Методы одномерной оптимизации

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одномерная оптимизация заключается в нахождении точки x^*, в которой целевая функция $f(x^*)$ принимает максимальное или минимальное значение. Часто в постановках задачи может быть задан отрезок $[a, b]$, в котором находится оптимальное значение.

Функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x^*, если при $\varepsilon > 0$ существует окрестность $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ такая, что для всех значений x в этой окрестности $f(x)$ больше $f(x^*)$. Функция $f(x)$ имеет глобальный минимум в точке x^*, если для всех x справедливо неравенство $f(x) > f(x^*)$.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ

Необходимые и достаточные условия экстремума

Классический подход к задаче нахождения экстремумов функции состоит в поиске условий, которым они должны удовлетворять. ***Необходимым условием*** экстремума в точке x^* является равенство нулю первой производной (теорема Ферма), т.е. требуется решить уравнение

$$f'(x) = 0. \tag{1}$$

Данному уравнению удовлетворяют как локальные и глобальные экстремумы, так и точки перегиба функции, поэтому приведенное условие является только необходимым, но недостаточным.

С целью получения ***достаточных условий*** требуется расчет значений вторых производных в точках, удовлетворяющих уравнению (1). При этом доказано, что минимуму функции соответствует положительное значение второй производной, т.е. $f''(x^*) > 0$, а максимуму – отрицательное, т.е. $f''(x^*) < 0$. Однако, если вторая производная равна нулю, ситуация остается неопределенной и необходимо исследовать высшие производные. При этом если первая высшая производная не равная 0 имеет четный порядок, то экстремум существует, в противном случае – нет.

Унимодальные функции

Дадим определение унимодальной функции при поиске минимума.

Определение. Непрерывная функция $f(x)$ называется унимодальной на отрезке $[a, b]$ если:

- точка x^* локального минимума функции принадлежит отрезку $[a, b]$;
- для любых двух точек отрезка x_1 и x_2 , взятых по одну сторону от точки минимума, точке x_1 более близкой к точке минимума соответствует меньшее значение функции, т.е. при $x^* < x_1 < x_2$ либо при $x_2 < x_1 < x^*$ справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Достаточное условие унимодальности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ содержится в следующей теореме.

Теорема. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $f''(x^*) > 0$ в любой точке этого отрезка, то $f(x)$ – унимодальная функция на $[a, b]$.

Заметим, что условие $f''(x^*) > 0$ определяет множество точек, на котором функция является выпуклой (вниз). Условие же $f''(x^*) < 0$ определяет вогнутую функцию, которая на отрезке $[a, b]$ имеет максимум и также является унимодальной.

Метод квадратичной аппроксимации

Основан на аппроксимации функции полиномом второго порядка в некоторой окрестности и расчета на его основе координаты точки оптимума.

Пусть известны значения функции в трех точках x_0 , x_1 , x_2 , составляющие соответственно y_0 , y_1 , y_2 . Тогда функцию $f(x)$ можно аппроксимировать полиномом

$$g(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

с коэффициентами

$$a_0=y_0 \quad ;$$

$$a_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \quad ;$$

$$a_2=\frac{1}{x_2-x_1}\left(\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right) \quad .$$

Оптимальное значение оценивается по формуле

$$x^*\approx\frac{x_1+x_0}{2}-\frac{a_1}{2a_2} \ .$$

Методы последовательного сокращения отрезка унимодальности

Основой многих одномерных численных методов является сокращение отрезка унимодальности, а именно: построение последовательности отрезков $[a_k, b_k]$, стягивающихся к точке x^* – минимуму функции на исходном отрезке. Методы оптимизации отличаются друг от друга лишь различным выбором точек на начальном отрезке унимодальности.

Общая последовательность реализации методов:

- выбор точек на начальном отрезке унимодальности;
- вычисление значений функции в этих точках и сравнение этих значений;
- определение нового отрезка;
- проверка критерия останова.

Равномерный поиск

Равномерный поиск является примером одномерного поиска, когда точки, в которых вычисляется значение функции, выбираются заранее. Начальный отрезок $[a_0, b_0]$ делится на равные отрезки длиной d сеткой из n точек $a_0 + d \cdot k$ для $k=1, ..., n$ и тогда $b_0= a_0+(n+1) \cdot d$. Функция $f(x)$ вычисляется в каждом из n узлов полученной сетки, и выбирается точка x, в которой она имеет минимальное значение. Этот метод обычно используется для начальной оценки отрезка $[x - d, x + d]$, которому принадлежит минимум. Для достижения высокой точности в этом методе необходимо осуществить большое число вычислений функции. Однако его преимуществом является возможность поиска глобальных экстремумов функции, когда нет уверенности в правильном определении начального отрезка унимодальности.

