

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Автор: Грицан Т. А.



**Закончился 20 -ый век.
Куда стремится человек?**

Изучен космос и моря,

Строенье звёзд и вся

Земля,

Но математиков зовёт

Известный лозунг:

«Прогрессио

движение

вперёд!»



Оглавление

Арифметическая прогрессия

Геометрическая прогрессия

Сравнение прогрессий

Решение задач

Проверь себя

Контрольное тестирование



Арифметическая прогрессия

это числовая последовательность, в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего увеличением его на определённое число.

Имеет вид:

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \dots, a_1+(n-1)d, \dots$$



Арифметическая прогрессия

Из определения арифметической прогрессии следует, что $d = a_{n+1} - a_n$

Прогрессию называют арифметической потому, что каждый её член, начиная со второго, является средним арифметическим двух соседних с ним членов:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$



Арифметическая прогрессия

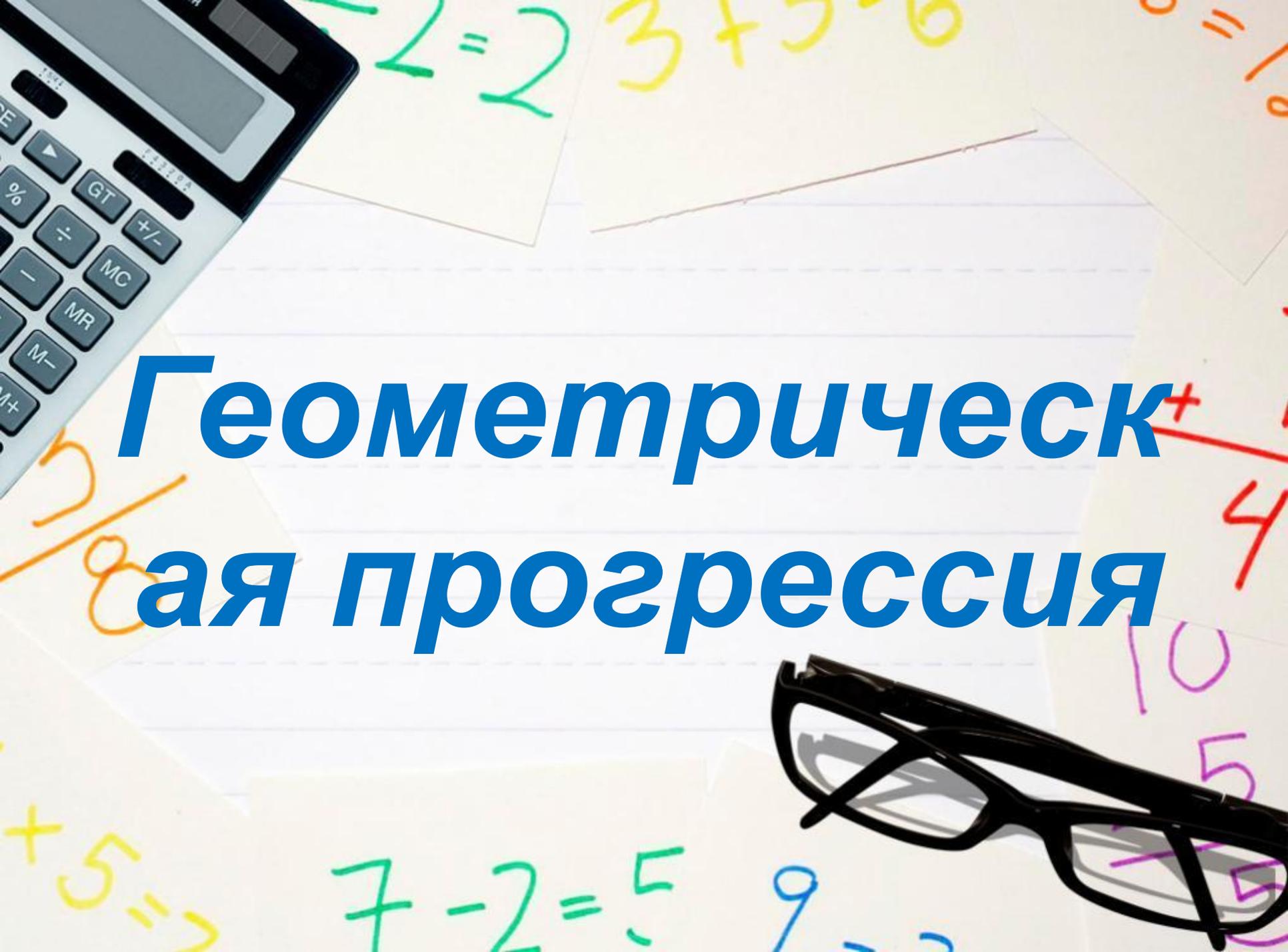
Формула n -го члена прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Сумма первых n членов прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$



