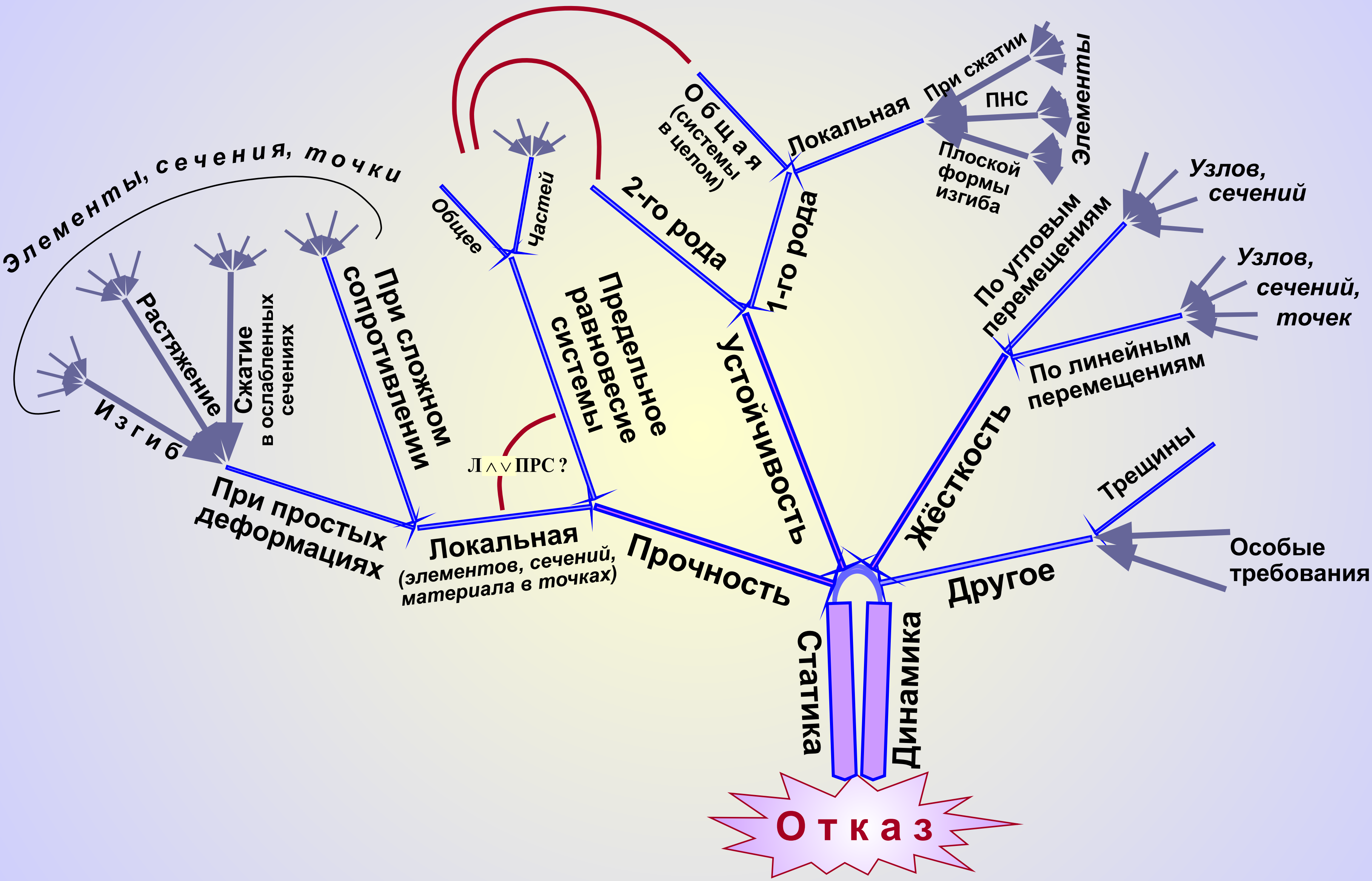
Вероятность отказа

$$P_f = 1 - P_s = 1 - \prod_{j=1}^{m} P_{sj} = 1 - \prod_{j=1}^{m} (1 - P_{fj})$$

Приближённо при $P_{fj} << 1/m$:

$$P_f \approx \sum_{j=1}^{m} P_{fj}$$

Построение «дерева отказов (рисков)» и анализ рисков



ТИПЫ ЗАДАЧ ТЕОРИИ НАДЁЖНОСТИ

► прямая (поверочная) задача – ПЗТН
► обратная (проектная) задача – ОЗТН
► оптимизационная задача – ОптЗТН

П З Т Н: при известных (заданных) функциональных или числовых характеристиках вероятностных свойств расчётных параметров и обозначенных критериях / условиях безотказности определить *надёжность системы* (сооружения, конструкции) P_s и / или *вероятность её отказа* $P_f = 1 - P_s$.

