

Тема: Арифметические основы организации ЭВМ



1. Коды для представления чисел со знаком
2. Формы представления чисел
3. Диапазон и точность представления чисел



Коды для представления чисел со знаком

Чисел без знака (ЧБЗ), конечно, недостаточно для обеспечения вычислительных работ. Естественное же представление знаков «+» и «-» годится только для ввода-вывода.

Например, можно записать:

$$-45 = -55_8 = -101101_2 \text{ и т.п.}$$

При вычислениях знак числа кодируют. Обычно так: код знака «**плюс**» - это **0**, знак «**минус**» - **1**.

Коды для представления чисел со знаком

Для представления чисел со знаком принято использовать три таких **специальных кода**:

- прямой код;
- обратный код;
- дополнительный код.

Коды для представления чисел со знаком

Проще всего записываются числа в прямом коде:

$$(45)_{\text{пр}} = 0.45 = 0.55_8 = 0.101101_2,$$

$$(-45)_{\text{пр}} = 1.45 = 1,55_8 = 1.101101_2,$$

$$(-45,5)_{\text{пр}} = 1.45,5 = 1.55,4_8 = 1.101101,1_2.$$

Точка «.» в записи прямою кода отделяет знаковый разряд от цифровых разрядов.

Коды для представления чисел со знаком

Правило получения прямого кода:
цифровые разряды числа не изменяются, знаковый разряд отделяется от них точкой.

!!!, для **положительных** чисел все три кода **совпадают**. Поэтому формируем правило получения обратного кода для **отрицательных** чисел: цифровые разряды двоичного числа инвертируются.

Коды для представления чисел со знаком

Примеры.

$$(-45)_{\text{обр}} = (-101101_2)_{\text{обр}} = 1.010010_2,$$

$$(-45,5)_{\text{обр}} = (-101101,1_2)_{\text{обр}} = 1.010010,0_2.$$

Если система не двоичная ($q \neq 2$), действует общее правило: каждая цифра дополняется до значения $(q - 1)$.

Коды для представления чисел со знаком

Примеры.

$$\begin{aligned}(-45)_{\text{обр}} &= 1.54 = 1.22_8 \\ (-45,5)_{\text{обр}} &= 1.54,4_{\text{обр}} = 1.22.3_8\end{aligned}$$

Нуль в прямом и обратном кодах имеет двойное представление:

$$\begin{aligned}(+0)_{\text{пр}} &= 0.0 \dots 0, \\ (-0)_{\text{пр}} &= 1.0 \dots 0, \\ (+0)_{\text{обр}} &= 0.0 \dots 0, \\ (-0)_{\text{обр}} &= 1.1 \dots 1_2 = 1.9 \dots 9 = \dots\end{aligned}$$

Дополнительный код отрицательного числа может быть получен прямо или косвенно (через обратный код).

Коды для представления чисел со знаком

Прямое правило:

цифровые разряды отрицательного числа инвертируются, за исключением самой правой единицы и, возможно, стоящих за ней нулей (эта единица и нули не изменяются).

Коды для представления чисел со знаком

Примеры.

$$(-45)_{\text{доп}} = (-101101_2)_{\text{доп}} = 1.010011_2,$$

$$(-45,5)_{\text{доп}} = (-101101,1_2)_{\text{доп}} = 1.010010,1_2,$$

$$(-10)_{\text{доп}} = (-1010)_{2 \text{ доп}} = 1.0110_2.$$

Общее правило для системы с основанием q :

каждая цифра дополняется до значения $(q - 1)$, за исключением самой правой значащей цифры и, возможно, стоящих за ней нулей (эта цифра дополняется до значения q , а нули не изменяются).

Коды для представления чисел со знаком

Примеры.

$$(-45)_{\text{доп}} = 1.55 = 1.23_8$$

$$(-45,5)_{\text{доп}} = 1.54,5 = 1.22.4_8$$

$$(-10)_{\text{доп}} = 1.90$$

Коды для представления чисел со знаком

Косвенное правило: к обратному коду отрицательного числа надо добавить единицу в младшем разряде.

Интересной особенностью дополнительного кода является наличие единственного кода нуля:

$$(0)_{\text{доп}} = (+0)_{\text{доп}} = 0.0 \dots 0,$$

Это следует из косвенного правила для (-0) :

$$(-0)_{\text{доп}} = (-0)_{\text{обр}} + 1 = 1.1 \dots 1_2 + 1 = [1] 0.0 \dots 0_2.$$

Здесь в сложении участвуют все разряды, включая знаковый.