The background features a collage of mathematical elements. In the top-left corner, a portion of a silver and black calculator is visible, showing buttons for %, GT, +/-, ÷, MC, MR, M-, and M+. In the bottom-right corner, a pair of black-rimmed glasses is shown. The background is filled with various mathematical equations and numbers written in different colors: green (2=2, 7-2=5), yellow (3+3=6, 5=5), orange (2/8), red (4), and purple (10, 5). The main title is centered in a bold, blue, sans-serif font.

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия

это последовательность чисел, в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определённое число.

Имеет вид:

$$b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, \dots, b_1q^{n-1}, \dots$$

Геометрическая

прогрессия

Из определения геометрической прогрессии следует, что $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

Прогрессию называют геометрической потому, что каждый её член, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов:

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}$$

Геометрическая прогрессия

Формула n -го члена прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Формула n -го члена прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}, S_n = \frac{b_1 (1 - q^n)}{1 - q}, q \neq 1$$

Геометрическая прогрессия

**Сумма бесконечной
геометрической прогрессии при**
 $|q| < 1$

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Сравнение арифметической и геометрической прогрессий



Сравнение определений арифметической и геометрической прогрессий

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену,

сложенному с одним и тем же числом,

умноженному на одно и то же число,

называется **арифметической** прогрессией
геометрической

Сравнение характеристических свойств арифметической и геометрической прогрессий

Прогрессию называют **арифметической**
геометрической
потому, что каждый её член, начиная со
второго, является **средним арифметическим**
средним геометрическим
двух соседних с ним членов:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}$$

Формулы

Арифметическая прогрессия

$$1. a_n = a_1 + d(n-1);$$

$$2. a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2};$$

$$3. d = a_{n+1} - a_n;$$

$$4. S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$5. S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

$$1. b_n = b_1 q^{(n-1)};$$

$$2. b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}};$$

$$3. q = \frac{b_{n+1}}{b_n};$$

$$4. S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1};$$

$$5. S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1;$$

$$6. S_n = \frac{b_1}{1 - q}, |q| \neq 1;$$

Решение задач



Задача 1

Дано: (a_n) - арифметическая прогрессия, $a_1 = 5$ $d = 3$.

Найти: a_6 ; a_{10} .

Решение: используя формулу

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

$$a_6 = a_1 + 5 d = 5 + 5 \cdot 3 = 20$$

$$a_{10} = a_1 + 9 d = 5 + 9 \cdot 3 = 32$$

Ответ: 20; 32

Задача 2

Дано: (b_n) - геометрическая прогрессия

$$b_1 = 5, \quad q = 3.$$

Найти: b_3 ; b_5 .

Решение: используя формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$

$$b_3 = b_1 q^2 = 5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$$

$$b_5 = b_1 q^4 = 5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 81 = 405$$

Ответ: 45; 405.

Задача 3

Дано: (a_n) - арифметическая прогрессия, $a_4 = 11$, $d = 2$.

Найти: a_1 .

Решение: используя формулу

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

$$a_4 = a_1 + 3d ; a_1 = a_4 - 3d = 11 - 3 \cdot 2 = 5$$

Ответ: 5.

Задача 4

Дано: (b_n) - геометрическая прогрессия, $b_4 = 40$, $q = 2$.

Найти: b_1 .

Решение: используя формулу

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

$$b_4 = b_1 q^3 ; b_1 = b_4 : q^3 = 40 : 2^3 = 40 : 8 = 5$$

Ответ: 5.

Задача 5

Дано: (a_n) - арифметическая прогрессия

$$a_4 = 12,5; a_6 = 17,5.$$

Найти: a_5

Решение: используя свойство $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$
арифметической прогрессии имеем:

$$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{12,5 + 17,5}{2} = 15$$

Ответ: 15

Задача 6

Дано: (b_n) - геометрическая прогрессия ,
 $b_n > 0$, $b_4 = 6$; $b_6 = 24$.