О З Т Н: определить *область допустимых значений* (ОДЗ)[*)] вероятностных характеристик указанной группы случайных параметров, обеспечивающих надёжность системы *не менее требуемой* $[P_s]$ или вероятность отказа *не более допустимой* $[P_f]$, при известных стохастических описаниях остальных расчётных величин и обозначенных критериях / условиях безотказности.

[*)] Иначе – доверительную область значений (ДОЗ).

***Варианты ОЗТН* – определение ОДЗ вероятностных характеристик**

- **геометрических параметров сечений конструктивных элементов – подбор сечений;**
- **воздействий (нагрузок);**
- **физико-механических свойств материалов;**
- **группы разнотипных расчётных параметров.**

О п т З Т Н: найти стохастические расчётные параметры системы, оптимальной по некоторому критерию, с учётом требований надёжности или обладающей наибольшей возможной надёжностью.

Примечание: некоторые заданные или подлежащие определению расчётные параметры системы могут быть детерминированными (или квазидетерминированными) величинами.

Математическая модель ПЗТН:

задаы $\{\tilde{X}\}$ и ограничения $\tilde{Q}_j \le \tilde{R}_j \ (j = \overline{1, m})$;

найти $P_s \wedge \vee P_f = 1 - P_s$.

Алгоритм решения ПЗТН

Анализ и ввод исходной статистической информации

Выбор критериев и формирование комплекса условий безотказности

Выбор метода вероятностного расчёта

МСЛ

МСИ

Цикл по $j = 1,\ldots,m$

Вычисление $\bar{Q}_j, \hat{Q}_j, \bar{R}_j, \hat{R}_j$

Вар. 1

$\bar{S}_j, \hat{S}_j$

$\beta_j = \bar{S}_j / \hat{S}_j$

Вар. 2

$\xi_j = \bar{Q}_j / \bar{R}_j$

A_{Qj}, A_{Rj}

$$\beta_j = \frac{1 - \xi_j}{\sqrt{A_{Rj}^2 + (\xi_j A_{Qj})^2}}$$

Определение P_{fj} по принятой модели $p_{Sj}(S_j)$

Генерирование репрезентативной выборки случайных значений S_j

$$P_{fj} = \frac{n_{fj}}{n_{0j}}$$

$$P_f = 1 - \prod_{j=1}^{m}(1 - P_{fj}) \approx \sum_{j=1}^{m} P_{fj}$$

$$P_s = 1 - P_f = \prod_{j=1}^{m}\left[1 - P_{fj}\right]$$

К

Математическая модель ОЗТН:

заданы: требуемая $[P_s]$ или допустимая $[P_f]$,
часть расчётных параметров $\{\tilde{X}_0\}$ и ограничения $\tilde{Q}_j \le R_j \; (j = \overline{1, m})$;
найти область допустимых значений (ОДЗ) входных параметров.

В общей постановке:

$$P_s\left(\{\bar{X}_0\}, \{A_X\}\right) \ge [P_s] \text{ или } P_f\left(\{\bar{X}_0\}, \{A_X\}\right) < [P_f] \qquad \text{(а)}$$

где $\{\bar{X}_0\}$ и $\{A_X\}$ – векторы искомых МО и КВ расчётных параметров (в них могут присутствовать и детерминированные величины с КВ, равными 0).

Взятые со знаком равенства требования (а) определяют граничную гиперповерхность искомой ОДЗ в $2n_X$-мерном пространстве характеристик (n_X – размерность векторов).

Применение достаточно удачных аппроксимаций позволяет получить из (а) уравнение границы ОДЗ расчётных параметров в пространстве частных индексов надёжности, например

$$\lg \sum_{j=1}^{m} 10^{-\varphi_j(\beta_j)} - \lg[P_f] = 0. \qquad \text{(б)}$$

