Формулами дифференцирования обычно называют формулы для отыскания производных конкретных функций, например:

$$C' = 0;\ \mathrm{x}' = 1;\ (\mathrm{kx} + \mathrm{m})' = \mathrm{k};\ (\mathrm{x}^2)' = 2\mathrm{x};$$
$$(\mathrm{x}^3)' = 3\mathrm{x}^2;\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Правила дифференцирования:

$(ku)' = ku'$

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Таблица производных:

f(x)	c, где c=const	x	x^n			sinx	cosx	tgx	ctgx	a^x	e^x	lnx	log
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	cosx	-sinx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$a^x \ln a$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln a}$

Пример 1. Найти значение производной данной функции в данной точке: а) $y = -2x + 7$, $x = \sqrt{5}$; б) $y = x^2$, $x = -2$; в) $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{3}$; г) $y = \sqrt{x}$, $x = 9$; д) $y = \sin x$, $x = \pi$; е) $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

а) $(-2x+7)' = -2 \Rightarrow f'(\sqrt{5}) = -2;$

б) $(x^2)' = 2x \Rightarrow f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4;$

в) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -9;$

г) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6};$

д) $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow f'(\pi) = \cos\pi = -1;$

е) $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Пример 2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = -1$.

Решение.

$$\boxed{y = kx + m}$$

$$k = f'(-1);$$
$$(x^2)' = 2x \Rightarrow f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2;$$
$$y = -2x + m$$
$$y = x^2, \qquad x = -1, \qquad (-1; 1);$$
$$1 = (-2) \cdot (-1) + m;$$
$$m = -1;$$
$$y = -2x - 1.$$

Ответ: $y = -2x - 1$. ◾

Найдём производную функции $y = \sqrt{x}$.

1) Для фиксированного значения x (при $x > 0$) имеем: $f(x) = \sqrt{x}$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$.

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Таким образом, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Найдём производную функции $y = \sin x$.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x) = \sqrt{x}$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{(x+\Delta x)-x}{2}\cos\frac{(x+\Delta x)+x}{2} =$

$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{x} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$; $\quad \frac{\Delta x}{2} = t$; $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin t\cos(x+t)}{t}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\sin t\cos(x+t)}{t} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\sin t}{t} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0}\cos(x + t)$.

$\Delta x \to 0;\ t = \frac{\Delta x}{2}$;

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\sin t\cos(x + t)}{t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0}\cos(x + t).$$

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$.

Правило 1. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то их сумма имеет производную в точке x, причём производная суммы равна сумме производных:

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x).$$

1) $f(x) + g(x) = h(x)$. При постоянном x имеем: $h(x) = f(x) + g(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = \big(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)\big) - \big(f(x) + g(x)\big) =$
$= \big(f(x + \Delta x) - f(x)\big) + \big(g(x + \Delta x) - g(x)\big) = \Delta f + \Delta g$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$;

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$.

$$(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x.$$

Правило 2. Если функции $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция $y = kf(x)$ имеет производную в точке x, причём:

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

1) $kf(x) = h(x)$. При постоянном x имеем: $h(x) = kf(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $h(x + \Delta x) = kf(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = kf(x + \Delta x) - kf(x) = k\big(f(x + \Delta x) - f(x)\big) = k\Delta f$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta f}{\Delta x} = k\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k\frac{\Delta f}{\Delta x} = k \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = kf'(x)$.

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$$

$$\left(-\frac{\cos x}{3}\right)' = -\frac{1}{3}(\cos x)' = -\frac{1}{3}(-\sin x) = \frac{1}{3}\sin x\,.$$

Правило 3. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то их произведение имеет производную в точке x, причём:

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$$\big((2x+3)\sin x\big)' = (2x+3)'\sin x + (2x+3)(\sin x)' = 2\sin x + (2x+3)\cos x.$$

Правило 4. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, причём $g(x) \neq 0$, то и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x, причём:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

$$\left(\frac{x^2}{5-4x}\right)' = \frac{\left(x^2\right)'(5-4x)-x^2(5-4x)'}{(5-4x)^2} = \frac{2x(5-4x)-x^2(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{10x-4x^2}{(5-4x)^2}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = 3x^2 - 4x + 2$.

Решение.

$$y' = (3x^2 - 4x + 2)' = (3x^2)' + (-4x + 2)' = 3(x^2)' + (-4) = 3 \cdot 2x - 4 = 6x - 4$$

Ответ: $y' = 6x - 4$. ◀■

Пример 4. Найти производные функций: а) $y = x^4$; б) $y = x^5$.

Решение.

а) $(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3(x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3$.

б) $(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4(x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4$.

Ответ: а) $(x^3)' = 4x^3$; б) $(x^5)' = 5x^4$. ◀■

$$x' = 1;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$(x^4)' = 4x^3;$$
$$(x^5)' = 5x^4.$$

Гипотеза. Для любого натурального показателя n справедлива формула дифференцирования:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Пример 5. Найти точки, в которых касательная к графику функции $y = x^3 - 3x + 2$ параллельна оси x.

Решение.

$y' = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3;$

Имеем: $3x^2 - 3 = 0$; находим: $x_1 = 1, x_2 = -1;$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0;$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4;$

$(1; 0), (-1; 4).$

Пример 6. Найти производные функций: а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

Решение.

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x + \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Пример 5. Найти производные функций: а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

Решение.

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x + \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin^2 x}}$$

Наряду с прямой задачей решают обратную.
Известна производная, нужно найти саму функцию.

$$f'(x) = \cos x\,, f(x) = \sin x\,;$$

$$f'(x) = x^3, f(x) = \frac{x^4}{4};$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot (x^4)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3.$$

$y = \sin x\,, y = \cos x\,, y = \operatorname{tg} x, y = \sqrt{x};$

$y = \sin 2x\,, y = \cos\left(2 + \frac{x}{2}\right).$

$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x}$

$$(\sin 2x)' = (2 \sin x \cos x)' = 2\big((\sin x)' \cos x + \sin x\,(\cos x)'\big) =$$
$$= 2\big(\cos x \cos x + \sin x\,(\sin x)\big) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x\,.$$

$\boxed{\sin kx\,, kx \text{ — аргумент}}$

$(\cos(-7x))' = 7 \cdot \sin(-7x)\,;$

$\left(\sin \sqrt{5}x\right)' = \sqrt{5} \cos \sqrt{5}x\,;$

$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{4}};$

$\left((-x + 1)^5\right)' = -1 \cdot 5(2x + 1)^4 = -5(2x + 1)^4.$

Теорема. Производная функции $y = f(kx+m)$ вычисляется по формуле $\left(f(kx+m)\right)' = kf'(kx+m)$.

Пример 7. Найти значение производной функции $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt{8 - 1{,}15x}$, в точке $x = 5$.

Решение.

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

1) Под знаком корня напишем не x, а $8 - 1{,}15x$.

2) Укажем дополнительный множитель, равный $-1{,}15$ — это коэффициент при x.

$$\left(\sqrt{8 - 1{,}15x}\right)' = -1{,}15 \cdot \frac{1}{2\sqrt{8 - 1{,}15x}};$$

$$x(5) = -1{,}15 \cdot \frac{1}{2\sqrt{8 - 1{,}15 \cdot 5}} = -1{,}15 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2{,}25}} = -\frac{1{,}15}{3} = -\frac{23}{60}.$$

Ответ: $f'(5) = -\frac{23}{60}$. ■