Найти: b_5

Решение: используя свойство
геометрической прогрессии имеем:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

$$b_5^2 = b_4 \cdot b_6 = 6 \cdot 24 = 144 \Rightarrow b_5 = \sqrt{144} = 12$$

Ответ: 12

Магический квадрат

Квадрат, состоящий из 9 клеток, в него вписывают числа, так чтобы сумма чисел по вертикали, горизонтали и диагонали была одним и тем же числом (constant)
называют магическим квадратом.

Из каждых девяти последовательных членов любой арифметической прогрессии натуральных чисел можно составить магический квадрат.

Магический квадрат

Пусть дана арифметическая прогрессия: $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+8d$, где a и d натуральные числа. Расположим её члены в таблицу.

Нетрудно видеть, что получился магический квадрат, константа C которого равна $3a+12d$.

$a+3d$	$a+8d$	$a+d$
$a+2d$	$a+4d$	$a+6d$
$a+7d$	a	$a+5d$

Действительно, сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и по каждой диагонали квадрата равна $3a+12d$.

Легенда о создателе шахмат

Индийский раджа, познакомившись с игрой в шахматы, решил наградить изобретателя этой игры и предложил тому самому выбрать награду. Изобретатель пожелал за первую клетку шахматной доски получить одно зернышко пшеницы, за вторую – два зернышка, за третью – четыре, за четвертую – восемь, за пятую – 16 и т. д. Удивившись скромности изобретателя, раджа распорядился немедленно выдать награду. Однако выполнить приказ раджи оказалось невозможно.

Легенда о создателе шахмат



Легенда о создателе шахмат

Подсчитаем, сколько зерен пшеницы нужно было бы выдать изобретателю шахмат.

Количество зерен, запрошенные за каждую из 64 клеток шахматной доски составляют геометрическую прогрессию с первым членом, равным 1, и знаменателем, равным 2.

2. Найдем всех 64 членов этой прогрессии:

$$S_{64} = \frac{1 - 1 \cdot 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1 \approx 1,8 \cdot 10^{19}$$

Проверь себя



Задание №1

(a_n) -арифметическая прогрессия,
 $a_1 = 10$; $d = -0,1$. Найди a_4 .

Задание №2

(b_n) -арифметическая прогрессия,
 $b_1 = 5; q = -3$. Найди b_3 .

Задание №3

Зная разность $d=3,5$ и пятый член $a_5=12$ арифметической прогрессии, найдите первый член этой прогрессии

Задание №4

Зная знаменатель $q=2$ и третий член $b_3=1,2$ геометрической прогрессии, найдите первый член этой прогрессии

Задание №5

Найдите сумму первых членов n арифметической, зная, что $a_1=13$, $a_n=67$, $n=25$ геометрической, найдите первый член этой прогрессии

Задание №6

Найдите сумму первых ста
натуральных чисел

Задание №7

Найдите сумму первых n членов
геометрической прогрессии, зная, что
 $b_1=3, b_n=192, q=2$.

Задание №8

Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии, если $b_1=6$,
 $q=-1/3$.

Задание №9

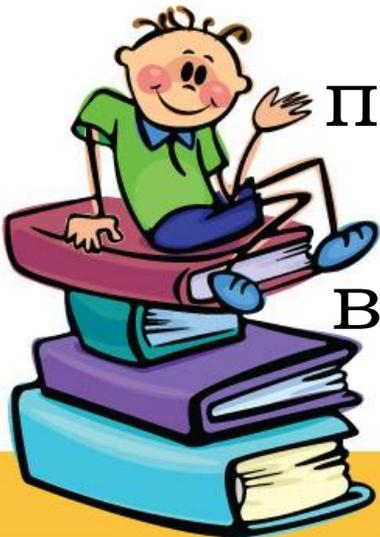
Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, если
 $S=6$, $q=2/3$.

Задание №10

Найдите знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, если
 $b_1=12$, $S=18$.

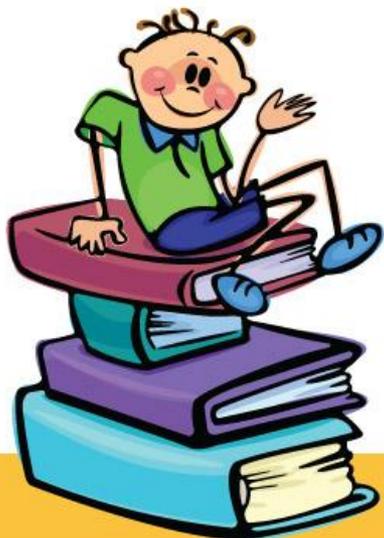
Контрольное тестирование

Вам предлагается
10 вопросов тестового
характера с выбором одного
правильного ответа. Переход
к следующему вопросу с
помощью кнопки «Далее». На
последнем слайде будет
выставлена итоговая оценка
за тест.