Метод локализации оптимума

С целью повышения точности и уменьшения числа расчетов $f(x)$ можно усовершенствовать стратегию равномерного поиска. После обычного равномерного поиска в новом отрезке $[x - d, x + d]$ вновь производится разбиение на то же количество частей, определяется новый отрезок и т.д. Поиск производится до тех пор пока длина нового отрезка не станет меньше заданной точности. Доказано, что данный метод работает наиболее эффективно если текущий отрезок унимодальности делится на четыре части части, т.е. $n = 3$. При этом значение целевой функции в середине нового отрезка уже известно и на каждой последующей итерации требуется вычислить только два значения функции. В результате каждый раз отрезок унимодальности делится надвое, поэтому метод получил также название ***метода деления отрезка пополам***.

Общая схема сужения промежутка унимодальности

В методах, рассматриваемых далее, для дальнейшего сужения промежутка унимодальности используют следующую идею.

Возьмем две точки x_1 и x_2, принадлежащие начальному отрезку $[a_0, b_0]$ такие, что $x_1 < x_2$. В каждом из трех следующих очевидных случаев можно указать отрезок меньших размеров $[a_1, b_1]$, содержащий точку минимума x^* и принадлежащий первоначальному отрезку (рисунок 1):

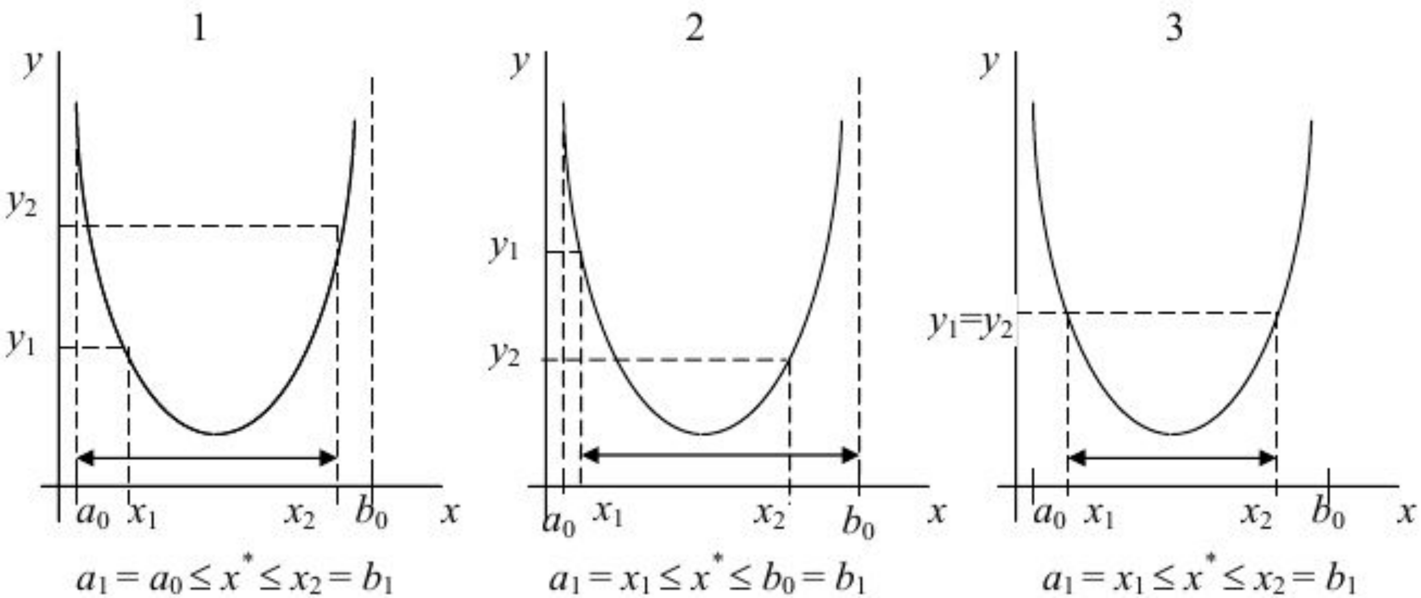


Рисунок 1 – Возможные ситуации при сужении отрезка

1. Если $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$, то положим $a_1 = a_0$ и $b_1 = x_2$ и получим меньший отрезок унимодальности $[a_1, b_1]$.
2. Если $y_1 = f(x_1) > y_2 = f(x_2)$, то естественно принять $a_1 = x_1$ и $b_1 = b_0$.
3. Если $y_1 = f(x_1) = y_2 = f(x_2)$, то $a_1 = x_1$ и $b_1 = x_2$.

