Свойства аналитических ФКП

Утв. (о результатах арифметических операций над АФ).

$$\Big(f(z), g(z) \in A(D)\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(\big(f(z) \pm g(z)\big) \in A(D)\Big) \wedge$$

$$\wedge \Big(\big(f(z) \cdot g(z)\big) \in A(D)\Big) \wedge$$

$$\wedge \left(\frac{f(z)}{g(z)} \in A(D),\ g(z) \neq 0\ \forall z \in D\right)$$

Утв. (об аналитичности композиции АФ).
Если $\boldsymbol{w = f(z) \in A(D(z))}$, а в области ее значений $\boldsymbol{E(w)}$ определена АФ $\boldsymbol{g = \phi(w)}$, то функция $\boldsymbol{F(z) = \phi(f(z)) \in A(D(z))}$.

П. Функция

$$F(z) = e^{\sin z} \in A\big(C(z)\big),$$

т.к.

$$\big(w = f(z) = \sin z \in A\big(C(z)\big)\big) \wedge$$
$$\wedge \big(g = \varphi(w) = e^{w} \in A\big(C(w)\big)\big).$$

Утв. (об аналитичности обратной функции).

$$\left(w = f(z) \in A\left(D(z)\right)\right) \wedge \left(f'(z) \neq 0 \, \forall z \in D(z)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\exists f^{-1}(w) \in A\left(E(w)\right)\right) \wedge \left(\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'(z)}\right).$$

Утв. (о бесконечной дифференцируемости АФ).

Функция ***f*(*z*)**, аналитическая в области ***D*** имеет в каждой точке этой области производные любого порядка:

$$\left(f(z) \in A\left(D(z)\right)\right) \Rightarrow \left(f(z) \in C^{\infty}\left(D(z)\right)\right).$$

