ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод хорд

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дано F$(x)=0$, где F(x) определена на $[a;b]$ и удовлетворяет следующим условиям:

Необходимое условие существования корня на отрезке [a,b]

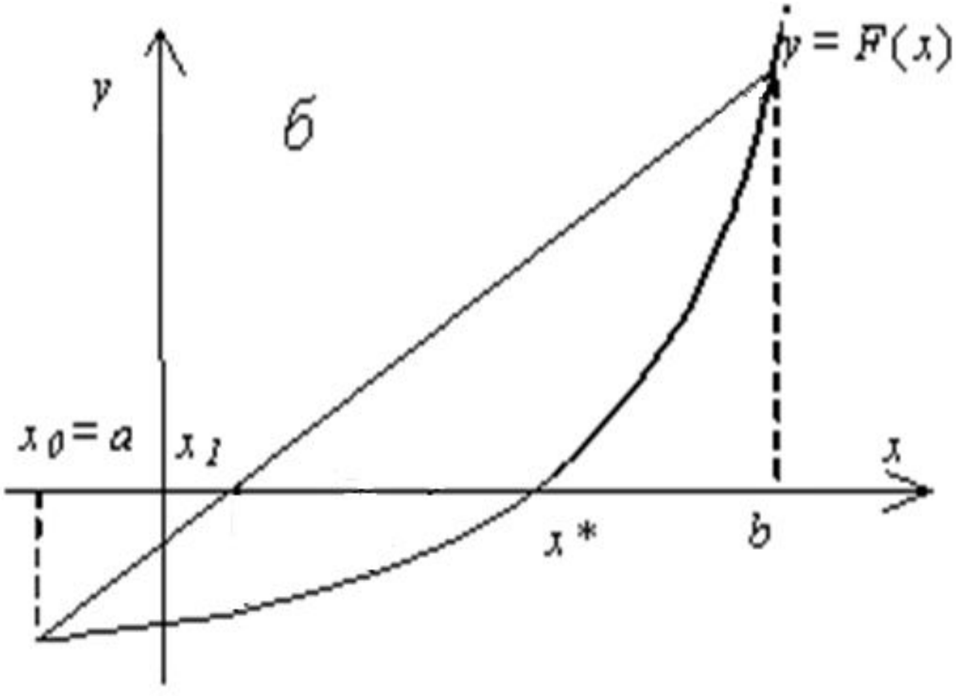
F(x) непрерывна и F(a)F(b)<0

Достаточное условие единственности корня

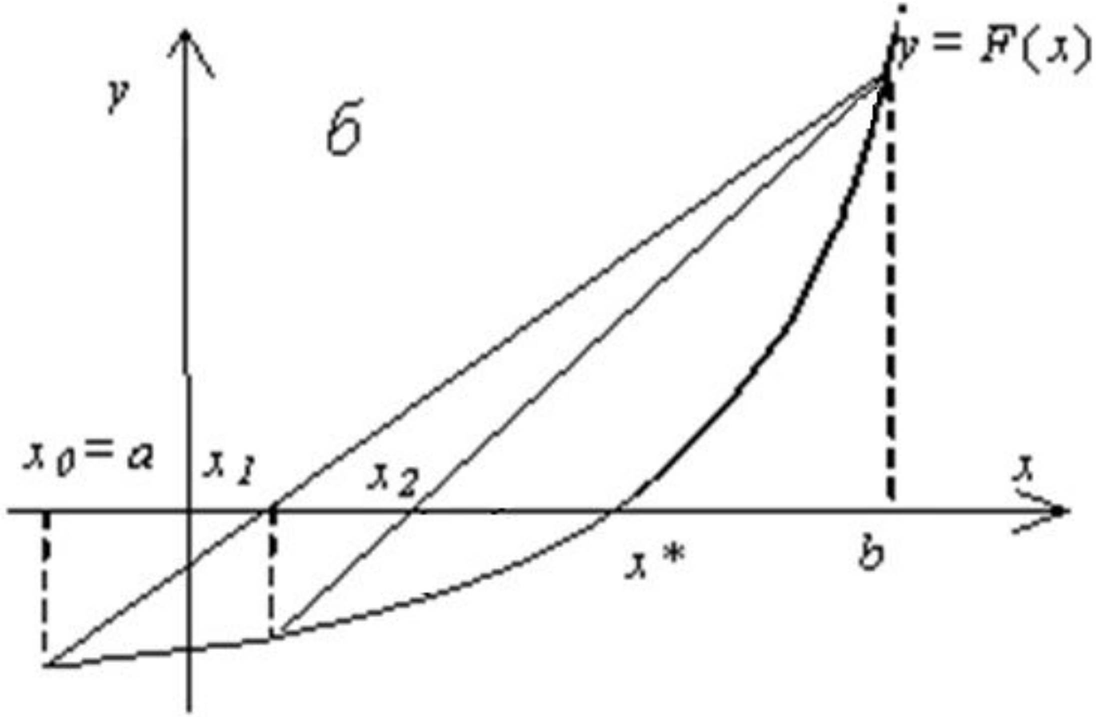
$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