Метод половинного деления

Метод половинного деления, называемый также ***методом дихотомии***, является процедурой последовательного поиска. Пусть определен отрезок $[a_0, b_0]$, которому принадлежит точка локального минимума x^*, и функция $f(x)$ является унимодальной на этом отрезке. Далее для сужения промежутка унимодальности используем две точки x_1 и x_2, расположенные симметрично на расстоянии $\delta > 0$ от середины отрезка:

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} - \delta \ ;$$

$$x_2 = \frac{a_0 + b_0}{2} + \delta \ .$$

Константа δ должна быть меньше допустимой конечной длины отрезка, $\Delta_k = b_k - a_k > 0$.

Рассчитываем значение функции в этих точках $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ и в зависимости от их соотношения новые границы отрезка унимодальности $[a_1, b_1]$ будут следующие:

- $y_1 < y_2$, $a_1 = a_0$ и $b_1 = x_2$;
- $y_1 > y_2$, $a_1 = x_1$ и $b_1 = b_0$;
- $y_1 = y_2$, $a_1 = x_1$ и $b_1 = x_2$.

Название *метода половинного деления* мотивировано тем, что если величина ε достаточно мала, то длина отрезка унимодальности $(b - a)$ уменьшается почти вдвое.

В этом суженном промежутке $[a_1, b_1]$ вновь рассчитываются две точки $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$, симметричные относительно его середины, и значение функции в этих точках. Процедура будет повторяться до тех пор, пока не будет выполняться условие $\Delta_k = b_k - a_k \le \varepsilon$, где ε – точность поиска, и тогда в качестве точки локального минимума можно приближенно принять середину отрезка $x^* \approx \dfrac{a_k + b_k}{2}$.

Метод золотого сечения

Термин “золотое сечение” ввел Леонардо да Винчи. Точка x_1 является золотым сечением отрезка $[a, b]$, если отношение длины b-a всего отрезка к длине b-x_1 большей части равно отношению длины большей части к длине x_1–a меньшей части (рисунок 2), т.е. x_1 – золотое сечение, если справедливо соотношение $\frac{b-a}{b-x_1}=\frac{b-x_1}{x_1-a}$. Аналогично, точка x_2 симметричная точке x_1 относительно середины отрезка $[a, b]$, является вторым золотым сечением этого отрезка.

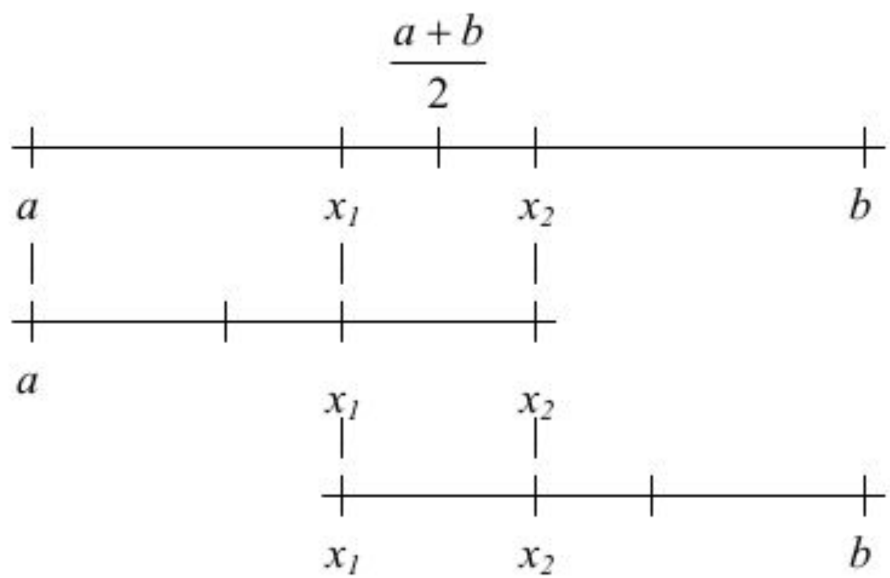


Рисунок 2 – Метод золотого сечения

Отметим свойство золотого сечения: точка x_1 одновременно является золотым сечением отрезка $[a, x_2]$, а другая точка x_2 - золотым сечением отрезка $[x_1, b]$.

Суть метода золотого сечения заключается в следующем. Сначала на исходном отрезке $[a_0, b_0]$ находятся точки x_1 и x_2 по следующим формулам:

$$x_1= a_0 +(1-k)\cdot(b_0-a_0) ;$$

$$x_2= a_0 +k\cdot(b_0-a_0) ;$$

где $k = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618$ – коэффициент сжатия.

Затем вычисляются значения функции в точках x_1 и x_2 , т.е. $y_1=f(x_1)$ и $y_2=f(x_2)$. При этом возможны два случая:

1 $y_1 < y_2$, в этом случае новый отрезок будет равен: $a_1=a_0$ и $b_1=x_2$. В этом отрезке вновь выбираются две точки: $x_1^{(1)} = a_1+ (1- k)\cdot(b_1-a_1)$ и $x_2^{(1)}=x_1$.