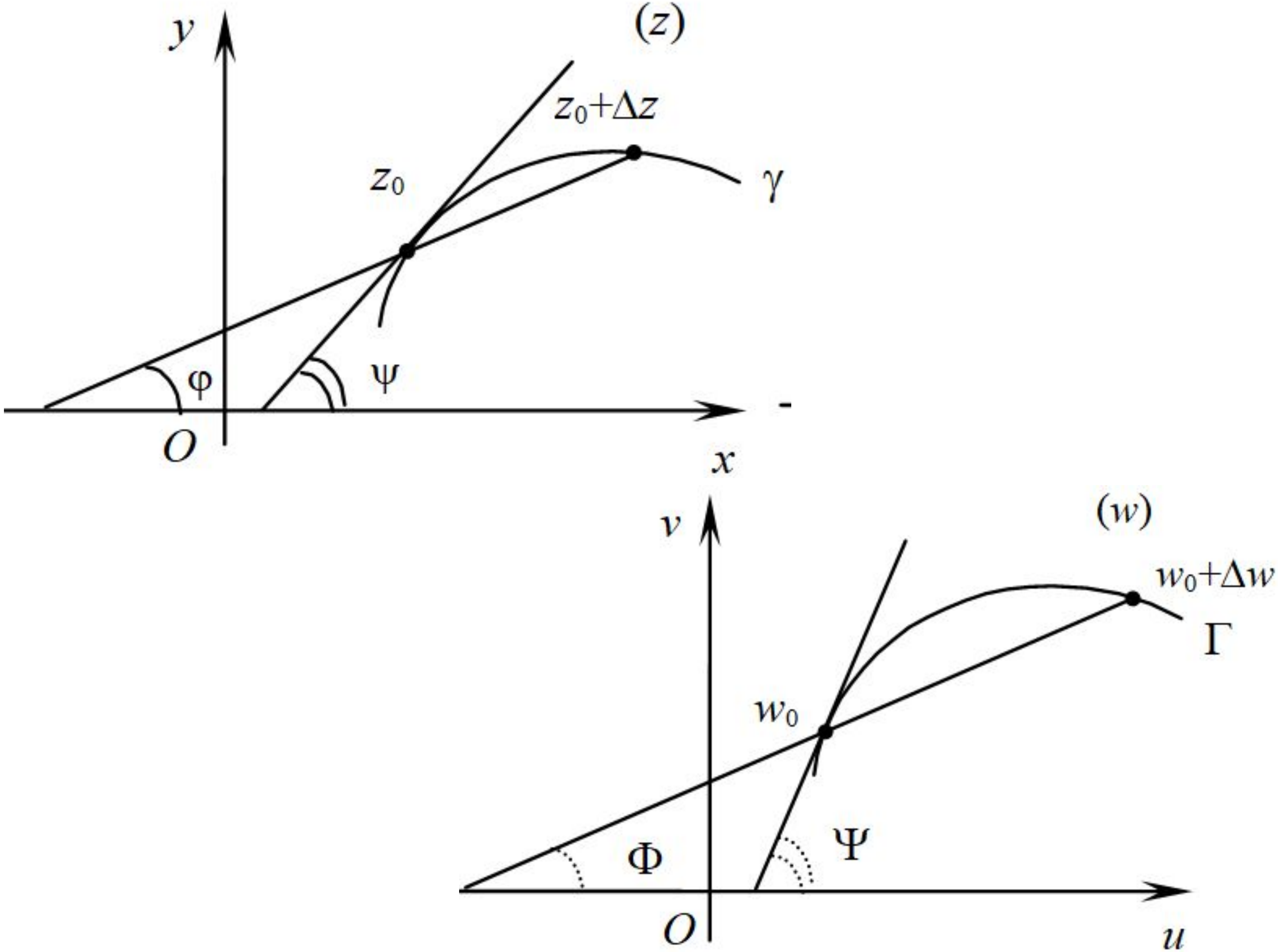
Геометрический смысл производной ФКП

Пусть $\boldsymbol{w = f(z)}$ – аналитическая в точке $\boldsymbol{z_0}$.

$$\exists f'(z_0) = k(\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq 0$$

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| \dfrac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \left| f'(z_0) \right| \\ \exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \arg f'(z_0) \end{cases}$$



(z)
y
$z_0+\Delta z$
z_0
γ
φ
ψ
O
x
(w)
v
$w_0+\Delta w$
Γ
w_0
Φ
Ψ
O
u

$$k = \left| f'(z_0) \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left| \Delta w \right|}{\left| \Delta z \right|}$$

- коэффициент локального растяжения ($k>1$) или сжатия ($k<1$);

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z$$

$$\alpha = \lim_{\Delta z \to 0} \Phi - \lim_{\Delta z \to 0} \varphi = \Psi - \psi,$$

– это угол, на который нужно повернуть касательную в точке $\mathbf{z_0}$ к кривой $\boldsymbol{\gamma}$, чтобы получить угол, образованный касательной к кривой $\mathbf{\Gamma}$ в точке $\mathbf{w_0}$.

Понятие конформного отображения

Опр. Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0, осуществляемое функцией $w = f(z)$, называется ***конформным***, если в точке z_0 оно обладает свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжений.

Опр. Отображение $w = f(z)$ называется ***конформным в области D***, если оно конформно в каждой точке этой области.

Т. (критерий конформности).

Для того чтобы отображение $\boldsymbol{w = f(z)}$ было конформным в области $\boldsymbol{D}$, необходимо и достаточно, чтобы в этой области функция $\boldsymbol{w=f(z)}$ была однолистной и аналитической, причем

$$f'(z) \neq 0 \ \forall z \in D.$$

Упр. Доказать, что отображение $\boldsymbol{f(z) = e^z}$ конформно в каждой точке $\boldsymbol{z \in C}$, однако не является конформным во всей $\boldsymbol{C}$.