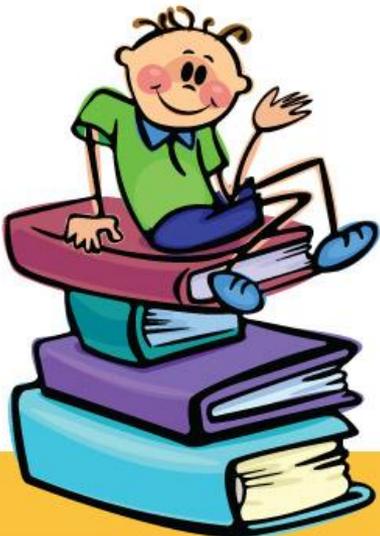
Вопрос №1

Дана арифметическая прогрессия 1, 7, 13, Найти сумму первых шести её членов.



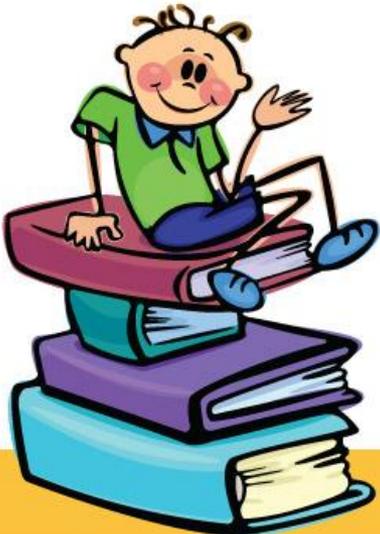
Вопрос №2

Дана геометрическая прогрессия 4, 2, 1, Найти сумму первых пяти её членов.



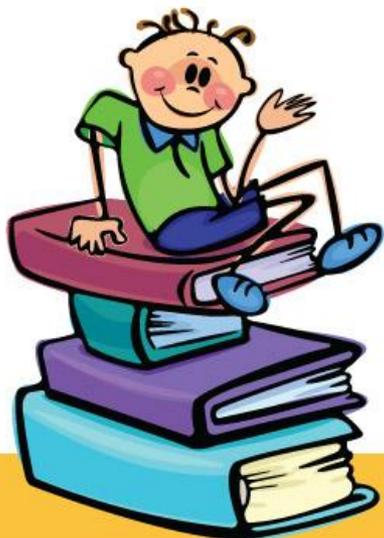
Вопрос №3

Дана геометрическая прогрессия
 $24, 6, 3/2, \dots$. Найти сумму всех её
членов.



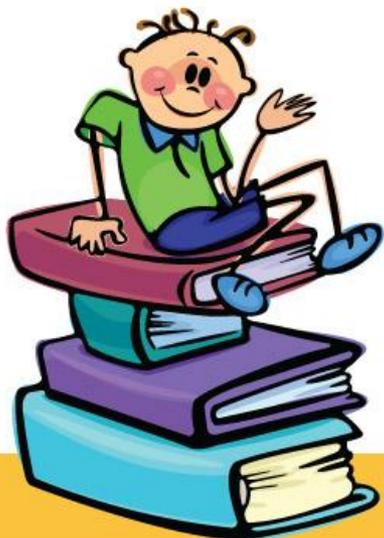
Вопрос №4

Дана арифметическая прогрессия с первым членом $a_1=5$. Найти разность этой прогрессии, если сумма первых семнадцати её членов равна 51.



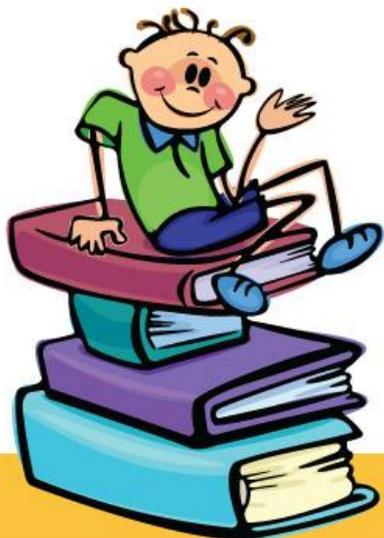
Вопрос №5

Дана арифметическая прогрессия с разностью $d=2$. Найти первый член этой прогрессии, если сумма первых двадцати её членов равна 20.