Коды для представления чисел со знаком

Невыребованность кодовой комбинации для (-0) позволяет несколько расширить диапазон значений, представимых в дополнительном коде.

Наибольшее по абсолютной величине отрицательное число имеет при общем количестве цифровых разрядов дополнительного кода n значение (-2^n) :

$$(-2^n)_{\text{доп}} = (-1 \ 0 \ \dots \ 0_2) = 1.0 \ \dots \ 0_2.$$

□ □ □

□ □ □

n

n

Коды для представления чисел со знаком

Это следует хотя бы из логики такой числовой последовательности:

$$(-6)_{\text{доп}} = (-110_2)_{\text{доп}} = 1.010_2$$

$$(-7)_{\text{доп}} = (-111_2)_{\text{доп}} = 1.001_2$$

$$(-8 = -2^3)_{\text{доп}} = (-1000_2)_{\text{доп}} = 1.000_2$$

Здесь справа – последовательные убывающие двоичные числа (точка-разделитель игнорируется).

Каждый из трех видов кода имеет модификацию.

В модифицированном коде – не один, а два знаковых разряда. Они имеют одинаковые значения (00 или 11).

Формы представления чисел в ЭВМ

Классификацию числовых форматов можно провести **по трем признакам**:

- основание системы счисления;
- наличие дробной части (целые или дробные числа);
- наличие экспоненциального множителя (числа с фиксированной или плавающей запятой).

Формы представления чисел в ЭВМ

В ЭВМ используются обычно 3 – 4 формата:

- **целые числа (двоичные; запятая фиксирована после младшего разряда);**
- **числа с фиксированной запятой (двоичные; дробные; запятая фиксирована после знакового разряда);**
- **числа с плавающей запятой (двоичные; дробные; имеются мантисса и порядок – показатель степени основания системы счисления);**
- **десятичные числа (целые; запятая фиксирована после младшего разряда).**

Формы представления чисел в ЭВМ

В современных ЭВМ «классический формат» с фиксированной запятой не используется. Его роль вполне реализует формат целых чисел (рис.1).

Кстати, при выполнении арифметических операций разница между этими форматами проявляется только на уровне умножения и деления. Код – дополнительный.



Рис. 1. Пример формата «целые числа»

Формы представления чисел в ЭВМ

Двоичные числа с плавающей запятой (рис. 2) имеют мантиссу (m_x) и порядок (p_x):

$$X = m_x * 2^{p_x}$$

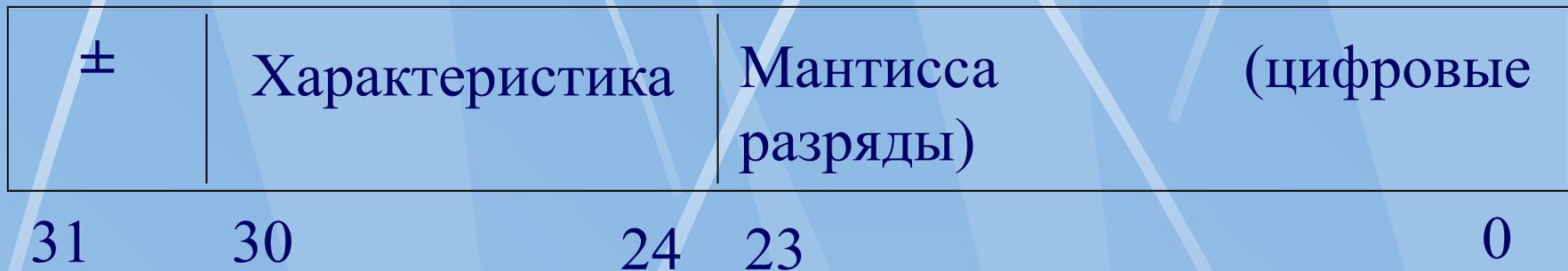


Рис. 2. Пример формата с плавающей запятой

Формы представления чисел в ЭВМ

Мантисса числа – это правильная дробь ($|m_x| < 1$), представлена в прямом коде. Знаковый разряд ее, или, что то же, знаковый разряд числа, – разряд {31}. Количество цифровых разрядов мантиссы в примере – 24.