СУТЬ МЕТОДА ХОРД

1. Нелинейная функция f(x) на отделенном отрезке заменяется прямой линией – хордой, стягивающей точки
(a, f(a))
и (b, f(b)).

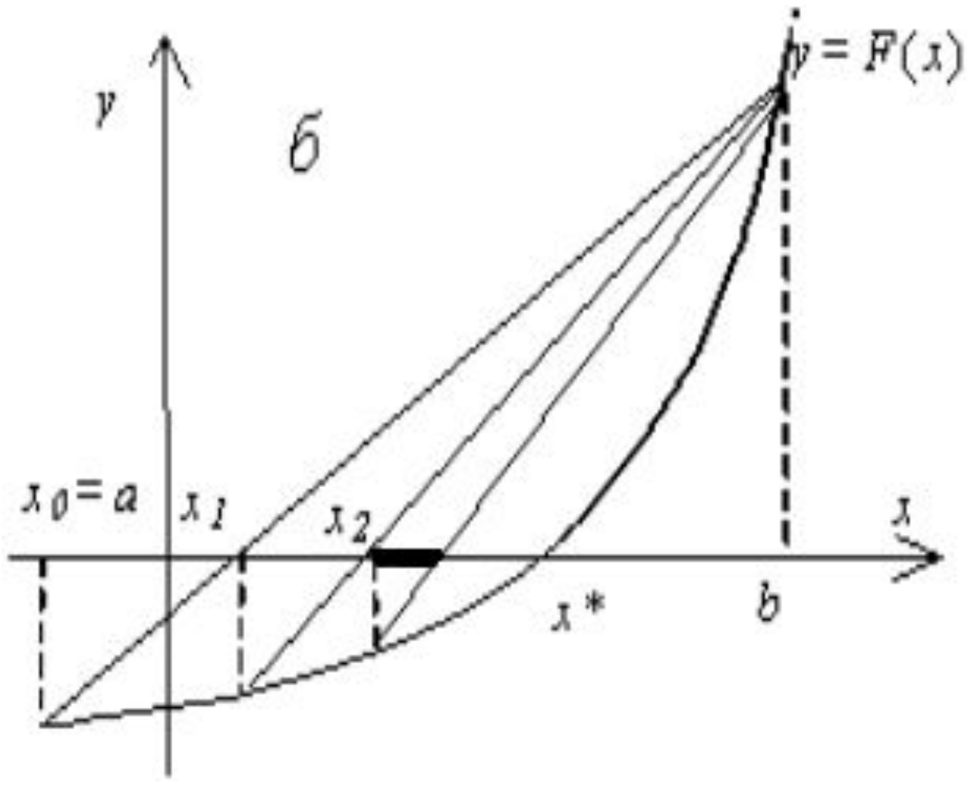


2. Находится точка пересечения хорды с осью ОХ. Эту точку принимают за новую границу отрезка приближение