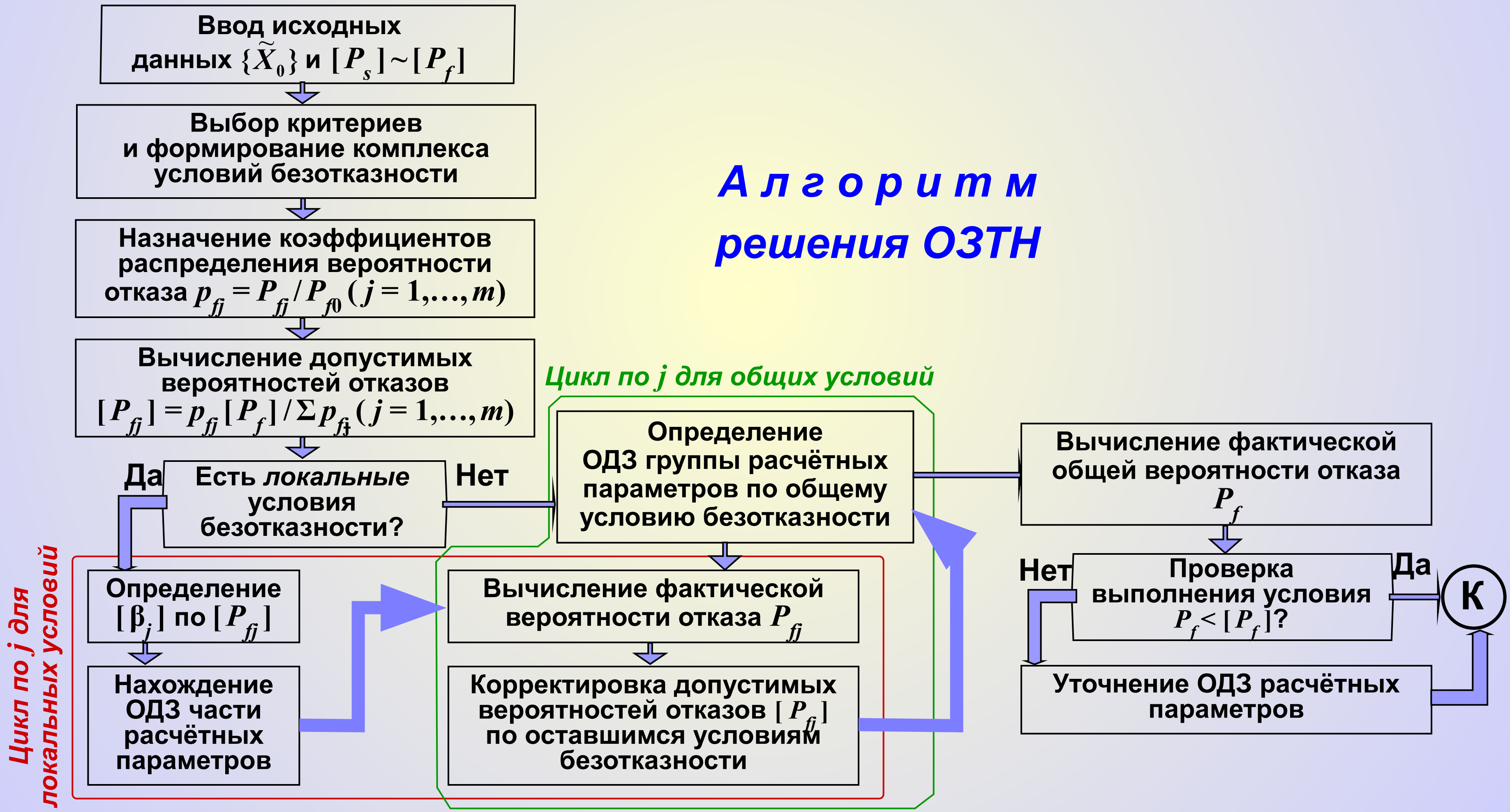
Если нормируется не надёжность или вероятность отказа, а общий индекс надёжности $[\beta_0]$, то в (б): $\lg[P_f] = -(0{,}23[\beta_0]^2 + 0{,}8)$

Математическая модель ОЗТН:

заданы: требуемая $[P_s]$ или допустимая $[P_f]$,

часть расчётных параметров $\{\tilde{X}_0\}$ и ограничения $\tilde{Q}_j \le \tilde{R}_j \ (j = \overline{1, m})$;

найти **область допустимых значений (ОДЗ) входных параметров.**



А л г о р и т м (вариант):

1) по известной $[P_f]$ определяется требуемое значение частного индекса надёжности в предположении наиболее невыгодного по общей надёжности, но выигрышного по расходу материала случая равной вероятности отказов по всем m условиям работоспособности:

$$[\beta_j] = 2{,}085\sqrt{-\lg[P_f] - 0{,}8 + \lg m} = \sqrt{[\beta_0]^2 + 4{,}348\lg m};$$

2) выбирается одно из условий, содержащее либо одну из подлежащих определению расчётных величин, либо несколько взаимосвязанных (например, площадь и моменты сопротивления сечения стержневого конструктивного элемента в условии прочности при пространственной деформации в упругой стадии); из равенства $\beta_j = [\beta_j]$ получается уравнение, связывающее МО и КВ искомых расчётных параметров, решаемое, как правило, подбором – последовательными приближениями, причём КВ сначала могут назначаться ориентировочно;

удобно использовать заданный по смыслу коэффициент A_{Qj} (A_{Rj} обычно известен), откуда решением квадратного уравнения находится коэффициент нагруженности ξ_j, далее по ξ_j находятся комбинации искомых МО параметров при соответствующих их КВ;

3) последовательно аналогичным образом используются все расчётные условия безотказности, причём в каждом последующем учитываются уже ранее найденные параметры.

При переходе к расчёту по очередному условию безотказности целесообразно уточнять [β_j] с учётом вероятностей отказов P_{fj} по уже рассмотренным условиям:

$$[\beta_j^-] = 2{,}085\sqrt{-\lg\left([P_f] - \sum_{j=1}^{m_p} P_{fj}\right) - 0{,}8 + \lg(m - m_p)},$$

где m_p – количество ранее использованных условий.