2 $y_1 < y_2$, тогда новый отрезок будет составлять: $a_1=x_1$ и $b_1=b_0$. В новом отрезке также выбираются две точки: $x_1^{(1)} = x_2$ и $x_2^{(1)}= a_1 + k\cdot(b_1 - a_1)$.

И в первом и во втором случаях рассчитывается лишь одна новая точка (вторая известна). В новой точке рассчитывается значение функции и вновь производится сравнение в двух точках, и в зависимости от этого выбирается новый отрезок. Процедура повторяется до тех пор, пока не будет выполняться условие $(b_k - a_k) \le \varepsilon$, где ε – точность поиска.

Метод Фибоначчи

В методе Фибоначчи требуется, чтобы общее число n вычислений функции было выбрано заранее, так как точки, в которых производится вычисление, определяются по формулам:

$$x_1^{(k)} = a_k + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}} \cdot (b_k - a_k), \qquad k=0, ..., n-2 ;$$

$$x_2^{(k)} = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}} \cdot (b_k - a_k), \qquad k=0, ..., n-2 ;$$

где $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, $i=1, 2, \ldots$ $F_0 = F_1 = 1$ - называется последовательностью чисел Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... , т.е. каждый член последовательности рассчитывается как сумма двух предыдущих членов).

Алгоритм поиска.

Выбирается начальный отрезок $[a_0, b_0]$ и число вычислений n таким образом, чтобы $F_n > \dfrac{b_0 - a_0}{\Delta}$, где $\Delta > 0$ – конечная длина отрезка.

Затем рассчитываются координаты двух точек:

$$x_1^{(0)} = a_0 + \frac{F_{n-2}}{F_n} \cdot (b_0 - a_0),$$

$$x_2^{(0)} = a_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \cdot (b_0 - a_0)$$

и значение функции в этих точках $y_1 = f(x_1^{(0)})$ и $y_2 = f(x_2^{(0)})$.

В случае $y_1 < y_2$

$$a_1 = a_0 \text{ и } b_1 = x_2^{(0)}, \qquad x_1^{(1)} = a_1 + \frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} \cdot (b_1 - a_1), \qquad x_2^{(1)} = x_1^{(0)}.$$

В случае $y_1 > y_2$

$$a_1 = x_1^{(0)} \text{ и } b_1 = b_0, \qquad x_1^{(1)} = x_2^{(0)}, \qquad x_2^{(1)} = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \cdot (b_1 - a_1).$$

Таким образом данная процедура повторяется $(n - 2)$ раза.

При $k = (n - 2)$ точки x_k и y_k совпадают и соответствуют середине отрезка, поэтому чтобы обеспечить дальнейшее сокращение отрезка, точка последнего вычисления функции перемещается вправо на величину константы различимости $\delta > 0$, которая выбирается заранее существенно меньше заданной точности.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Найти минимум функции $f(x) = x^2 + 2x$ с точностью $\varepsilon = 0{,}8$ для начальной точки $x_0 = 10$. Константу различимости примем равной $\delta = 0{,}2$.

Аналитический анализ функции

Представленная функция и ее производные непрерывны, поэтому определяем первую производную и приравниваем ее к 0, т.е