$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

верно, итерации повторяются



ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА ХОРД

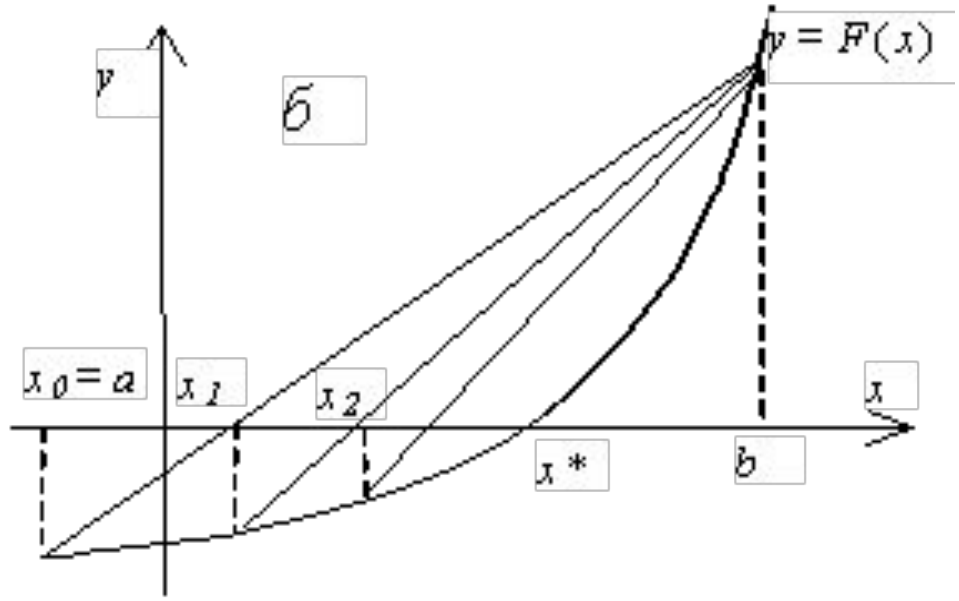
$F^{'}(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