Характеристика представляет собою число без знака (≥ 0), а именно – порядок, смещенный в неотрицательную область:

$$H_x = p_x + 64 = 0 \dots 127,$$

$$p_x = H_x - 64 = -64 \dots 63.$$

Формы представления чисел в ЭВМ

Выполнение действий $+/-$ над порядками, представленными в дополнительном коде, практически равнозначно аналогичным действиям над характеристиками. Способ кодирования знака при этом особой роли не играет. Сложение знаковых разрядов, правда, нужно «инвертировать» (вместо \oplus реализуется Ξ).

№	Порядок p (доп. код)		Характеристика $H = p + 8$	
1	7	0.111	1111	15
2	6	0.110	1110	14
...
7	1	0.001	1001	9
8	0	0.000	1000	8
9	-1	1.111	0111	7
...
15	-7	1.001	0001	1
16	-8	1.000	0000	0

Формы представления чисел в ЭВМ

Наибольшей точности числа с плавающей запятой соответствует его **нормализованное** представление:

$$2^{-1} \leq |m_x| < 1.$$

Таким образом, старшая двоичная цифра мантиссы должна быть единицей.

Формы представления чисел в ЭВМ

Десятичные числа в старых «больших» машинах (ЕС ЭВМ) представлены полями переменной длины – от 1 до 16 байтов. Ввод-вывод их осуществляется в распакованном (неупакованном, зонном) Z-формате (рис3.а), а обработка – в упакованном P-формате (рис. 3б).

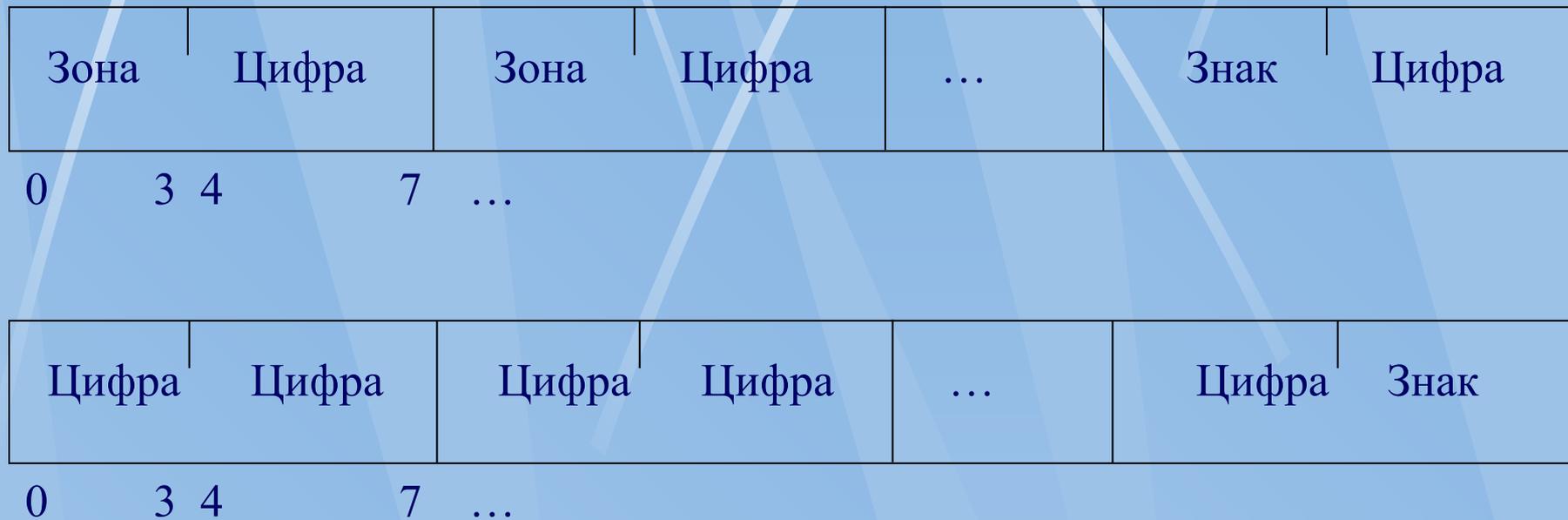


Рис. 3. Форматы десятичных чисел

Формы представления чисел в ЭВМ

«Зона» в неупакованном формате – это $1111_2 = F_{16}$.