$$f'(x) = 2x + 2 = 0;$$

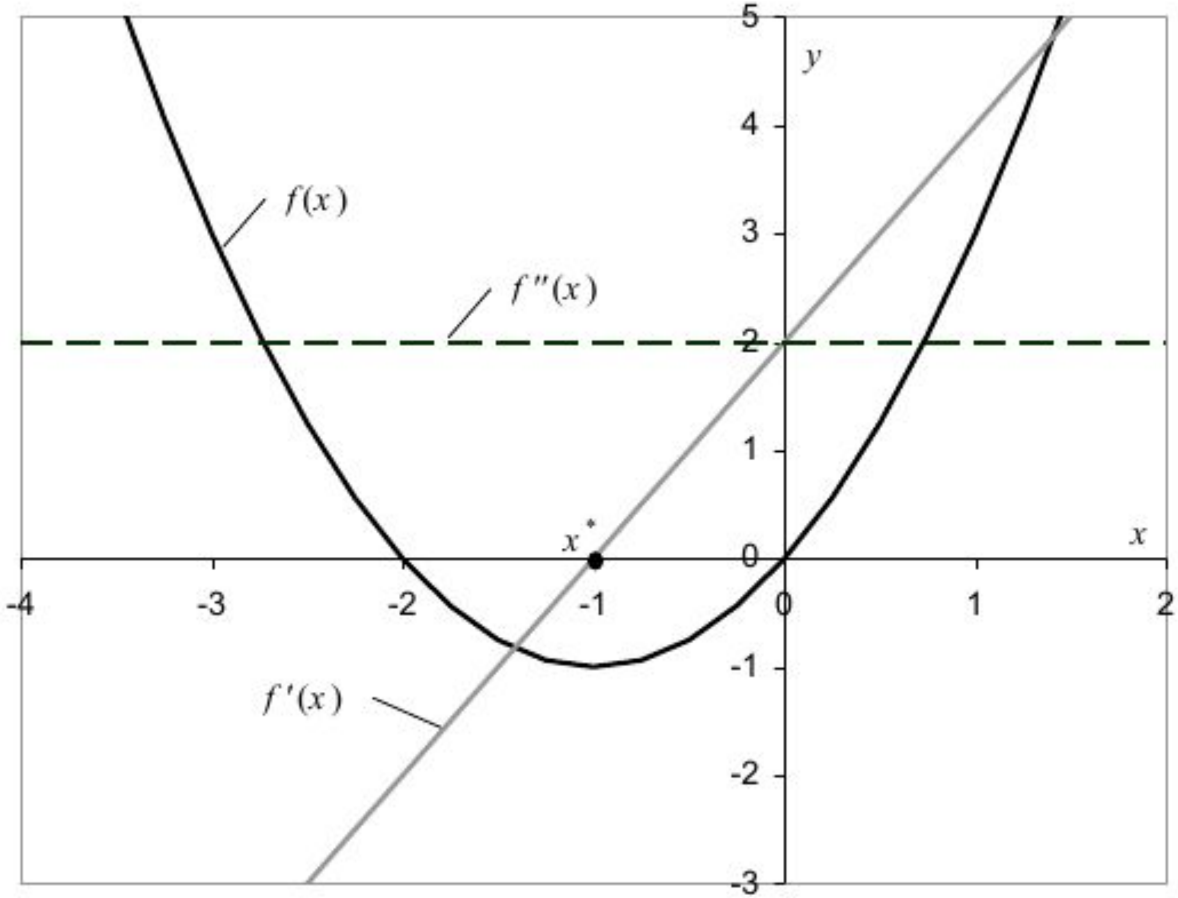
откуда следует, что функция имеет один экстремум в точке $x^* = -1$.

Далее находим значение второй производной в точке x^*: $f''(x^*) = 2 > 0$, т.е. в указанной точке имеем глобальный минимум функции, который составляет: $f(x^*) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) = -1$

Поскольку вторая производная всегда положительна, функция унимодальна на интервале $(-\infty, \infty)$.

Графический анализ функции

Построим график функции, ее первой и второй производных в окрестности точки x^*, как показано на рисунке А.1.



Определение начального отрезка унимодальности

Для определения отрезка унимодальности используем начальные вычисления метода обратного переменного шага, описанные в пункте А.3 для заданной начальной точки $x^{(0)} = 10$ и начальном шаге $\Delta = -5$.

$f(x_0) = f(10) = 120$;

$f(x_0 + \Delta_0) = f(10 - 5) = 35$; $f(x_0 + \Delta_0) < f(x_0)$;

$f(x_0 + 2\Delta_0) = f(10 - 10) = 0$; $f(0) < f(5)$;

$f(x_0 + 3\Delta_0) = f(10 - 15) = 15$; $f(-5) > f(0)$ и т.о. точка минимума $5 > x^* > -5$.

Вывод: минимум функции находится на отрезке [-5, 5] , который можно принять в качестве начального отрезка унимодальности.

Расчет минимума функции методом локализации оптимума

1 Делим исходный отрезок на четыре равные части и рассчитываем значения функции в полученных точках

$y_1 = f(x_1) = f(-2{,}5) = 1{,}25$;

$y_2 = f(x_2) = f(0) = 0$;

$y_3 = f(x_3) = f(2{,}5) = 11{,}25$.

Учитывая, что значения функции на концах исходного отрезка известны и минимум достигается в точке $x_2 = 0$, получаем новый отрезок унимодальности [-2,5 ; 2,5]. Проверяем условие окончания поиска: $\Delta_1 = b_1\text{-}a_1 = 2{,}5+2{,}5 > \varepsilon = 0{,}8$ и продолжаем решение.

2 Делим новый отрезок на четыре равные части и рассчитываем значения функции в полученных точках. При этом в середине отрезка значение функции уже известно, т.е. $y_2 = f(x_2) = f(0) = 0$.

$y_1 = f(x_1) = f(-1{,}25) = -0{,}94$;

$y_3 = f(x_3) = f(1{,}25) = 4{,}06$.

Поскольку минимум достигается в точке x_1 =-1,25, получаем новый отрезок унимодальности [-2,5 ; 0]. Проверяем условие окончания поиска: $\Delta_2 = b_2\text{-}a_2 = 0 + 2{,}5 > \varepsilon = 0{,}8$ и продолжаем решение.

3 Вновь делим новый отрезок на четыре равные части и рассчитываем значения функции в полученных точках

$y_1 = f(x_1) = f(-1{,}88) = -0{,}23$;

$y_3 = f(x_3) = f(-0{,}625) = -0{,}86$.