$F^{'}(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

ВАРИАНТЫ АЛГОРИТМА МЕТОДА

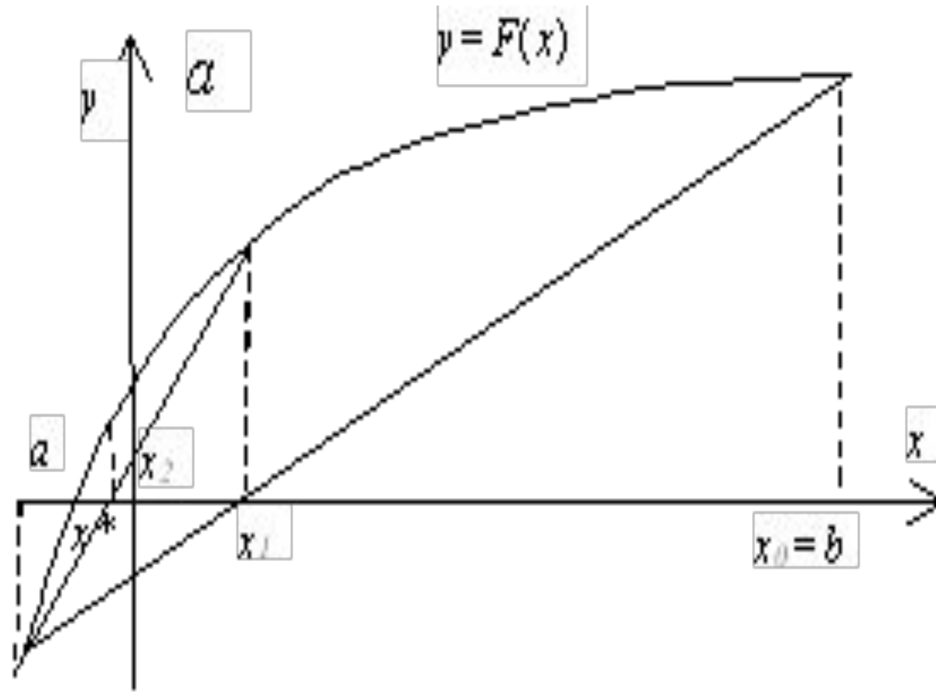
$f(b)\, f''(b) > 0$

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция



$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция



$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) — монотонная функция

$$f'(x) = 6x – 0{,}4$$

$f(-1) = -1 – 0{,}2 – 0{,}5 + 1{,}5 = -0{,}2 < 0;$

$f(0) = 1{,}5 > 0.$

$f'(-1) = -6 – 0{,}4 = -6{,}4 < 0;$

$f'(0) = -0{,}4 = -0{,}4 < 0.$

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

Для вычислений применяем следующую формулу

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

Все вычисления можно свести в таблицу

Xi	f(Xi)	|Xi-Xi+1|		a	b	f(a)
0	1,5	1		-1,000	0,000	-0,200
-0,882	0,2162	0,882				
-0,943	0,0105	0,061				
-0,946	0,0005	0,003				
-0,946	0,0000	0,000				
-0,946	0,0000	0,000				

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

$F^{'}(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

$$f'(x) = 6x$$

$$f(-2) = -3 < 0;$$

$$f(-1) = 4 > 0.$$

$$f'(-2) = -12 < 0;$$

$$f'(-1) = -6 < 0.$$

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

Для вычислений применяем следующую формулу

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

Xi	f(Xi)	|Xi-Xi+1|		a	b	f(a)
-1	4			-2,000	-1,000	-3,000
-1,571	1,11953	0,571				
-1,688	0,19118	0,116				
-1,707	0,02959	0,019				
-1,709	0,00451	0,003				
-1,710	0,00069	0,000				

Домашнее задание: решить уравнение методом хорд

x3- 6x2+3x+11=0

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод Ньютона (касательных)

ИДЕЯ МЕТОДА

аналогична той, которая реализована в методе хорд, только в качестве прямой берется касательная, проводимая в текущей точке.

Метод применим к выпуклым и монотонным функциям

Выбор начальной точки

зависит от свойств функции:

$F^{'}(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

$F^{'}(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

Очередное приближение

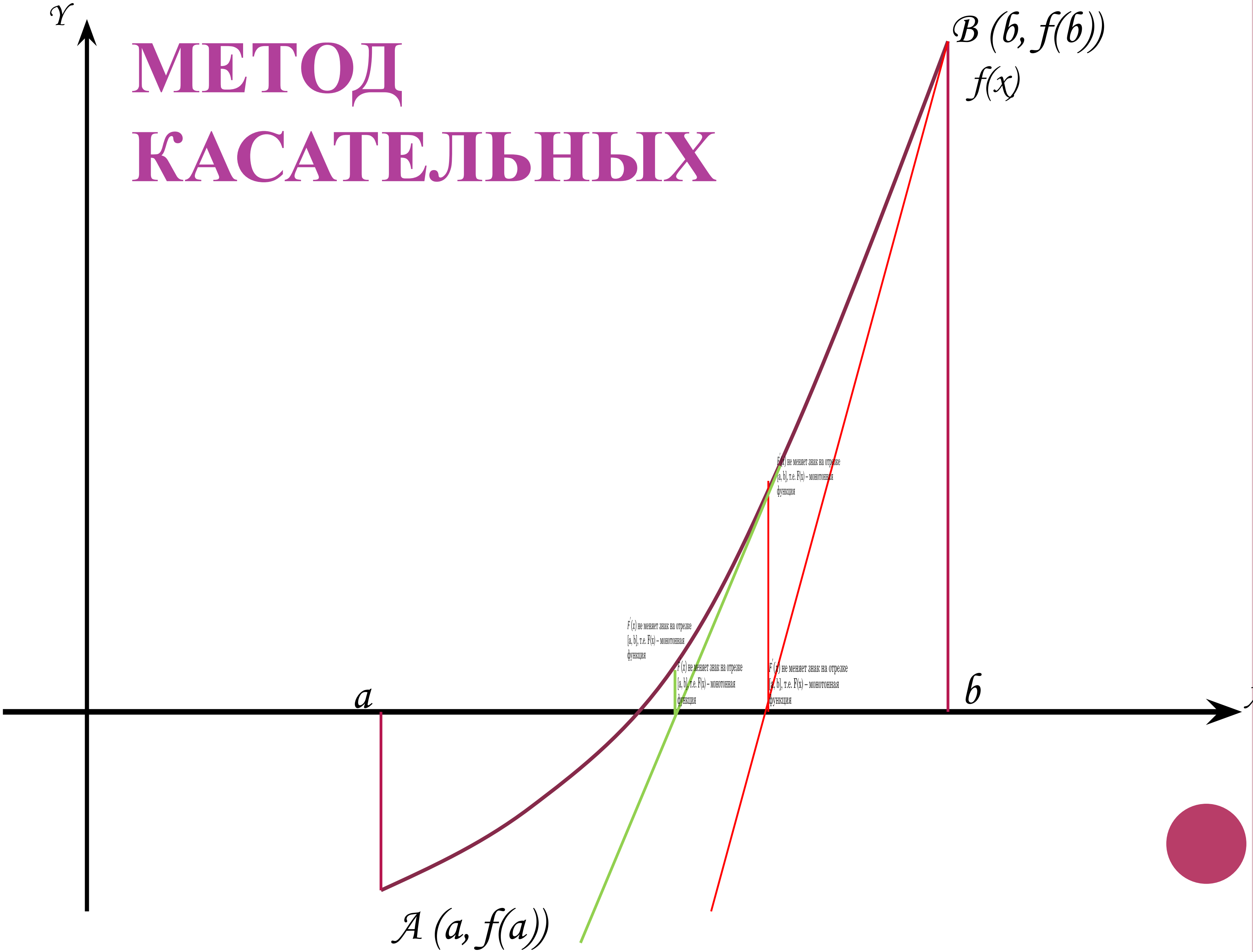
вычисляется по формуле:

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

Вычисления продолжаются до тех пор, пока

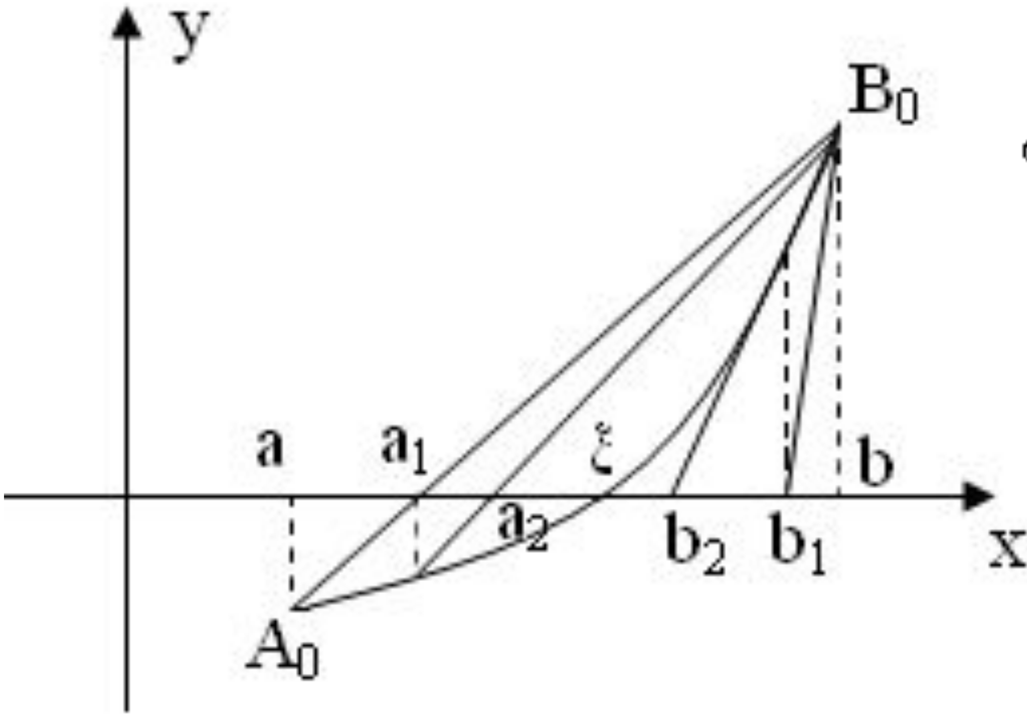
МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ



ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Комбинирован-ный метод

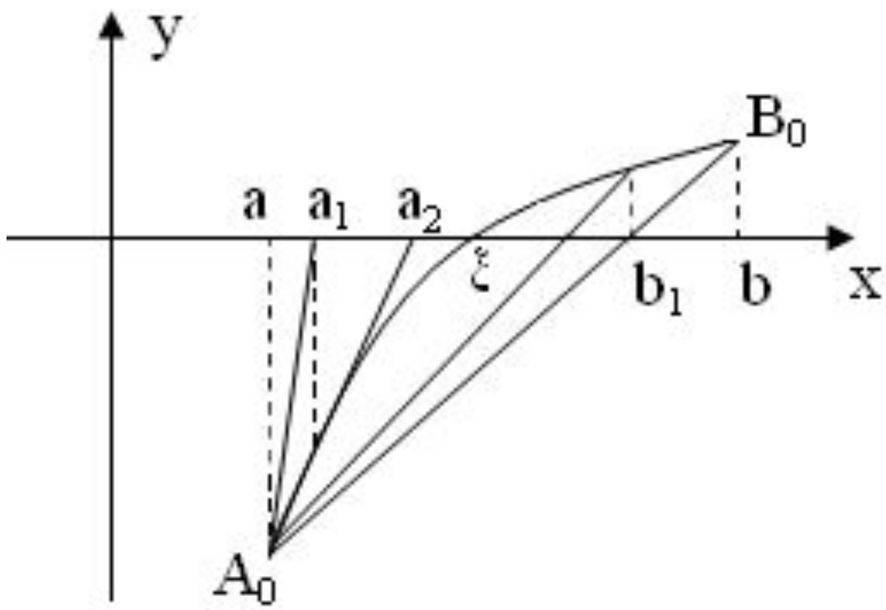
$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция



$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}$$

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция



$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке [a, b], т.е. F(x) – монотонная функция

Пример

Дано уравнение: $x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0$.

Найти корень на отрезке [-2;-1]с погрешностью е < 0,1

Решение:

Проверим условие

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \qquad f''(x) = 6x - 4$$

$f(-2) = -1;$

$f(-1) = 8$

$f''(-2) = -16$

$f''(-1) = -10$

Вывод: условие выполняется для левой стороны отрезка, т.е. с правой стороны будем приближаться методом хорд, а с левой стороны - методом касательных

ai	bi	f(a)	f(b)	f'(a)	ai-bi
-2	-1	-1	8	16	1
-1,9375	-1,88889	-0,03101	0,680384	15,01172	0,048611

$$a_{n+1} = a_n - \frac{\quad}{f'(a_n)}$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

ai	bi	f(a)	f(b)	f'(a)	ai-bi
-2	-1	-1	8	16	1
-1,9375	-1,88889	-0,03101	0,680384	15,01172	0,048611

Корень=-1,91