Лекция 5

Интегрирование ФКП

Пусть на комплексной плоскости задана кривая ***AB*** – ориентированная, незамкнутая, кусочно-гладкая, без самопересечений:

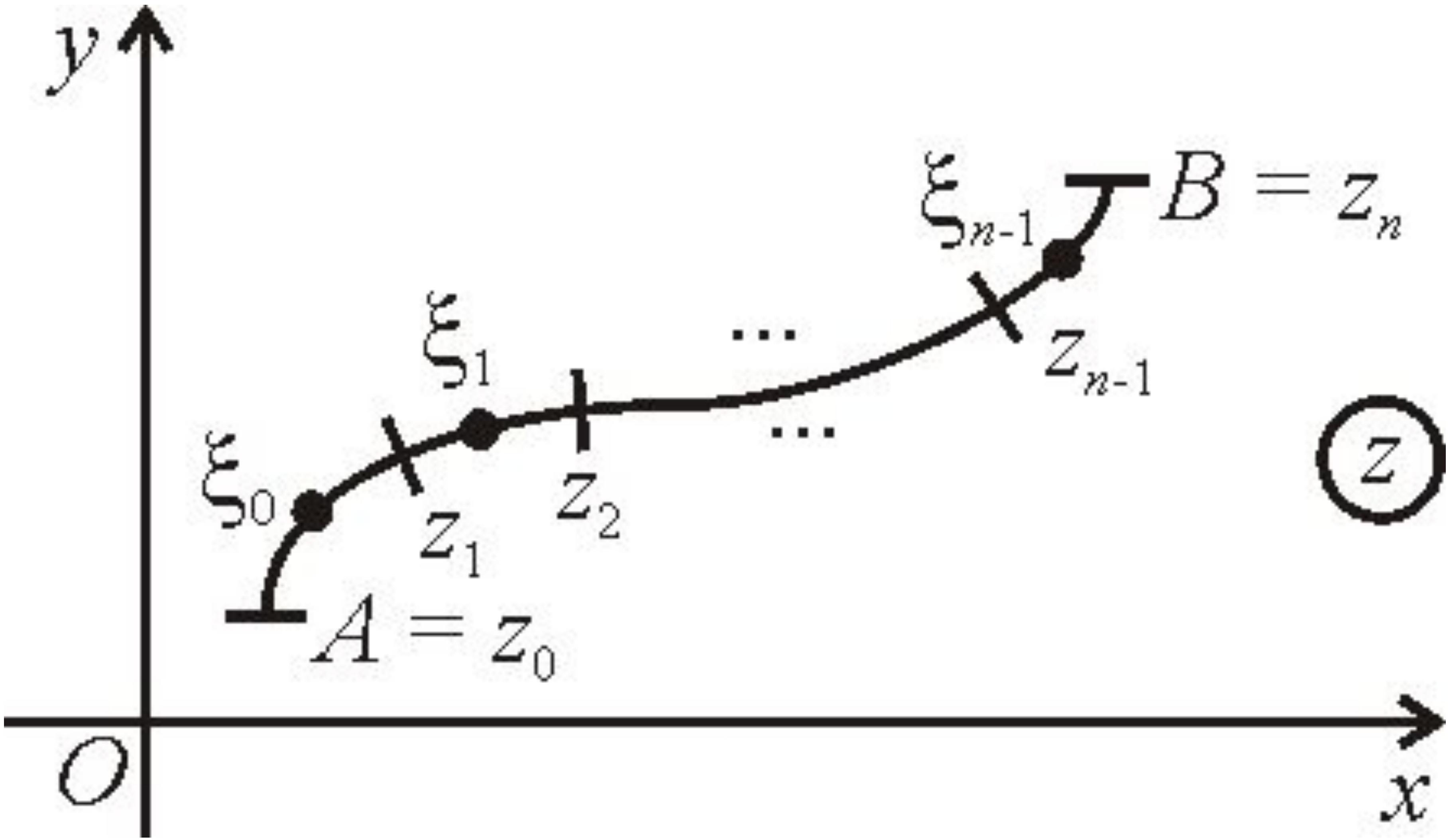
$$AB = \left\{ z \in C : z(t) = x(t) + iy(t),\ \alpha \le t \le \beta \right\}$$

Разобьем AB произвольным образом:

$$A = z_0, z_1, z_2 \dots\ z_n = B$$

На каждом из участков выберем произвольные точки

$$\xi_0, \xi_1, \dots\ , \xi_{n-1}$$



y
B = z_n
ξ_{n-1}
ξ_1
...
z_{n-1}
...
z
ξ_0
z_1
z_2
A = z_0
O
x

Пусть на дуге ***AB*** определена ФКП ***f*(*z*)**. Найдем ее значения в точках:

$$f(\xi_0), f(\xi_1), \ldots, f(\xi_{n-1})$$

и составим интегральную сумму:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k$$