Поскольку минимум достигается в точке x_2 =-1,25, получаем новый отрезок унимодальности [-1,88 ; -0,625]. Проверяем условие окончания поиска: $\Delta_3 = b_3 - a_3 = -0{,}625 + 1{,}88 = 1{,}25 > \varepsilon = 0{,}8$ и продолжаем решение.

4 Вновь делим новый отрезок на четыре равные части и рассчитываем значения функции в полученных точках

$y_1 = f(x_1) = f(-1{,}56) = -0{,}23$;

$y_3 = f(x_3) = f(-0{,}94) = -0{,}86$.

Поскольку минимум достигается в точке x_2 =-1,25, получаем новый отрезок унимодальности [-1,25 ; -0,625]. Длина нового отрезка составляет $\Delta_4 = b_4 - a_4 = -0{,}625 + 1{,}25 = 0{,}625 < \varepsilon = 0{,}8$ и условие окончания поиска выполняется.

Вывод: Конечный отрезок унимодальности [-1,25;-0,625]. Принимаем за оптимальную точку его середину $x^* = -0{,}9375$. Значение функции в этой точке равно - 0,9961, количество итераций – 4 при 9 вычислениях функции.

Расчет минимума функции методом половинного деления

Выбираем значение окрестности равной константе различимости $\delta = 0{,}2 < \varepsilon$.

1 Выбираем две точки, симметрично расположенные относительно середины отрезка $[a_0, b_0]$:

$$x_1^{(0)} = (-5+5)/2 - 0{,}2 = -0{,}2\ ,$$
$$x_2^{(0)} = (-5+5)/2 + 0{,}2 = 0{,}2$$

и рассчитываем значение функции в этих точках:

$$y_1^{(0)} = f(x_1^{(0)}) = (-0{,}2)^2 + 2\cdot(-0{,}2) = -0{,}36\ ,$$
$$y_2^{(0)} = f(x_2^{(0)}) = 0.2^2 + 2\cdot 0.2 = 0.44.$$

Так как $y_1^{(0)} < y_2^{(0)}$, определяем границы нового отрезка:

$$a_1 = a_0 = -5\ ,$$
$$b_1 = x_2^{(0)} = 0{,}2\ .$$

2 Вновь выбираем две точки на отрезке $[a_1, b_1]$:

$$x_1^{(1)} = (-5+0{,}2)/2 - 0{,}2 = -2{,}6\ ,$$
$$x_2^{(1)} = (-5+0{,}2)/2 + 0{,}2 = -2{,}2$$

и рассчитываем значение функции в этих точках:

$$y_1^{(1)} = (-2{,}6)^2 + 2\cdot(-2{,}6) = 1{,}56\ ,$$
$$y_2^{(1)} = (-2{,}2)^2 + 2\cdot(-2{,}2) = 0{,}44\ .$$

Поскольку $y_1^{(1)} > y_2^{(1)}$, границы нового отрезка-

$$a_2 = x_1^{(1)} = -2{,}6\ ,$$
$$b_2 = b_1 = 0{,}2\ .$$

Проверяем условие окончания оптимизации и так как

$$\Delta_2 = b_2 - a_2 = 0{,}2 + 2{,}6 = 2{,}8 > 0{,}8\ ,$$

продолжаем поиск.

3 Отрезок $[a_2, b_2] = [x_1^{(1)}, b_1] = [-2{,}6; 0{,}2]$.

$x_1^{(2)} = -1{,}4$, $x_2^{(2)} = -1{,}0$, $y_1^{(2)} = -0{,}84 > y_2^{(2)} = -1{,}00$,

$a_3 = x_1^{(2)} = -1{,}4$, $b_3 = b_2 = 0{,}2$

и проверяем условие окончания оптимизации:

$\Delta_3 = b_3 - a_3 = 0{,}2 + 1{,}4 > 0{,}8$.

4 Отрезок $[a_3, b_3] = [x_1^{(2)}, b_2] = [-1{,}4; 0{,}2]$.

$x_1^{(3)} = -0{,}8$, $x_2^{(3)} = -0{,}4$, $y_1^{(3)} = -0{,}96 < y_2^{(3)} = -0{,}64$.

5 Отрезок $[a_4, b_4] = [a_3, x_2^{(3)}] = [-1{,}4; -0{,}4]$.

$x_1^{(4)} = -1{,}1$, $x_2^{(4)} = -0{,}7$, $y_1^{(4)} = -0{,}99 < y_2^{(4)} = -0{,}91$.

Новый отрезок имеет границы:

$[a_5, b_5] = [a_4, x_2^{(4)}] = [-1{,}4; -0{,}7]$,

его длина составляет $\Delta_5 = b_5 - a_5 = -0{,}7 + 1{,}4 = 0{,}7 < \varepsilon = 0{,}8$

и таким образом условие окончания поиска выполняется.