Вместе с последующей двоичной тетрадой, представляющей десятичную цифру, зона образует байт символа, кодируемого в ДКОИ («Двоичный код обмена информацией»).

Код знака (в последнем, младшем байте) С, Е или P_{16} для «+» и D_{16} для «-».

В упакованном формате каждый байт, кроме последнего, содержит 2 десятичных цифры. Это означает, что десятичный операнд может иметь от 1 до 31 разряда.

Формы представления чисел в ЭВМ

Код для чисел со знаком – **прямой**.

Самое правое положение тетрады знака благоприятствует побайтному (последовательно-параллельному) выполнению арифметической операции, начинающейся с **младших** разрядов операндов.

В алгебраическом сложении используется **дополнительный** код, и для преобразования отрицательных операндов и результатов «прямой-дополнительный-прямой» требуется значительное время.

Диапазон и точность представления чисел

Диапазон представления целых чисел, заданных в формате $\{0:n\}$ (n – количество цифровых разрядов, равное 15 для случая рис. 1), определяется двойко:

$$X_{\min} \leq X \leq X_{\max}$$
$$0 \neq |X|_{\min} \leq |X| \leq |X|_{\max}$$

Учитывая особенность представления максимальных по абсолютной величине отрицательных чисел в дополнительном коде, получаем:

$$X_{\min} = -2^n, \quad X_{\max} = -2^n - 1$$
$$|X|_{\min} = 1, \quad |X|_{\max} = 2^n,$$

Диапазон и точность представления чисел

Для $n = 15$ (рис.1) находим:

$$-2^{15} = -32\,768 \leq X \leq 2^{15} - 1 = 32\,767,$$
$$1 \leq |X| \leq 32\,768.$$

Машинное представление здесь таково:

$$(X_{\min})_{\text{доп}} = 1.0 \dots 0_2$$

□ □ □

n

$$(X_{\max})_{\text{доп}} = 0.1 \dots 1_2$$

□ □ □

n

Диапазон и точность представления чисел

Точность представления чисел связывается обычно с количеством значащих цифр (двоичных, десятичных, ...).

Для **целых** форматов оценка этой точности фактически **равнозначна** оценке диапазона. Она определяется n двоичными разрядами.

Для получения более привычной десятичной оценки можно воспользоваться естественным соотношением:

$$2^x \approx 10^y,$$

$$x \lg 2 \approx y,$$

$$y \approx 0,3010 x \approx 0,3 x.$$

Десятичная точность целых форматов – **0,3n**.

Например, $15 \times 0,3 = 4,5$.

Диапазон и точность представления чисел

Диапазон для чисел с плавающей запятой абсолютно симметричен (в силу прямого кода мантиссы):

$$|X_{\min}| = |X_{\max}| = |X|_{\max}'$$

Поэтому здесь интерес представляет только диапазон для модуля:

$$|X|_{\min \text{ норм}} \leq |X| \leq |X|_{\max}'$$

Индекс «норм» означает **нормализованность** чисел с плавающей запятой:

$$2^{-1} \leq |m_x| < 1.$$

Старшая двоичная цифра мантиссы должна быть 1.

Диапазон и точность представления чисел

$$|X|_{\min \text{ норм}} \leq 2^{-1} * 2^{-64} = 2^{-65} \approx 10^{-19}.$$

$$|X|_{\max} = (1 - 2^{-n_m}) * 2^{63} \approx 2^{63} \approx 10^{19}.$$

Здесь n_m – количество двоичных цифровых разрядов мантиссы (на рис.2 их 24).

!!! Разрядность мантиссы существенно определяет **точность чисел с плавающей запятой.**

Диапазон и точность представления чисел

Значащие цифры числа, независимо от его представления, – это значащие цифры **мантиссы**.

24-разрядная мантисса (рис. 2) соответствует точности 7 десятичных цифр.

Диапазон и точность представления десятичных чисел, как и чисел с фиксированной запятой (в частности, целых), оцениваются одинаково – длиной формата. Оценка для симметричного диапазона в случае упакованного 16-байтного формата (рис. 3):

$$0 \neq 1 \leq |x| \leq 10^{31} - 1,$$

для точности – 31 десятичная цифра.