Опр. Если существует

$$\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k,$$

не зависящий от способа разбиения дуги AB и выбора точек ξ_k, то этот предел называют **интегралом ФКП по кривой *AB*** и обозначают:

$$\boxed{\int\limits_{AB} f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k .}$$

***T.* (о существовании интеграла ФКП)**

Пусть функция ***f(z)*** непрерывна на некоторой кусочно-гладкой кривой ***L***, тогда интеграл по кривой ***L*** от этой функции существует, причем если

$$f\left(z\right)=u(x,y)+iv\left(x,y\right)$$

то

$$\int_L f(z)dz=\int_L \left(u+iv\right)d\left(x+iy\right)=$$

$$=\int_L udx-vdy+i\int_L udy+vdx;$$

если $L=\left\{z(t),\, \alpha\le t\le\beta\right\},$ то

$$\int_L f\left(z\right)dz=\int_\alpha^\beta f\left(z\left(t\right)\right)z'\left(t\right)dt.$$

Свойства интеграла от ФКП

1. $$\int_{L^+} f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz$$

2. $$\int_L \left[Af(z) \pm Bg(z) \right] dz = A\int_L f(z)dz \pm B\int_L g(z)dz$$

3. $$\int_{L_1 \cup L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz$$

4. $$\left| \int_L f(z)dz \right| \leq M \cdot l,$$

где $$\left| f(z) \right| \leq M, \quad z \in L;$$

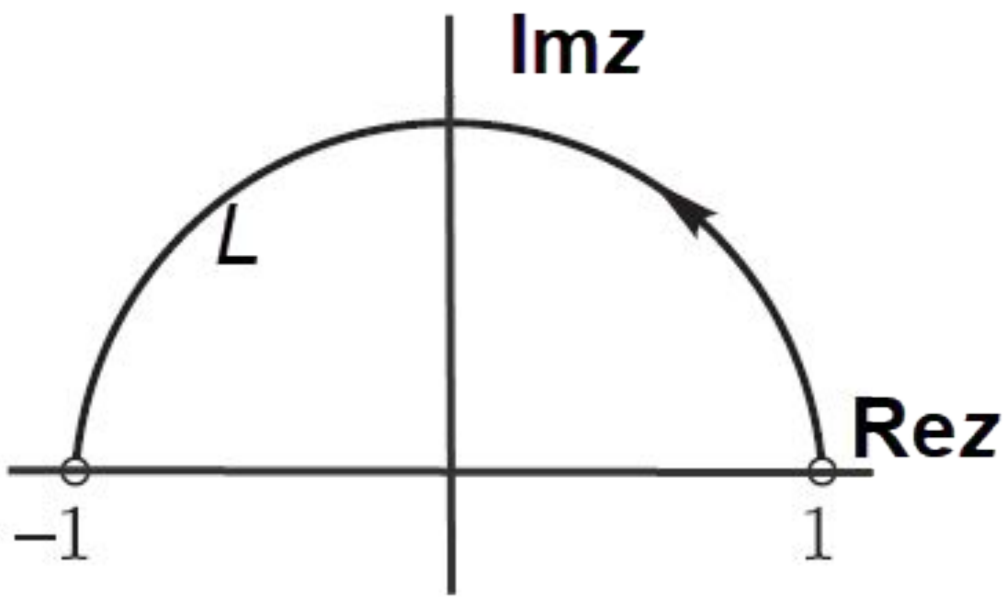
$$l = length(L).$$

П. Вычислить

$$\int_L |z|\,\overline{z}\,dz,$$

где L – часть окружности

$$L=\{|z|=1,\ 0\le \arg(z)\le \pi\}$$



Параметризация:

$$L = \left\{ z = e^{it},\ 0 \le t \le \pi \right\}$$

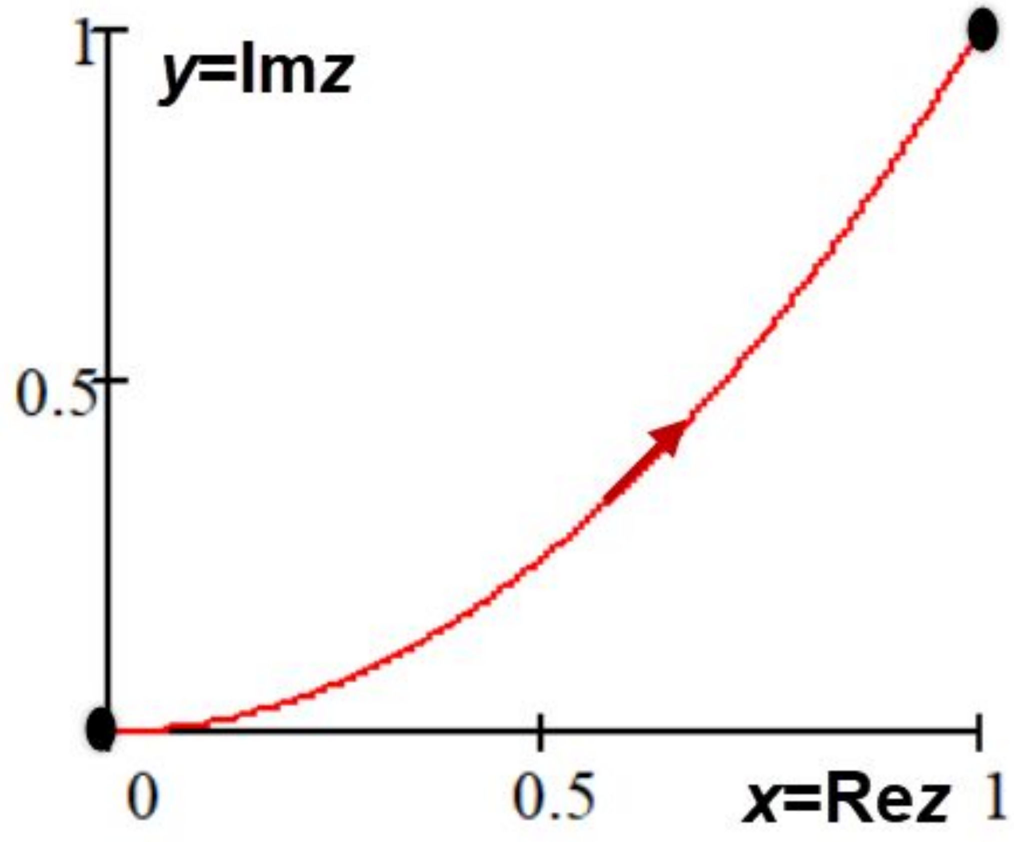
$$\int_L |\, z \,| \,\overline{z}\, dz = \left| \begin{matrix} \overline{z} = e^{-it} \\ dz = ie^{it}\, dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-it} i e^{it} dt = i \int_0^{\pi} dt = \pi i.$$

II. Вычислить

$$\int_L \left(z^2 + z\bar{z} \right) dz,$$

где L – дуга параболы $L = \left\{ y = x^2,\ 0 \le x \le 1 \right\}.$



Выделим действительную и мнимую части подынтегральной функции:

$$z^2 + z\bar{z} = \left(x+iy\right)^2 + \left(x+iy\right)\left(x-iy\right) =$$

$$= 2x^2 + i2xy.$$

$$\int_L \left(z^2 + z\bar{z}\right)dz = \int_L (u+iv)d\left(x+iy\right) =$$

$$= \int_L \left(2x^2 + i2xy\right)d\left(x+iy\right) = \begin{vmatrix} y = x^2, \\ 0 \le x \le 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2 + i2xx^2\right)d\left(x+ix^2\right) =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2 - 4x^4\right) dx + i \int_0^1 \left(4x^3 + 2x^3\right) dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(x^2 - 2x^4\right) dx + 6i \int_0^1 x^3 dx = -\frac{2}{15} + \frac{3}{2} i.$$