За точку локального минимума, найденную с заданной точностью принимаем середину отрезка $[a_5, b_5]$: $x^* \approx (a_5+b_5)/2 = (-1{,}4-0{,}7)/2 = -1{,}05$.

Значение функции в этой точке

$$f(x^*) = (-1{,}05)^2 + 2\cdot(-1{,}05) = -0{,}9975.$$

Вывод: Конечный отрезок унимодальности [-1,4 , -0,7]. Принимаем за оптимальную точку середину этого отрезка $x^* = -1{,}05$. Значение функции в этой точке равно - 0,9975, количество итераций равно 5 при 10 вычислений функции.

Поиск минимума функции методом золотого сечения

1 Для начального отрезка $[a_0, b_0]$ = [-5, 5] рассчитываем две точки:

$$x_1^{(0)} = -5 + (1-0{,}618)\cdot(5+5) = -1{,}18\ ,$$

$$x_2^{(0)} = -5 + 0{,}618\cdot(5+5) = 1{,}18$$

и значение функции в этих точках

$$y_1^{(0)} = f(x_1^{(0)}) = (-1{,}18)^2 + 2\cdot(\cdot-1{,}18) = -0{,}968\ ,$$

$$y_2^{(0)} = f(x_2^{(0)}) = (1{,}18)^2 + 2\cdot(1{,}18) = 3{,}7524.$$

$y_1^{(0)} < y_2^{(0)}$, следовательно новый отрезок имеет границы

$$[a_1, b_1] = [a_0\ , x_2^{(0)}] = [-5;\ 1{,}18]\ .$$

Проверяем условие окончания поиска: $\Delta_1 = b_1 - a_1 = 1{,}18+5 > \varepsilon = 0{,}8$ и продолжаем решение.

2 Для отрезка $[a_1, b_1]$ = [-5; 1,18] рассчитываем новые точки

$$x_1^{(1)} = -5 + (1-0{,}618)\cdot(1{,}18+5) = -2{,}639\ ,$$

$$x_2^{(1)} = x_1^{(0)} = -1{,}18$$

и значение функции в точке $x_1^{(1)}$ -

$$y_1^{(1)} = f(x_1^{(1)}) = (-2{,}639)^2 - 2\cdot 2{,}639 = 1{,}686.$$

Значение функции в точке $x_2^{(1)}$ совпадает со значением в $x_1^{(0)}$.

$$y_2^{(1)} = y_1^{(0)} = -\ 0{,}968\ ,$$

$y_1^{(1)} > y_2^{(1)}$, следовательно новый отрезок составит:

$$[a_2, b_2] = [x_1^{(1)}\ , b_1] = [-2{,}639;\ 1{,}18]\ .$$

Проверяем условие окончания поиска: $\Delta_2 = b_2 - a_2 = 1{,}18+2{,}639 > 0{,}8$ и продолжаем решение.

3 Отрезок $[a_2, b_2] = [x_1^{(1)}, b_1] = [-2,639; 1,18]$.

$x_1^{(2)} = x_2^{(1)} = x_1^{(0)} = -1,18$, $\quad x_2^{(2)} = -2,639 + 0,618 \cdot (1,18+2,639) = -0,279$,

$y_1^{(2)} = y_2^{(1)} = -0,968 \; < \quad y_2^{(2)} == (-0,279)^2 + 2 \cdot (-0,279) = -0,480$.

4 Отрезок $[a_3, b_3] = [a_2, x_2^{(2)}] = [-2,639; -0,279]$.

$x_1^{(3)} = -2,639 + 0,382 \cdot (-0,279+2,639) = -1,737$, $\; x_2^{(3)} = x_1^{(2)} = x_2^{(1)} = x_1^{(0)} = -1,18$,

$y_1^{(3)} = (-1,737)^2 + 2 \cdot (-1,737) = -0,457 \quad > \; y_2^{(3)} = y_1^{(2)} = -\,0,968$.

5 Отрезок $[a_4, b_4] = [x_1^{(3)}, b_3] = [-1,737; -0,279]$.

$x_1^{(4)} = x_2^{(3)} = -1,18$, $\quad x_2^{(4)} = -1,737 + 0,618 \cdot (-0,279+1,737) = -0,836$,

$y_1^{(4)} = y_2^{(3)} = -0,968 \; > \quad y_2^{(4)} == (-0,836)^2 + 2 \cdot (-0,836) = -0,973$.

6 Отрезок $[a_5, b_5] = [x_1^{(4)}, b_4] = [-1,18 ; -0,279]$.

$x_1^{(5)} = x_2^{(4)} = -\,0,836$, $\quad x_2^{(5)} = -\,1,18 + 0,618 \cdot (-0,279+1,18) = -0,623$,

$y_1^{(5)} = y_2^{(4)} = -0,973 \; < \quad y_2^{(5)} == (-0,623)^2 + 2 \cdot (-0,623) = -0,858$.