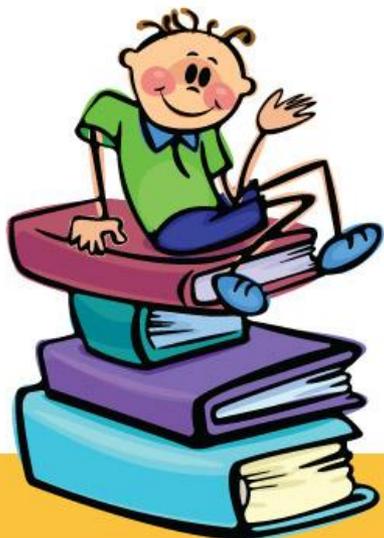
Вопрос №6

Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 5n - 7$. Какое из следующих чисел является членом этой прогрессии?



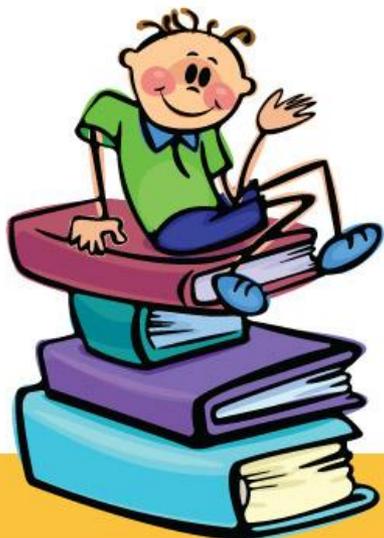
Вопрос №7

Геометрическая прогрессия задана формулой $b_n = 3 \cdot 2^n$. Какое из следующих чисел не является членом этой прогрессии?



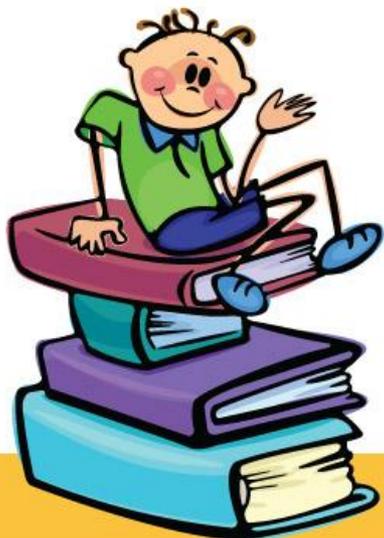
Вопрос №8

(b_n) - геометрическая прогрессия.
 $a_4 = -1$, $a_7 = 27$. Найдите знаменатель
этой прогрессии?



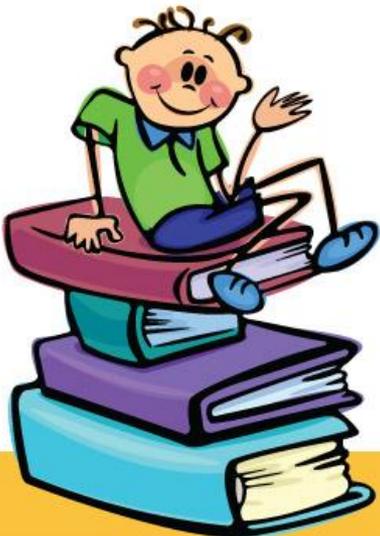
Вопрос №9

(a_n) - арифметическая прогрессия.
 $a_6=3$, $a_9=18$. Найти разность этой прогрессии?

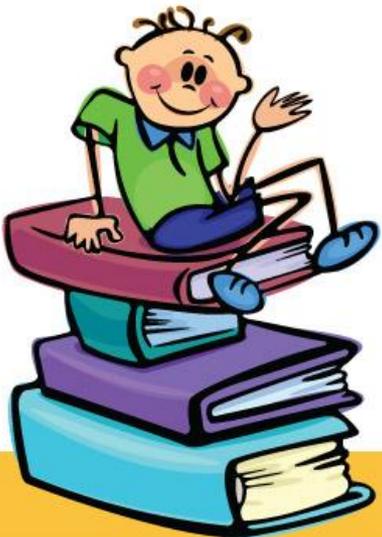


Вопрос №10

Записаны первые три члена геометрической прогрессии $-8, 4, -2$. Какое из следующих утверждений о данной последовательности является верным?



Результаты тестирования



Для выхода нажмите Esc