Поскольку длина нового отрезка

$[a_6, b_6] = [a_5\,, x_2^{(5)}] = [-1{,}18;\ -0{,}623]$ составляет

$\Delta_6 = b_6 - a_6 = -0{,}623+1{,}18 = 0{,}557 < \ = 0{,}8$,

условие окончания поиска выполняется.

Вывод: Минимум функции находится на отрезке [-1,18 , -0,623]. Количество итераций равно 6 при 7 вычислениях функции. В качестве искомой точки выбираем середину отрезка $[a_6,\ b_6]$, $x^* = -0{,}9015$. Значение функции в этой точке равно -0,9903.

Расчет минимума функции методом Фибоначчи

Задаемся константой различимости $\delta = 0{,}2 < \varepsilon$ и выбираем количество расчетов n из условия $F_n > \dfrac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$ = (5+5)/0,8= 12,5:

Ряд Фибоначчи:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
F_i	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	…

F_6= 13 > 12,5 следовательно количество расчетов $n = 6$.

1 Рассчитываем точки на отрезке $[a_0, b_0]$; k=0 :

$x_1^{(0)}$= -5+ (5+5) $\cdot F_4/F_6$= -5+10·5/13=- 1,154

$x_2^{(0)}$= -5+ (5+5) $\cdot F_5/F_6$= -5+10·8/13= 1,154

и значение функции в этих точках-

$y_1^{(0)} = f(x_1^{(0)})$ =(-1,154)^2 +2·(-1,154)=-0,976

$y_2^{(0)} = f(x_2^{(0)})$ = (1,154)^2 +2· (1,154) = 3,64 .

$y_1^{(0)} < y_2^{(0)}$, рассчитываем границы нового отрезка:

$a_1=a_0$= -5

$b_1= x_2^{(0)}$ = 1,154 .

2 Для отрезка $[a_1, b_1] = [-5 ; 1{,}154]$ рассчитываем новые точки; $k = 1$:

$x_1^{(1)} = -5+ (1{,}154+5) \cdot 3/8= - 2{,}692$ $\qquad x_2^{(1)} = x_1^{(0)} = -1{,}154$

$y_1^{(1)} =(-2{,}692)^2+ 2\cdot(-2{,}692) =1{,}863 \;>\; y_2^{(1)} = y_1^{(0)} =-0{,}976$.

3 Отрезок $[a_2, b_2] = [x_1^{(1)}, b_1] = [-2{,}692 ; 1{,}154]$; $\quad k = 2$:

$x_1^{(2)} = x_2^{(1)} = -1{,}154$ $\qquad x_2^{(2)} =-2{,}692+ (1{,}154+2{,}692) \cdot 3/5 = -0{,}384$

$y_1^{(2)} = y_2^{(1)} = -0{,}976 \;<\; y_2^{(2)} =(-0{,}384)^2+ 2\cdot(-0{,}384) =-0{,}621$.

4 Отрезок $[a_3, b_3] = [a_2, x_2^{(2)}] = [-2{,}692 ; 0{,}384]$; $\quad k = 3$:

$x_1^{(3)} = -2{,}692 +(-0{,}384+2{,}692)\ 1/3= -1{,}923$ $\qquad x_2^{(3)} = x_1^{(2)} = -1{,}154$

$y_1^{(3)} =(-1{,}923)^2+ 2\cdot(-1{,}923) = -0{,}148 \;> y_2^{(3)} = y_1^{(2)} =-0{,}976$.

5 Отрезок $[a_4, b_4] = [x_1^{(3)}, b_3] = [-1{,}923 ; -0{,}384]$.

Поскольку на данном шаге k=n-2= 4 точки $x_1^{(4)}$ и $x_2^{(4)}$ совпадают и соответствуют середине отрезка

$$x_1^{(4)} = x_2^{(3)} = x_2^{(4)} = -1{,}154 \ ,$$

для обеспечения заданной точности перемещаем точку последнего вычисления функции вправо на величину константы различимости δ:

$$x_2^{(4)} = -1{,}154+0.2= -0.954$$

$$y_2^{(4)} =(-0{,}954)^2+2\cdot(-0{,}954)=-0{,}998 \ .$$

Так как $y_1^{(4)}= y_2^{(3)}= -0.976 > y_2^{(4)}$, получаем конечный отрезок $[a_5 , b_5] = [-1{,}154; -0{,}384]$. За точку минимума принимаем середину отрезка

$$x^* = (a_5+ b_5)/2= (-1{,}154-0{,}384)/2= -0{,}769.$$

Вывод: Минимум функции соответствует точке -0,769, значение функции в этой точке -0,947. Количество итераций равно 5 при 6 расчетах целевой функции.